

## Carl Neumann<sup>1)</sup>.

Von

Otto Hölder in Leipzig.

---

Am 27. März 1925 wurde Carl Neumann im Alter von beinahe 93 Jahren der Wissenschaft entrissen. Seine Beteiligung an der Gründung und Redaktion der Mathematischen Annalen ist bereits besprochen worden (Bd. 94, S. 177). Eine Reihe seiner gedankenreichen, auf verschiedene Gebiete sich beziehenden Arbeiten ist in den Annalen, namentlich in deren ersten Bänden, veröffentlicht. Länger als andere hat er an der mathematischen Wissenschaft mitgebaut, und noch vor wenigen Jahren sind umfangreiche Abhandlungen von ihm erschienen, Früchte seines bewunderungswürdigen Fleißes, seiner nicht im höchsten Alter nachlassenden Arbeitskraft.

Carl Gottfried Neumann ist am 7. Mai 1832 als Sohn des berühmten Physikers und Mineralogen Franz Neumann in Königsberg geboren. Dort hat er seine Schulbildung erhalten, studiert und im Jahre 1856 promoviert. 1858 erwarb er sich die *Venia legendi* an der Universität Halle, wo er dann 1863 zum außerordentlichen Professor befördert wurde. In demselben Jahre wurde er als Ordinarius nach Basel berufen, von wo er 1865 nach Tübingen übersiedelte. Als dann in Leipzig Drobisch die Professur der Mathematik mit der der Philosophie vertauscht hatte, beantragte 1868 die Philosophische Fakultät eine Vermehrung der mathematischen Ordinariate und veranlaßte neben der Beförderung Scheibners zum ordentlichen Professor die Berufung Carl Neumanns nach Leipzig. Von da an hat Neumann hier seine eindrucksvolle und erfolgreiche Tätigkeit ausgeübt und zahllose Schüler ausgebildet, bis er am Anfang des Jahres 1911 in den Ruhestand trat.

So war Neumanns Leben äußerlich wenig bewegt. Trotz zahlreicher bedeutender Auszeichnungen, die ihm zuteil wurden, war er außerhalb der

---

<sup>1)</sup> Mit wenigen kleinen Änderungen abgedruckt aus den Berichten der math.-phys. Klasse der Sächsischen Akad. der Wissensch. zu Leipzig, Bd. 77.

Kreise der Mathematiker und Physiker seinen Mitbürgern fast unbekannt. Die geschäftlichen, mit dem Universitätswesen verbundenen Angelegenheiten wußte er von sich abzuhalten, und so hat er auch keine Ehrenämter der Universität bekleidet. Er war der typische deutsche Professor alten Stiles, dem seine wissenschaftliche Arbeit die Hauptsache war; ja es bildete bei ihm diese Arbeit neben der Vorlesung — trotz der reichen sonstigen Interessen, die ihn bewegten — das einzige Feld seiner Tätigkeit. Nachdem noch der glückliche Ehebund, den er geschlossen hatte, im Jahre 1875 nach erst elfjähriger Dauer durch den Tod der Gattin gelöst worden war, lebte der Vereinsamte lange Zeit fast nur seiner geliebten Wissenschaft und seinen ihm in besonderer Anhänglichkeit verbundenen Schülern. Erst in höheren Lebensjahren hat seine Schwester seinen Hausstand geteilt und ihm wieder ein behagliches Heim bereitet, in dessen anregender Atmosphäre manche von uns Kollegen schöne Stunden verlebt haben.

Neumanns wissenschaftliche Arbeiten haben sich, entsprechend seiner reichen Begabung und den mannigfaltigen Anregungen, die ihm seine Studienzeit gebracht hatte, auf verschiedenen Gebieten bewegt. Die physikalischen Interessen hatte ihm der Vater vererbt, doch lag die eigene Anlage mehr auf Seite des mathematischen, insbesondere des anschaulich mathematischen Denkens. Während der Königsberger Studienzeit hatte er jedenfalls von Hesse geometrische, von Richelot funktionentheoretische Anregungen erhalten. Seine Doktordissertation (Nr. 1) behandelt ein Spezialproblem der Mechanik, das mit hyperelliptischen Integralen gelöst wird, ist also funktionentheoretischer Art. Die Habilitationsschrift (Nr. 2) jedoch gehört der mathematischen Physik an und sucht von der magnetischen Drehung der Polarisationssebene des Lichtes eine Theorie zu geben. In Basel hat er die erste Auflage seines bekannten und viel benutzten Lehrbuchs über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale geschrieben (Nr. 17), in Tübingen in einer der Universität Bonn gewidmeten Gratulationsschrift der Universität die erste elektrodynamische Arbeit veröffentlicht (Nr. 26). Neben den Arbeiten in Funktionentheorie, in theoretischer Physik, insbesondere in der Elektrodynamik, hat ihn, und zwar vor allem anderen, die Theorie des Potentials und der damit in Zusammenhang stehenden Reihenentwicklungen beschäftigt. Auch hat Neumann sein ganzes Leben hindurch mechanische Aufgaben behandelt und förmlich mit den Grundlagen dieser Wissenschaft gerungen.

Es erscheint kaum möglich, Neumanns Leben in Perioden zu teilen, in denen er sich jedesmal nur mit einer Materie beschäftigt hätte. Ich werde deshalb seine Arbeiten nach den einzelnen Gebieten beschreiben.

Weitaus die glänzendsten von Neumanns dauernden Leistungen gehören der Potentialtheorie an, mit der ich deshalb den Anfang machen

will. Die ersten Arbeiten betrafen Spezialaufgaben, die damals noch nicht oder nicht auf so einfache Weise gelöst waren. Er hat im Jahre 1861 die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie für die Kugel, die ursprünglich von Poisson mit Hilfe von Reihenentwicklungen gelöst worden war, auf eine besonders elegante Art behandelt (Nr. 7)<sup>2)</sup>. 1863 folgte dann die entsprechende Aufgabe für eine von zwei nichtkonzentrischen Kugelflächen begrenzte Schale (Nr. 11 u. 14) und 1864 mit Hilfe von neuartigen Reihenentwicklungen diejenige für einen ringförmigen Raum (Nr. 15). Eine andere, bereits im Jahre 1861 veröffentlichte Arbeit (Nr. 8) enthält allgemeinere Gesichtspunkte. Indem hier Neumann sich vorsetzt, eine der Laplaceschen Gleichung genügende Funktion von nur zwei Variablen zu studieren, betrachtet er erstmalig eine solche Potentialfunktion als die Wirkung einer „Belegung“, eines mit gewissen fiktiven Eigenschaften behafteten Fluidums. Hier zeigt sich die Fruchtbarkeit von Neumanns geometrisch-physikalischer Phantasie. Indem er die fiktiven Massen in einer speziellen Verteilung annimmt, gelingt es ihm, ein Potential mit Niveaukurven von einem gewissen Typus zu erhalten und dadurch dann umgekehrt für Randkurven von diesem Typus die erste Randwertaufgabe des logarithmischen Potentials zu lösen, so etwa, wie es Euler gelungen war, gewisse Arten von Differentialgleichungen dadurch zu integrieren, daß er vorher gewisse Gleichungen, die noch Parameter enthalten, differenziert und einen Parameter eliminiert hatte. Insbesondere löst Neumann hier auch die Randwertaufgabe für eine aus zwei konfokalen Ellipsen begrenzte Ringfläche. Eine in dieser Arbeit angestellte besondere Betrachtung ist von großer Wichtigkeit. Neumann zeigt (a. a. O. S. 365), wie das Randwertproblem gelöst werden kann, wenn die Greensche Funktion des — hier als einfach zusammenhängend zu denkenden — Bereiches nur für eine einzige bestimmte Lage des Zentrums im Innern des Bereiches bekannt ist. Dabei enthält Neumanns Lösung des Problems, ohne daß es ihm übrigens damals bewußt war, implizite das jetzt sehr bekannte Verfahren der konformen Abbildung eines einfach zusammenhängenden Bereiches auf einen Kreis mit Hilfe der Greenschen und der mit dieser zusammen die Cauchy-Riemannschen Gleichungen befriedigenden Funktion. Riemann hatte in Art. 21 der Dissertation diesen Nachweis der Existenz der Abbildung geliefert. Riemanns Arbeiten waren aber damals Neumann noch unbekannt (vgl. Nr. 161, S. 245).

Eine im Jahre 1871 im 3. Bande der Mathematischen Annalen erschienene, bereits 1870, also ungefähr gleichzeitig mit den bekannten Ar-

<sup>2)</sup> Allerdings läßt sich die Lösung auch aus gewissen Ergebnissen, die W. Thomson im Jahre 1845 veröffentlicht hat, ohne Reihenentwicklungen ableiten.

beiten von Schwarz, niedergeschriebene Abhandlung (Nr. 50) enthält neben gewissen Überlegungen über die vorauszusetzenden Stetigkeitsbedingungen die jetzt so geläufigen Schlüsse hinsichtlich des Verhaltens der inneren Werte des Potentials zur oberen und unteren Grenze der Randwerte auf Grund der Riemannschen Bemerkung, daß — beim nichtkonstanten Potential — im Innern kein Extremum vorkommen kann, ferner einen auf Grund des Fortsetzungsverfahrens der Potenzreihen geführten Beweis dafür, daß die Potentialfunktion, falls sie in einem Teil des zusammenhängenden Bereichs konstant ist, im ganzen Bereich konstant ist.

Nachdem Neumann dann noch andere Aufsätze zur Revision und Vervollständigung der Theorie des Potentials hatte erscheinen lassen, veröffentlichte er 1877 die „Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential“ (Nr. 77). In dieser Schrift ist das Potential, aufgefaßt als Wirkung einer Belegung sowohl für den räumlichen als für den ebenen Fall, systematisch untersucht unter beständiger Gegenüberstellung der auf drei und der auf zwei Variable sich beziehenden Sätze. Vor allem neu ist eine gründliche Untersuchung der Potentiale der sogenannten Doppelbelegungen, die im Anschluß an die aus der alten Theorie des Magnetismus hervorgegangene Vorstellung des Doppelpols zuerst von Helmholtz im Raume eingeführt worden waren. Das Potential einer Doppelbelegung vom Moment  $\mu$ , die auf der Begrenzung eines ebenen Bereichs ausgebreitet gedacht ist, wird von Neumann im Anschluß an ein für den Raum von Gauß gegebenes Integral in die Form

$$(1) \quad \int \mu (d\sigma)_x$$

gebracht; dabei ist das Integral über jene Begrenzung zu erstrecken, und  $(d\sigma)_x$  bedeutet den Winkel, unter dem das Element  $d\sigma$  der Begrenzung vom Aufpunkt  $x$  aus erscheint. Das Integral (1) genügt als Funktion der rechtwinkligen Koordinaten des Aufpunktes der Laplaceschen Gleichung sowohl im Innern, als auch außerhalb des gedachten Bereiches, und es gestattet die benutzte geometrische Vorstellung, die Annäherungswerte des Potentials zu bestimmen für den Fall, daß man sich einem bestimmten Randpunkt, sei es von der inneren, sei es von der Außenseite des Bereiches her, annähert. Die Differenz des inneren und des äußeren Annäherungswertes ist gerade das  $2\pi$ -fache des Momentes  $\mu$  der Doppelbelegung.

Die Theorie der Doppelbelegungen hat Neumann auf seine Lösung des 1. Randwertproblems der Potentialtheorie, die berühmte von ihm so genannte „Methode des arithmetischen Mittels“ geführt. Der Gedanke geht auf das Jahr 1870 zurück, in dem Neumann eine Skizze der Methode (vgl. Nr. 43), allerdings ohne jeden Konvergenzbeweis, veröffentlicht hat. In den Untersuchungen von 1877 ist dieser Beweis nun im wesentlichen

ausgeführt. Zum besseren Verständnis geht man am einfachsten vom Kreis aus. Auf der Peripherie seien die von den Peripheriepunkten stetig abhängenden Randwerte  $f$  gegeben. Denkt man sich jetzt eine Doppelbelegung so, daß dem Element  $d\sigma$  der Peripherie gerade dasjenige Moment  $\mu$  zukommt, das dem dort vorhandenen Randwerte  $f$  gleich ist, so stellt das obige Integral (1) im Innern des Kreises eine Potentialfunktion vor, die bei der Annäherung an einen Randpunkt  $s$  den Grenzwert

$$(2) \quad \pi\mu_s + \int \mu(d\sigma)_s = \pi f(s) + \int \mu(d\sigma)_s$$

erhält. Vermöge des Satzes vom Peripherie- und Zentriwinkel im Kreise ist dies aber gleich

$$\pi f(s) + \frac{1}{2} \int \mu(d\sigma)_0,$$

falls unter  $O$  der Mittelpunkt des Kreises verstanden wird. Setzt man nun

$$\frac{1}{2\pi} \int \mu(d\sigma)_0 = M,$$

so kann man  $M$  als das *arithmetische Mittel*<sup>3)</sup> der über die Kreisperipherie verstreuten Momente  $\mu$  bezeichnen.

Das  $\frac{1}{\pi}$ -fache des Potentials (1) hat nun bei  $s$  den Grenzwert

$$f(s) + M;$$

man braucht also nur noch die Konstante  $M$  zum Abzug zu bringen, um eine Potentialfunktion im Innern des Kreises zu erhalten, die am Rande in die vorgeschriebenen Werte  $f$  übergeht.

Ist nun statt des Kreises ein anderer Bereich vorgegeben, der aber — dies ist eine unumgängliche Bedingung — konvex sein muß, und sind auf dessen Grenze wieder gewisse Randwerte  $f$  stetig verteilt, so kann man wiederum das Integral (1) bilden, das im Innern des Bereiches eine Potentialfunktion, d. h. eine der Laplaceschen Gleichung genügende Funktion vorstellt. Für die Annäherung an einen Randpunkt  $s$  gilt nun wieder — wenn von Ecken abgesehen wird — die Formel (2). In dieser ist aber jetzt das zweite Glied

$$\int \mu(d\sigma)_s = \pi f_1$$

nicht mehr eine von der Lage des Punktes  $s$  unabhängige Größe, also nicht mehr ein längs des Randes konstanter Wert. Könnte man aber für das Innere des gegebenen Bereiches das Randwertproblem mit den Randwerten  $f_1$  behandeln, so könnte man offenbar von dem  $\frac{1}{\pi}$ -fachen der

<sup>3)</sup> Da hier  $(d\sigma)_x$  als stets positiv angesehen werden kann, ist auch das  $\frac{1}{\pi}$ -fache des Integrals (1) selbst ein Mittel aus den Werten  $\mu$ .

Formel (1) eine Potentialfunktion so zum Abzug bringen, daß die gestellte Aufgabe gelöst wäre. Nun stellt sich aber, falls der Bereich konvex und nicht „zweisternig“ ist, heraus, daß die neue, auf die Werte  $f_1$  sich beziehende Randwertaufgabe insofern ein einfacheres Problem vorstellt, als die Werte  $f_1$  längs der Peripherie nur in einem Größenintervall veränderlich sind, das kleiner ist als das Größenintervall der  $f$ , und zwar ist jenes Intervall kleiner als das  $\lambda$ -fache dieses Intervalls, wobei  $\lambda$  eine ein für allemal durch den Bereich allein bestimmte Konstante ist, die kleiner als 1 ist. Neumann nennt diese Konstante die *Konfigurationskonstante* des Bereichs.

Man kann nun offenbar für die Randwerte  $f_1$  wieder dieselbe Betrachtung, die für die Randwerte  $f$  angestellt war, wiederholen und das Problem auf ein Randwertproblem mit gewissen Werten  $f_2$  hinausschieben, wobei diese Werte nur in einem Intervall variieren, das kleiner oder gleich dem  $\lambda^2$ -fachen des Intervalls ist, in dem die Werte  $f$  variiert haben. Indem man so ohne Ende fortfährt, ergibt sich ein konvergenter Prozeß, der die Lösung der ursprünglich gestellten Aufgabe liefert.

Offenbar ist für das Verfahren unbedingt wesentlich, daß die genannte Konfigurationskonstante kleiner als 1 ist. Der hierfür in den Untersuchungen von 1877 gegebene Beweis ist nicht ohne Schwierigkeiten und hat ohne Zweifel auch Neumann selbst nicht befriedigt. In einer späteren Veröffentlichung vom Jahre 1887 (Nr. 114) hat er den Gegenstand wieder aufgenommen und, neben einer Reproduktion des alten, einen neuen, auf elementaren Anschauungen aufgebauten und völlig zwingenden Beweis für die Ungleichung  $\lambda < 1$  gegeben<sup>4)</sup>.

Die angeführten Betrachtungen werden für das Außengebiet des Bereichs — unter der Voraussetzung, daß noch eine Annahme für das Verhalten im Unendlichen gemacht ist — genau so durchgeführt, wie für das Innere, und es läßt sich das entsprechende Raumproblem in gleicher Weise wie das ebene behandeln. Nur die Beschränkung auf konvexe Bereiche, bzw. Körper, ist bei der Methode des arithmetischen Mittels wesentlich. Allerdings haben Poincaré, Korn und E. R. Neumann nachträglich beweisen können, daß die aus der Methode hervorgehenden Reihen auch für weit allgemeinere Bereiche gültig bleiben. Diese Beweise ziehen neue Hilfsmittel heran, sind auch ziemlich umständlich und nicht ohne Schwierigkeiten; die Methode des arithmetischen Mittels in dem engeren Sinne Neumanns reicht also doch zur Begründung der Existentialsätze bei allgemeineren Bereichen allein nicht aus. Zur Ergänzung wird man vielleicht am besten, wenn man nicht auf das Thomson-Dirichletsche Prinzip

<sup>4)</sup> Man vgl. auch die von Neumann auf S. 759 angefügte Anmerkung.

zurückgreifen will, dessen neuere Ausgestaltung hier nicht erörtert werden soll, die Verfahren benutzen, die Neumann als kombinatorisch, H. A. Schwarz als alternierend bezeichnet. Hinsichtlich der Durchführung dieser Verfahren, die von Neumann im 9. Kapitel der „Untersuchungen“ besprochen sind, kommt Schwarz die Priorität zu. Es ist aber zu erwähnen, daß Neumann bereits im Jahr 1870, also gleichzeitig mit Schwarz, den Gedanken des Verfahrens gefaßt und veröffentlicht hat (Nr. 43)<sup>5)</sup>; auch findet sich bei Neumann noch eine Variante des Verfahrens, die statt der Verschmelzung von Gebieten solche Gebiete im Auge hat, die das Gemeinsame von zwei gegebenen Gebieten darstellen. Wesentlich ist natürlich, daß auf Grund von Neumanns Methode des arithmetischen Mittels bei den kombinatorischen Verfahren Gebiete zur Zusammensetzung verwendet werden können, die von nichtanalytischen Randkurven begrenzt sind. Eine Darstellung der kombinatorischen Verfahren und auch der Methode des arithmetischen Mittels hat Neumann auch in die zweite Auflage seiner Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale (1884, Nr. 105) hineingearbeitet, um die mit den Existentialsätzen der Potentialtheorie eng verbundenen Riemannschen Existenztheoreme zu begründen.

Der Umstand, daß Neumann in seinen Untersuchungen über die „Methode des arithmetischen Mittels“ die beiderseitigen Randwerte des Potentials einer Doppelbelegung im Zusammenhang miteinander untersucht hat, veranlaßte Poincaré zu einer Verallgemeinerung des Problems. Poincaré sucht eine Doppelbelegung von der Art, daß zwischen den Randwerten der beiden Potentiale, die aus der einen Doppelbelegung im Innen- und Außenbereich hervorgehen, an jeder Stelle des Randes dieselbe lineare Verknüpfung gegeben ist. Dieses Neumann-Poincarésche Problem führt in ungesuchter Weise auf eine Reihenentwicklung nach den Potenzen eines Parameters. Diese Reihe wird vielfach, im Grunde nicht mit Recht, als Neumannsche Reihe bezeichnet. Das genannte verallgemeinerte Problem läßt sich aber auch als Integralgleichung formulieren. In diesem Sinne also leitet das Neumann-Poincarésche Problem in die berühmte Theorie der Integralgleichungen von Ivar Fredholm hinüber.

Hinsichtlich der Untersuchungen von 1877 ist noch zu bemerken, daß darin (S. 216) auch das zweite Randwertproblem bereits behandelt ist, bei dem nicht die Werte der zu bestimmenden Potentialfunktion, sondern die ihrer Ableitung nach der Normalen für die Randstellen gegeben sind. Die Methode des arithmetischen Mittels hat Neumann später (1896, Nr. 133) auf die Differentialgleichung  $\Delta \varphi = \alpha^2 \varphi$  übertragen. Es tritt

<sup>5)</sup> Bekanntlich ist der Grundgedanke des Verfahrens noch älter und geht auf Murphy zurück (vgl. Math. Enzyklop. Bd. II, A 7b, S. 499).

dabei an Stelle der oben mit  $(d\sigma)_x$  bezeichneten Größe, die durch die Ableitung nach der Normalen vom Logarithmus des reziproken Abstandes von  $x$  und  $d\sigma$  (im Raum als Ableitung des reziproken Abstandes selber) darstellbar ist, die Ableitung nach der Normalen von einer etwas anderen Funktion der Entfernung ein.

Neumann ist noch in zahlreichen, z. T. umfangreichen Arbeiten auf allgemeine und spezielle Probleme der Potentialtheorie eingegangen. Es soll hier nur angeführt werden, daß er die Ableitungen der Greenschen Funktion am Rande des Bereiches (in Nr. 114, II, S. 662 ff.) untersucht, insbesondere die Positivität der Ableitung nach der Normalen nachgewiesen hat. Besonders schön und auch folgenreich sind die von ihm entdeckten Beispiele und Spezialsätze. Seine Verallgemeinerung des Bobylewischen Satzes ist ein spezielles Potentialtheorem, demzufolge zwei beliebig gestaltete Konduktoren mit Elektrizitätsmengen von einem solchen Verhältnis geladen werden können, daß die Wirkung des einen Konduktors auf den anderen nach einer vorgegebenen Richtung die Komponente Null ergibt (Nr. 91, S. 33). Ein anderer von Neumann gefundener Spezialsatz (Nr. 150, S. 278) lautet so: Die homogene materielle Ellipsenfläche ist, was ihre Wirkung (im Sinne des logarithmischen Potentials) auf *äußere* Punkte anbelangt, ersetzbar durch eine gewisse materielle Linie im Innern der Ellipse. Dieser Satz, den Neumann von der Ellipse auf deren Fußpunktkurven übertragen hat, und der gerade hier eine ganz besonders einfache Gestalt erhält, bildete den Keim für wichtige Untersuchungen anderer über die analytische Fortsetzung eines aus einer Belegung entspringenen Potentials ins Innere des von der Belegung erfüllten Bereiches.

Die nach trigonometrischen, Kugel- und Zylinder-Funktionen fortschreitenden Reihen und die dazugehörigen Integrale, Gegenstände, die ja mit der Theorie des Potentials in nahem Zusammenhang stehen, haben Neumann viel beschäftigt. Bereits im Jahre 1862 hat er ausgehend von der Cauchyschen Integralformel die Entwicklung einer Funktion von imaginärem Argument nach Kugelfunktionen erhalten; es war dies wohl der erste Fall, in dem für eine nicht nach den Potenzen des Arguments fortschreitende Reihe ein Konvergenzgebiet in der komplexen Zahlenebene — ein von zwei konfokalen Ellipsen gebildeter Ring — nachgewiesen war (Nr. 9). In demselben Jahre hat Neumann in einer mathematisch-physikalischen Arbeit (Nr. 11) die Darstellung einer Funktion von zwei reellen Argumenten mit Hilfe von Zylinder- oder Besselschen Funktionen gegeben. Die gleiche Darstellung läßt sich, wie Neumann später gezeigt hat (Nr. 98), aus der Laplaceschen Entwicklung nach Kugelfunktionen dadurch herleiten, daß der Kugelradius unendlich groß gemacht wird.

1867 ließ Neumann eine Monographie über die Besselschen Funktionen

erscheinen, in der er neben der Zusammenstellung älterer Ergebnisse eine erhebliche Bereicherung der formalen Theorie geliefert hat (Nr. 24). In einer anderen, gleichzeitig erschienenen Abhandlung (Nr. 21, 22) hat er die Theorie der Kugelfunktionen sehr elegant entwickelt und verallgemeinert.

Während in einem Teil der eben erwähnten Schriften die Konvergenzfragen nur unvollständig behandelt sind, hat Neumann 1881 eine zusammenhängende Darstellung aller dieser Funktionsentwicklungen veröffentlicht (Nr. 98), wobei die Konvergenztheoreme auf Grund des zweiten Mittelwertsatzes der Integralrechnung streng bewiesen werden. Für die Darstellung durch Besselsche Funktionen ist damit zum erstenmal ein wirklicher Konvergenzbeweis gegeben worden, während der Nachweis für die nach Kugelfunktionen fortschreitenden Entwicklungen kurz vorher bereits von Dini nach dem Muster der klassischen Untersuchungen Dirichlets über die trigonometrischen Reihen geführt worden war. In einigen späteren Arbeiten hat Neumann die trigonometrischen Reihen von neuem in Betracht gezogen und dabei auch die Frage nach der *Gleichmäßigkeit* der Konvergenz dieser Reihen erörtert (Nr. 166, 175).

Wenn Neumanns Leistungen in der Funktionentheorie besprochen werden sollen, wird man stets zuerst an die Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale denken (Nr. 17 und 105). Diese „Vorlesungen“ sind nie als solche gehalten worden<sup>6)</sup>. Um so größer war aber die Wirkung des gedruckten Buches. Der ungeheure Nutzen dieses Werkes bestand darin, daß hierdurch die Mehrzahl der Mathematiker erst befähigt wurde, die Gedankenwelt von Riemann zu verstehen. Während bei Riemann die die Mehrdeutigkeit einer Funktion darstellende Fläche nur ziemlich allgemein geschildert ist als ein die komplexe Zahlenebene in mehreren Schichten überdeckendes, mit Windungspunkten versehenes Gebilde, nimmt Neumann von schlichten ebenen Flächenstücken seinen Ausgang, die klare und einfache Grenzen haben, an denen sie dann zusammengefügt werden und baut so die Riemannsche Fläche wirklich auf. Der Zusammenhang einer solchen mehrblättrigen Windungsfläche wird nachher nicht bloß in Riemanns Weise durch Zerschneiden, sondern auch durch stetige Umformung untersucht. In klarer, ausführlicher Darstellung wird Schritt für Schritt vorwärts gegangen. Gerade dieses Buch, namentlich in der ersten Auflage (1865), zeigt Neumanns geometrisch anschauliche Auffassungsweise

---

<sup>6)</sup> Neumann hatte allerdings 1863 in Halle eine Vorlesung gehalten, die in die Riemannschen funktionentheoretischen Vorstellungen einführte, war aber dabei nur bis zur Umkehrung der elliptischen Integrale vorgedrungen (vgl. S. V in der 1. Auflage). In einer in demselben Jahre erschienenen Schrift hatte er ohne weitere Begründung Formeln für die Umkehrung der hyperelliptischen Integrale angegeben (Nr. 12).

im glänzendsten Lichte. Hinsichtlich der Bezeichnungsweise ist zu bemerken, daß Neumann in der ersten Auflage überall „stetig“ sagt statt „regulär“, und daß seine „Abelschen Integrale“ hier nach der jetzt üblichen Bezeichnungsweise „hyperelliptische Integrale“ sind. Die zweite Auflage (1884) enthält auch die allgemeinen Abelschen Integrale und die Lösung ihres Umkehrproblems, außerdem, wie schon oben erwähnt wurde, den Beweis der Riemannschen Existenztheoreme. Diese Existenztheoreme, die in der ersten Auflage keine besondere Rolle spielen<sup>7)</sup>, hatte Neumann in einer besonderen, gleichfalls schon 1865 erschienenen Schrift (Nr. 16) auf Grund des Dirichletschen Prinzips behandelt, das dabei seinerseits die axiomatische Voraussetzung bildete.

Um von den eigenen Untersuchungen, die Neumann in die Vorlesungen hineingearbeitet hat, wenigstens etwas zu nennen, möge auf die in der zweiten Auflage behandelte Gleichung

$$f(z) = c$$

aufmerksam gemacht werden. Neumann hat die Abhängigkeit der Wurzel  $z$  dieser Gleichung von der als variabel zu betrachtenden Größe  $c$  untersucht und sich dabei auf die Tatsache gestützt, daß das über die Begrenzung des fraglichen Bereichs erstreckte Integral

$$\int \frac{f'(\zeta) d\zeta}{2\pi i (f(\zeta) - c)},$$

wenn  $f(z)$  in dem Bereich und auf seiner Grenze regulär ist, eine ganze Zahl sein und auf der andern Seite unter gewissen Bedingungen zugleich eine stetige Funktion von  $c$  und deshalb konstant sein muß<sup>8)</sup>.

Wie schon bemerkt wurde, hat sich Neumann vielfach mit Fragen der Mechanik abgegeben. Er hat für den kinematischen Satz, demzufolge ein starrer Körper durch eine Schraubenbewegung aus einer beliebig gegebenen ersten Lage in eine beliebig gegebene zweite Lage übergeführt werden kann, einen rein geometrischen Beweis geliefert (Nr. 36). In seiner Leipziger Antrittsrede (gedruckt 1870, Nr. 42) hat er sich den Grundlagen der Mechanik zugewandt. Neumann formuliert hier das Trägheitsgesetz für zwei Massenpunkte, von denen jeder sich selbst überlassen ist, so, daß zwar der Begriff der Gleichzeitigkeit, nicht aber die Vergleichbarkeit der Zeitstrecken vorausgesetzt ist. Die Zeitmessung läßt sich dann

<sup>7)</sup> Hier hat Neumann einfach vorausgesetzt, daß die entsprechende Zahl unabhängig, überall endlicher Integrale, d. h. unabhängiger Integrale erster Gattung existiert.

<sup>8)</sup> Weierstraß hat dieselbe Aufgabe auf Grund einer Entwicklung des Quotienten  $\frac{f'(z)}{f(z) - c}$  behandelt.

nachträglich auf Grund des Trägheitsgesetzes begründen. Neumann betont dabei besonders die der ganzen Auffassung zugrunde liegende Annahme, daß man sich im Raum ein ruhendes Koordinatensystem, auf das dann alle Bewegungen bezogen werden, denken darf. Wenn allerdings Neumann diese Annahme in die Form kleidet, daß an irgendeiner unbekanntem Stelle des Weltraumes ein unbekannter starrer Körper „Alpha“ *vorhanden ist*, in Beziehung auf den die sich selbst überlassenen Massenpunkte sich im Sinne des Trägheitsgesetzes bewegen, so liegt darin freilich eine gewisse Überspannung eines an sich wichtigen und richtigen Gedankens vor. Neumann ist auch später wieder auf die sogenannte absolute Bewegung und den Körper Alpha zurückgekommen (Nr. 145, 160) und hat sich dabei dann zweckmäßiger ausgedrückt. Bekanntlich können an Stelle der „Galilei-Newtonschen Theorie“, welche von der Möglichkeit der absoluten Bewegung ausgeht, die bereits Huygens geleugnet hat, andere Annahmen treten. Es war aber ein Verdienst, auf die Notwendigkeit einer Annahme hingewiesen zu haben. Die von der absoluten Bewegung absehende Einsteinsche Relativitätstheorie macht gleichfalls Annahmen notwendig, die außerdem noch viel verwickelter sind.

Mehrere Arbeiten Neumanns (Nr. 34, 88, 107, 111), deren älteste in das Jahr 1869 zurückreicht, beschäftigen sich mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen, für das er — natürlich unter naheliegenden Annahmen — in gewissem Sinn Beweise gibt. Seine Betrachtungen haben Ähnlichkeit mit einer in der Mechanik von Sturm angestellten Überlegung, beschränken sich aber auf ganz besondere Fälle, z. B. auf den Fall, in dem der Zwang des Systems durch eine einzige Gleichung zwischen den Koordinaten der  $n$  materiellen Punkte ausgedrückt wird, und auf einen Fall, in dem nur zwei materielle Punkte vorhanden sind.

Dieselbe Auffassung vom Prinzip der virtuellen Verschiebungen, als von etwas, was nicht völlig gesichert erscheint, hat wohl seine Herleitung des Hamiltonschen Prinzips in den „Grundzügen der analytischen Mechanik, insbesondere der Mechanik starrer Körper“ (Nr. 113, I und II) beeinflusst. Das Hamiltonsche Prinzip wird hier nicht aus der Formel hergeleitet, die das d'Alembertsche Prinzip mit Rücksicht auf das Prinzip der virtuellen Verrückungen zum Ausdruck bringt, sondern es werden alle Zwangsbedingungen durch Kräfte ersetzt, und dann alle Teile des Systems wie freie Massenpunkte behandelt. Die Anwendung der Hamiltonschen Formel

$$(3) \quad \int (\delta T + \delta U) dt = 0$$

wird dann durch die Bemerkung möglich gemacht, daß die Kräfte, durch welche die Bedingungsgleichungen ersetzt worden sind, bei den den Bedingungsgleichungen entsprechenden Verschiebungen (Variationen) zu

der Arbeit  $\delta U$  Beiträge leisten, die sich gegenseitig aufheben. Neumann wendet nun diese Auffassung auf Probleme an, bei denen, nach der später von H. Hertz eingeführten Ausdrucksweise, *nichtholonome* Bedingungen vorliegen. Neumann hat es hier zum ersten Male klar ausgesprochen, daß im Falle solcher Bedingungen wohl die wirklich eintretende Bewegung und ebenso in jedem Momente die den Variationsakt darstellende „Übergangsbewegung“, nicht aber die durch das Variieren hervorgebrachte fingierte Bewegung, die mit der wirklichen zu vergleichen ist, den Bedingungen genügt. Trotz dieser Erkenntnis hat freilich Neumann durch die Art, wie er die Differentialgleichungen der rein rollenden Bewegung (ohne Gleiten) aus der Formel (3) herausgerechnet hat, einen logischen Fehler begangen, den er später (Nr. 137, S. 441), nachdem er darauf aufmerksam gemacht worden war, zurückgenommen hat, indem er den Ausdruck  $T$  der lebendigen Kraft des Systems zuerst mit Hilfe der nicht-holonomen Bedingungen vereinfacht und dann erst durch Variieren des vereinfachten Ausdrucks die Variation  $\delta T$  berechnet hatte, was eben aus dem Grunde nicht statthaft ist, daß die fingierte (variierte) Bewegung von anderer Art ist und den nichtholonomen Bedingungsgleichungen nicht entspricht.

Eine sehr elegante kleine Arbeit Neumanns (Nr. 126) befaßt sich mit dem „Ostwaldschen Axiom des Energieumsatzes“ und weist, allerdings unter der Voraussetzung, daß gewisse Größen höherer Ordnung ohne weiteres vernachlässigt werden dürfen, das mechanische Analogon eines Prinzips nach, das sich dem Chemiker aus der Erfahrung seiner Wissenschaft aufgedrängt hatte.

Es muß erwähnt werden, daß Neumann sich auch mit der Mechanik der Flüssigkeiten beschäftigt hat. Sein Werk „Hydrodynamische Untersuchungen“ (Nr. 103) nimmt die Schwierigkeiten zum Ausgangspunkt, die sich der Anwendung des Hamiltonschen Prinzips in den Weg stellen, wenn der von der Flüssigkeit eingenommene Raum ein mehrfach zusammenhängender ist. Neumann gelangt zu dem bemerkenswerten Ergebnis: „Enthält ein starrer Körper in seinem Innern einen mit inkompressibler Flüssigkeit erfüllten Hohlraum, so wird der Körper unter dem Einfluß gegebener äußerer Kräfte nach genau denselben Gesetzen wie ein gewöhnlicher massiver Körper sich bewegen, vorausgesetzt, daß der Hohlraum ein einfach zusammenhängender ist. Ist hingegen dieser Raum ein mehrfach zusammenhängender und die Flüssigkeit zu Anfang innerhalb dieses Raumes in Bewegung gesetzt, so werden die in Rede stehenden Gesetze wesentlich andere sein.“ Es werden in diesem Werke auch verschiedene Fälle der Bewegung von Kugeln in einer inkompressiblen Flüssigkeit behandelt.

Es wurde schon erwähnt, daß Neumanns Habilitationsschrift (Nr. 2) eine Erklärung der magnetischen Drehung der Polarisationssebene des Lichtes versucht. Neumann hat dann im Jahre 1863 seine Untersuchung in einer kleinen Monographie weiter ausgeführt (Nr. 13). Die hier vorausgesetzte Lichttheorie ist, wie nicht anders zu erwarten, die elastische Wellentheorie des Äthers. Eine dem Weberschen Gesetz analoge Annahme über die Wirkung eines elektrischen Stromelements (der Magnet wird in bekannter Weise durch Ströme ersetzt gedacht) auf ein Ätherteilchen führt durch eine mathematische Entwicklung hindurch auf Gleichungen, von denen die Airyschen empirischen Gleichungen einen Spezialfall darstellen. Es ist noch zu erwähnen, daß am Schluß der Schrift zahlenmäßige Vergleiche mit — natürlich von anderen ausgeführten — Beobachtungen angestellt werden.

Von sonstigen physikalischen Schriften, soweit sie nicht die Elektrodynamik betreffen, die eine besondere Besprechung erheischt, möchte ich zunächst eine sehr frühe Arbeit nennen (1860, Nr. 4), welche von der Theorie der Elastizität, ausgehend vom Potentialbegriff, eine neue Begründung geliefert hat. Eine andere Abhandlung ist physikalisch-mineralogischen Inhalts (Nr. 10). Neumann zeigt hier, wie durch Winkelmessungen und durch Messungen des Volumens die thermischen Achsen der Kristalle und die thermischen Dilatationen in den Achsen ermittelt werden können. Eine dritte Abhandlung gehört wieder dem Gebiet der Optik an und entwickelt die Theorie der Doppelbrechung aus zwei Annahmen über die Einwirkung, der die Teilchen des Äthermediums in den Kristallen unterworfen sein sollen (Nr. 40). Zwei weitere Schriften haben hauptsächlich durch ihre Darstellungsweise einen bedeutenden pädagogischen Wert: Die elegante und einfache Herleitung der Gaußschen Sätze über die Haupt- und Brennpunkte eines Linsensystems (Nr. 19), die insofern noch etwas verallgemeinert werden, als eine beliebige Folge optischer Medien angenommen wird, und die „Vorlesungen über die mechanische Theorie der Wärme“ (Nr. 65), die eine ausgezeichnete Zusammenfassung und Verarbeitung der Originalarbeiten von Carnot, Clausius, Mayer, Thomson usw. darstellt und zugleich noch besonders auf den von Franz Neumann in Königsberg gehaltenen Vorlesungen beruht.

Betrachten wir die bis jetzt besprochenen physikalischen Schriften, so ist ersichtlich, daß sich Neumann nicht nur mit der mathematischen Durchführung bestehender physikalischer Theorien abgegeben hat. Er hat auch selbständig nach Hypothesen gesucht, aus denen die Erscheinungen abgeleitet werden können, und die Folgerungen aus den Hypothesen mit experimentellen Tatsachen verglichen. In einem Fall hat er auch auf Grund von experimentellen Untersuchungen seines Vaters gewisse Erscheinungen der Metallreflexion und der totalen Reflexion auf geometrische

Regeln gebracht (Nr. 140); auch die Art, wie er aus den experimentellen Ergebnissen von Thomsen in Kopenhagen die spezifische Energie  $M(k)$  einer Mischung von Wasser mit Schwefelsäurehydrat vom Wassergehalt  $k$  bestimmt hat, ist entschieden bemerkenswert (Nr. 32).

Unter den physikalischen Arbeiten Neumanns nehmen die elektrodynamischen einen besonders großen Raum ein. Er hat sich frühzeitig mit diesem Gebiet beschäftigt und hat z. B. im Jahre 1876 betont (Nr. 71), daß er den kurz vorher von Kirchhoff veröffentlichten Satz, wonach das Gesetz des stationären elektrischen Strömungszustandes sich von einer gekrümmten — leitenden — Fläche auf eine andere, ihr in den kleinsten Teilchen ähnliche ohne weiteres übertragen läßt, bereits im Jahre 1863 entdeckt und in der Zwischenzeit auch in Seminarübungen vorgetragen habe.

Im Jahre 1868 hat Neumann in Tübingen in einer Gratulationsschrift zur 50jährigen Jubelfeier der Universität Bonn eine neue elektrodynamische Theorie entwickelt. Der Grundgedanke ist dabei der, daß für die Wirkung einer elektrischen Masse auf eine andere ein Potential existieren müsse, das nicht allein von der relativen Lage, sondern auch von den Geschwindigkeiten der Massen abhängig, und daß das Hamiltonsche Prinzip auch auf solche Potentiale anwendbar sei. Für das Potential soll die Formel

$$(4) \quad \frac{m m_1}{r} \left( 1 + \frac{1}{c^2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 \right)$$

gelten, in der  $m$  und  $m_1$  die beiden Massen,  $r$  ihren Abstand zur Zeit  $t$  und  $c$  die im Weberschen Gesetz vorkommende Konstante bedeutet (Nr. 26, 27, 29, 94).

Für die Formel (4) wird noch ein Unterbau gegeben, indem sie aus der Vorstellung abgeleitet wird, daß die eine Masse zur Zeit  $t_0$ , zu welcher der Abstand der Massen gleich  $r_0$  ist, ein Potential  $\frac{m m_1}{r_0}$  emittiert, das von der anderen Masse zu einer etwas späteren Zeit rezipiert wird, wobei  $c$  die Geschwindigkeit der „Transmission“ bedeuten soll. Aus dieser Vorstellung, bzw. aus der Formel (4), wird dann das Webersche Gesetz gefolgert<sup>9)</sup>. Neumann hat nachher noch besonders darauf hingewiesen, daß die Geschwindigkeit  $c$  nicht etwa die Lichtgeschwindigkeit ist (Nr. 38). Es ist hier die bemerkenswert neue<sup>10)</sup> Vorstellung eingeführt, daß die Ein-

<sup>9)</sup> Meines Erachtens ist allerdings unter den jetzt gemachten Annahmen die Beziehung zwischen der Kraft, welche die elektrischen Massen aufeinander ausüben, und dem Potential nicht völlig festgelegt; es hat auch Neumann selbst in einer späteren Veröffentlichung (Nr. 38) bemerkt, daß die Begründung der Formel (4) durch die eben erwähnten Vorstellungen als weniger sicher anzusehen sei als die Formel (4) selbst.

<sup>10)</sup> Riemanns eben dahin zielende Vorstellung ist erst später durch Hattendorfs Veröffentlichung bekannt geworden.

wirkung der einen elektrischen Masse auf die andere eine gewisse Zeit brauche, da aber von Wirkungen in den zwischenliegenden Stellen nicht die Rede ist, liegt trotzdem keine Feldtheorie im Sinne der Faraday-Maxwellschen Theorie vor.

Das Webersche Gesetz bildet den roten Faden, der sich durch eine Reihe von Abhandlungen Neumanns hindurchzieht. Bereits in seiner Tübinger Antrittsrede (1865, Nr. 18) hatte Neumann erklärt, daß sich alle Erscheinungen diesem Gesetze auf das Genaueste fügen. Es hatten aber inzwischen Thomson und Tait und später Helmholtz Einwände gegen das Webersche Gesetz in der Richtung erhoben, daß dieses Gesetz dem Prinzip der Erhaltung der Energie widerspreche. Neumann hat in verschiedenen Arbeiten (46, 47, 66, 74) diese Einwände, zu entkräften versucht und ist bei dieser Gelegenheit — auch hinsichtlich des Begriffs der konstanten Magnete, den Neumann im Gegensatz zu Helmholtz als den Gesetzen der Elektrodynamik widersprechend ansieht — in erhebliche Differenzen mit Helmholtz geraten. Im Grunde dürfte die das Webersche Gesetz betreffende Frage gegenwärtig kaum mehr von besonderem Interesse sein, da jetzt in der Elektrodynamik nicht nur das Webersche Gesetz, sondern überhaupt jede Fernwirkungstheorie gegenüber der Feldwirkungsvorstellung — mit oder ohne Relativitätstheorie — als aufgegeben erscheint.

Im Jahre 1873 hat Neumann den ersten Teil eines groß angelegten Werkes: „Die elektrischen Kräfte“ veröffentlicht (Nr. 60). Es sollten die von Ampère, F. Neumann, Weber und Kirchhoff entwickelten Theorien dargelegt und zugleich erweitert werden. Der erste Teil beschäftigt sich nur mit den Theorien von Ampère und F. Neumann, und C. Neumann hat sich dabei hauptsächlich die Aufgabe gestellt, ein elektromotorisches Elementargesetz zu finden, das für geschlossene Ströme das F. Neumannsche Integralgesetz ergibt. Der zweite Teil des Werkes ist erst im Jahre 1898 erschienen (Nr. 135) und beschäftigt sich in Abänderung des ursprünglichen Planes hauptsächlich mit den von Helmholtz in seinen älteren und neueren Arbeiten angestellten Untersuchungen. Neumann setzt hier zuerst gewisse „Grundeigenschaften“ voraus, womit — ähnlich wie bei einem rationellen Aufbau der Mechanik — Annahmen gemacht sind, die unbeweisbar sind, aber doch auf Grund der Erfahrung einigermaßen nahe liegen. Aus diesen Grundeigenschaften wird nun ein elektromotorisches und nachher ein ponderomotorisches Elementargesetz entwickelt, wovon das erste noch sieben, das zweite noch vier vom Abstand der aufeinander einwirkenden Stromelemente abhängige unbekannte Funktionen enthält. Über diese Funktionen wird dann mit Hilfe der beiden F. Neumannschen Integralgesetze, mit Hilfe des Helmholtzschen Prinzips des vollständigen Differentials, des

Prinzips der Gleichheit von Aktion und Reaktion und noch einer anderen Helmholtzschen Annahme das Nähere ermittelt.

Im weiteren Verlauf dieses Teils werden dann die neueren Arbeiten von Helmholtz besprochen und das Helmholtzsche Minimalprinzip behandelt. Man sieht, daß auch der zweite Teil der „elektrischen Kräfte“ im wesentlichen noch auf der Vorstellung der Fernwirkung beruht. Die Tendenz seiner Arbeit hat Neumann am Schluß der Einleitung sehr bescheiden so ausgedrückt: „Wie dem auch sei, — für den weiteren Fortschritt der Wissenschaft dürfte es doch wohl nötig sein, von den bereits durchschrittenen Wegen eine deutliche Anschauung zu haben. Und das vorliegende Werk dürfte vielleicht dazu beitragen, die Erlangung einer solchen deutlichen Anschauung der bisherigen Wege ein wenig zu erleichtern.“ Hinsichtlich des Weberschen Gesetzes hat Neumann in diesem Werke den Standpunkt eingenommen, daß es an und für sich ein unvollständiges sei, das zu seiner Ergänzung noch irgendwelcher akzessorischer Annahmen bedürfe, z. B. einer Annahme über die Art und Weise, wie die auf die elektrische Materie ausgeübten Kräfte auf die ponderable Materie sich übertragen. Das Webersche Gesetz sei daher, eben infolge seiner Unvollständigkeit, ziemlich unangreifbar. Neumann spricht auch die Ansicht aus, daß die durch das Webersche Gesetz dargebotenen Perspektiven früher oder später von neuem aufzunehmen und weiter zu verfolgen seien.

Im Jahre 1896 erschienen Neumanns Untersuchungen über das Prinzip der Fernwirkungen (Nr. 133), welche hierher gehören, da sie sich zwar nicht ausschließlich auf die elektrischen Wirkungen beziehen, jedoch auf diese besondere Rücksicht nehmen. Der Grundgedanke ist der, daß Wirkungen mathematisch diskutiert werden, die sich nach einem anderen Gesetz als nach dem umgekehrten Quadrat der Entfernung bestimmen, wobei aber im allgemeinen daran festgehalten wird, daß, falls es sich um Elektrizität handelt, für ein beliebiges System von Konduktoren ein elektrisches Gleichgewicht möglich ist. Neumann findet, daß die hiermit verträglichen Gesetze in der Form

$$\varphi(r) = A \frac{e^{-\alpha r}}{r} + B \frac{e^{-\beta r}}{r} + C \frac{e^{-\gamma r}}{r} + \dots$$

enthalten sind, wobei  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  positive und die  $A, B, C, \dots$  positive oder negative Konstante, aber von einerlei Vorzeichen bedeuten. Neumann nennt dieses Gesetz das „Exponentialgesetz“.

Während so Neumann in fast allen seinen physikalischen Arbeiten vom Fernwirkungsprinzip ausgegangen war und der Faraday-Maxwellschen Theorie des elektromagnetischen Feldes gegenüber sich ziemlich kritisch verhalten hatte (vgl. z. B. Nr. 134, S. 612), fühlte er sich in höheren Jahren gedrungen, auch diese Theorie einer mathematischen Durcharbeitung zu

unterziehen (Nr. 142, 144). Er hat dabei zugleich sein Augenmerk darauf gerichtet, für besondere Fälle aus der alten und der neuen Theorie solche Folgerungen zu ziehen, die einen wesentlichen Unterschied ergeben, in der Weise, daß dann eine Art von *experimentum crucis* den Entscheid zwischen den Theorien bringen könnte. Er hat die Theorien namentlich auf elektrostatische Probleme, auf solche der magnetischen Verteilung und auf solche der stationären elektromagnetischen Zustände in ruhender Substanz angewendet. In der Elektrostatik hat Neumann einen Unterschied zwischen den Theorien gefunden, wenn ein System von mehreren Körpern etwa von Luft umgeben gedacht ist und das System „ganz oder zum Teil aus Isolatoren besteht“. Mir scheint, daß in diesem Falle das Faradaysche Experiment mit dem Kugelkondensator, das die Abhängigkeit der elektrischen Verteilung von der nichtleitenden Zwischensubstanz dartut, bereits für die neue Theorie entschieden hat. Bei der Untersuchung der stationären Zustände gibt Neumann an, in der Maxwellschen Theorie auf eine zunächst nicht zu beseitigende Schwierigkeit gestoßen zu sein.

Nebenbei mag bemerkt werden, daß Neumann auch verschiedene Werke seines Vaters herausgegeben hat. Franz Neumanns Beiträge zur Kristallonomie sind sogar vom Sohn in eine ganz neue Darstellung gebracht worden (Nr. 170).

Überblicken wir Carl Neumanns außerordentlich reiches wissenschaftliches Lebenswerk, so müssen wir die Vielseitigkeit und den ungeheuren Fleiß bewundern. Er war stets bestrebt, seine Darlegungen möglichst streng und vollständig zu gestalten, was ja auch aus der Ausführlichkeit der Darstellung hervorgeht. Er war aber vor allem ein Meister in der anschaulichen Auffassung und Darstellung der Probleme und Ergebnisse. Obwohl er nicht Geometer im eigentlichen Sinne des Wortes war, hat er sich doch vielfach mit rein geometrischen oder auch kinematischen Aufgaben beschäftigt und dabei überraschende, elegante Lösungen gefunden (Nr. 23, 39, 117, 139, 146, 176). Seine geometrische Erfindungsgabe hat ihn auch z. B. in der Potentialtheorie wundervolle Beispiele entdecken lassen, die ihn nachher in der Bewältigung der allgemeinen Probleme weiter gebracht haben. Zum Teil verdankt Neumann dem Umstand seine Erfolge, daß er sich früh darüber klar geworden ist, wie man spezielle und allgemeine Untersuchungen miteinander verbinden muß. Er hat sich im Vorwort zu seinen Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential deutlich darüber ausgesprochen, indem er sagt: „Denn wer nur mit speziellen Untersuchungen beschäftigt ist, ohne zur rechten Zeit zu allgemeineren und höheren Gesichtspunkten sich zu erheben, wird bald die erforderliche Orientierung verlieren und dem Zufall preisgegeben sein; und wer umgekehrt das Spezielle verschmährt und nur im allgemeinen sich

bewegen will, wird bald die Mittel zum weiteren Fortschritt sich entschwenden sehen, und von unübersteiglichen Schwierigkeiten zu erzählen haben.“

Dieser Grundsatz hat Neumann zu glänzenden Erfolgen geführt; viele werden noch aus seinem Lebenswerk Nutzen ziehen und durch dasselbe zu eigenen Arbeiten angeregt werden.

### Verzeichnis der sämtlichen Schriften<sup>11)</sup>.

(Die selbständig erschienenen sind mit einem \* gekennzeichnet.)

- \*1. 1856. De problemate quodam mechanico, quod ad primam integralium ultra-ellipticorum classem revocatur, Regiomont., Typis Academicis Dalkowskianis (Dissertation).
- \*2. 1858. Explicare tentatur, quomodo fiat, ut lucis planum polarisationis per vires electricas vel magneticas declinetur, Halis Sax., Typis Schmidtianis (Habilitationsschrift).
- 3. 1859. Abdruck von Nr. 1, Journal f. Math. 56, S. 46.
- 4. 1860. Zur Theorie der Elastizität, ebenda 57, S. 281.
- 5. Geometrische Methode, um das Potential der von einer Kugel auf innere oder äußere Punkte ausgeübten Wirkung zu bestimmen, Poggendorffs Ann. der Phys. 109, S. 629.
- 6. 1861. Einfaches Gesetz für die Verteilung der Elektrizität auf einem Ellipsoid, ebenda 113, S. 506.
- \*7. Lösung des allgemeinen Problems über den stationären Temperaturzustand einer homogenen Kugel ohne Hilfe von Reihenentwicklungen, nebst einigen Sätzen zur Theorie der Anziehung. Halle, bei H. W. Schmidt.
- 8. Über die Integration der partiellen Differentialgleichung  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$ , Journal f. Math. 59, S. 335.
- \*9. 1862. Über die Entwicklung einer Funktion mit imaginärem Argument nach den Kugelfunktionen erster und zweiter Art. Halle, H. W. Schmidt.
- 10. Thermische Achsen der Krystalle des ein- und zweigliedrigen Systems, Pogg. Ann. 114, S. 492.
- \*11. Allgemeine Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von irgend zwei nichtkonzentrischen Kugelflächen begrenzt wird. Halle, H. W. Schmidt.
- \*12. 1863. Die Umkehrung der Abelschen Integrale, ebenda, Buchhdlg. d. Waisenhauses.
- \*13. Die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes, ebenda.
- 14. Über das Gleichgewicht der Wärme und das der Elektrizität in einem Körper, welcher von zwei nicht konzentrischen Kugelflächen begrenzt wird, Journal f. Math. 62, S. 36.
- \*15. 1864. Theorie der Elektrizitäts- und Wärmeverteilung in einem Ringe. Halle, Buchhdlg. d. Waisenhauses.

<sup>11)</sup> Herr Ernst Richard Neumann war so freundlich, meine Liste in einigen Punkten zu ergänzen, so daß sie vermutlich jetzt vollständig sein wird.

- \*16. 1865. Das Dirichletsche Prinzip in seiner Anwendung auf die Riemannschen Flächen. Leipzig bei B. G. Teubner.
- \*17. Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale, ebenda (2. Aufl. s. Nr. 105).
- \*18. Der gegenwärtige Standpunkt der mathematischen Physik (Rede). Tübingen, Lauppsche Buchhdlg.
- \*19. 1866. Die Haupt- und Brennpunkte eines Linsensystems. Leipzig, Teubner.
- 20.<sup>12)</sup> Über die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung mit besonderer Rücksicht auf die Probleme der relativen Bewegung, Zeitschr. f. Math. u. Phys. **11**, S. 265.
- \*21. Über die Theorie der Kugelfunktionen (Programm). Tübingen, gedr. bei Laupp.
22. 1867. Kurzer Abriß einer Theorie der Kugelfunktionen und Ultrakugelfunktionen, Schlömilchs Zeitschr. f. Math. u. Phys. **12**, S. 97 (Abdruck von 21).
23. Über den Krümmungsschwerpunkt algebraischer Kurven und Flächen, ebenda S. 172, 425, 426.
- \*24. Theorie der Besselschen Funktionen, ein Analogon zur Theorie der Kugelfunktionen. Leipzig, Teubner.
25. Entwicklung beliebiger Funktionen nach Besselschen Funktionen, Journal f. Math. **67**, S. 310.
- \*26. 1868. Die Prinzipien der Elektrodynamik, eine mathematische Untersuchung (Gratulationsschrift der Univ. Tübingen an die Univ. Bonn). Tübingen, gedr. bei Laupp.
27. Resultate einer Untersuchung über die Prinzipien der Elektrodynamik, Gött. Nachr. S. 223.
28. Sul baricentro di curvatura delle curve algebriche, delle superficie algebriche, Annali di matematica (2), **1**, S. 280, 283 (vgl. Nr. 23).
29. 1868/69. Theoria nova phaenomenis electricis applicanda, ebenda **2**, S. 120.
30. 1869. Über eine Erweiterung desjenigen Satzes der Integralrechnung, welcher die Theorie der Partialbruchzerlegungen zugrunde liegt, Gött. Nachr. S. 9.
31. Untersuchungen über die Bewegung eines Systems starrer Körper, Ber.<sup>13)</sup> **21**, S. 132.
32. Über die mechanische Energie der Schwefelsäure, ebenda S. 213.
33. Über die Entwicklung einer Funktion nach Quadraten und Produkten der Fourier-Besselschen Funktionen, mit 2 Textfiguren, ebenda S. 221.
34. Über den Satz der virtuellen Verrückung, ebenda S. 257.
35. Oszillatorische Entladung einer Franklinschen Tafel, Gött. Nachr. S. 17.
36. Geometrische Untersuchung über die Bewegung eines starren Körpers, Math. Ann. **1**, S. 195.
37. Zur Theorie der Funktionaldeterminanten, ebenda S. 208.
38. Notizen zu einer kürzlich erschienenen Schrift über die Prinzipien der Elektrodynamik, ebenda S. 317.
39. Notiz über das zyklonische Pendel, ebenda S. 507.
40. Über die Ätherbewegung in Krystallen, ebenda S. 335.

<sup>12)</sup> Diese Arbeit war bereits 1862 in einem russischen Journal erschienen (vgl. den Schluß der Abhandlung).

<sup>13)</sup> Die Berichte der Sächsischen Gesellschaft (später Akademie) der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse, sollen kurz mit „Ber.“ angegeben werden.

41. 1870. Nachtrag dazu, ebenda 2, S. 182.
- \*42. Über die Prinzipien der Galilei-Newtonschen Theorie (Leipziger Antrittsrede). Leipzig, Teubner.
43. Zur Theorie des logarithmischen und des Newtonschen Potentials, Ber. 22, S. 49 ff., zweite Mitteilung S. 264 ff.
44. Über Produkte und Quadrate der Besselschen Funktionen (Notiz über die Resultate einer Abhandlung in den Berichten der K. Sächs. Ges. d. Wiss., Jahrg. 1869, S. 221), Math. Ann. 2, S. 192.
45. Zur Theorie des Potentials, ebenda S. 514.
46. 1871. Elektrodynamische Untersuchungen mit besonderer Rücksicht auf das Prinzip der Energie, Ber. 23, S. 386.
47. Über die von Helmholtz in die Theorie der elektrischen Vorgänge eingeführten Prämissen, mit besonderer Rücksicht auf das Prinzip der Energie, ebenda S. 450.
48. Revision einiger allgemeiner Sätze aus der Theorie des logarithmischen Potentials, Math. Ann. 3, S. 325.
49. Abdruck von Nr. 31, ebenda S. 350.
50. Revision einiger allgemeiner Sätze aus der Theorie des Newtonschen Potentials, ebenda S. 424.
51. Abdruck von Nr. 33, ebenda S. 581.
52. Notiz über die elliptischen und hyperelliptischen Integrale, ebenda S. 611.
53. 1872. Über die Elementargesetze der Kräfte elektrodynamischen Ursprungs (in etwas veränderter Form abgedruckt aus den Ber. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. 1872), ebenda 5, S. 602.
54. Vorläufige Konjektur über die Ursachen der thermoelektrischen Ströme, Ber. 24, S. 49.
55. Über das Elementargesetz derjenigen elektromotorischen Kräfte, welche in einem gegebenen Konduktor hervorgebracht werden durch elektrische Ströme, sei es, daß diese Ströme in demselben Konduktor, sei es, daß sie in irgendeinem anderen gegen jenen sich bewegenden Konduktor stattfinden, ebenda S. 144.
56. 1873. Über die den Kräften elektrodynamischen Ursprungs zuzuschreibenden Elementargesetze, Abh.<sup>14)</sup> 10, S. 417.
57. Über gewisse von Helmholtz für die Magnetoinduktion und Voltainduktion aufgestellte Formeln, Math. Ann. 6, S. 342.
58. Notiz zu dem Aufsatz: Über die Elementargesetze der Kräfte elektrodynamischen Ursprungs (5, S. 602), ebenda S. 350.
59. Über die theoretische Behandlung der sogenannten konstanten Magnete, ebenda 6, S. 330.
- \*60. Die elektrischen Kräfte, Darlegung und Erweiterung der von Ampère, F. Neumann, W. Weber und G. Kirchhoff entwickelten mathematischen Theorien. Erster Teil. Leipzig, Teubner.
61. 1874. Über die Helmholtzsche Konstante  $k$ , mit einer Textfigur, Ber. 26, S. 132.
62. Über das von Weber für die elektrischen Kräfte aufgestellte Gesetz, mit drei Textfiguren, Abh. 11, S. 77.

<sup>14)</sup> Die Abhandlungen der Sächsischen Gesellschaft (später Akademie) der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse, sind kurz mit „Abh.“ angegeben. Die Abhandlung Nr. 56 ist auch in dem Nuovo Cimento erschienen.

63. 1875. Das Webersche Gesetz und seine Anwendung auf Gleitstellen, mit zwei Textfiguren, Ber. 27, S. 1.
64. Allgemeine Betrachtungen über das Webersche Gesetz (Auszug aus den Abh. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. 1874, S. 79), Math. Ann. 8, S. 555.
- \*65. Vorlesungen über die mechanische Theorie der Wärme. Leipzig, Teubner.
66. Die Einwände gegen das Webersche Gesetz, Pogg. Ann. 155, S. 211.
67. 1876. Die Anzahl der elektrischen Materien, ebenda 159, S. 301.
68. Das Webersche Gesetz bei Zugrundelegung der unitarischen Anschauungsweise, mit einer Textfigur, Abh. 11, S. 621.
69. Zwei Sätze über korrespondierende Flächenelemente, Ber. 28, S. 253.
70. Über das Ampèresche Gesetz, ebenda S. 256.
71. Über den stationären elektrischen Strömungszustand in einer gekrümmten leitenden Fläche, Math. Ann. 10, S. 569.
72. 1877. Abdruck von Nr. 69, ebenda 11, S. 306.
- 73.<sup>15)</sup> Abdruck von Nr. 70, ebenda S. 309.
- 74.<sup>15)</sup> Über die gegen das Webersche Gesetz erhobenen Einwände, ebenda S. 318.
75. Die Zerlegung und Zusammensetzung der unendlich kleinen Bewegungen eines starren Körpers als Hilfsmittel bei Aufstellung der dynamischen Differentialgleichungen, ebenda S. 379.
76. Abdruck von Nr. 43, ebenda S. 558.
- \*77. Untersuchungen über das Logarithmische und Newtonsche Potential. Leipzig, Teubner.
78. Über die peripolaren Koordinaten, Ber. 29, S. 134.
79. Zur Theorie der konformen Abbildung einer ebenen Fläche auf eine Kreisfläche, ebenda S. 154.
80. 1878. Neue Methode zur Reduktion gewisser Potentialaufgaben, mit drei Textfiguren, ebenda 30, S. 1.
81. Über zwei von Green gegebene Formeln, ebenda S. 10.
82. Über die Zusammensetzung der nach dem Weberschen Gesetz sich ergebenden Beschleunigungen, mit einer Textfigur, ebenda S. 12.
83. Neumanns Untersuchungen über das Logarithmische und Newtonsche Potential (Leipzig 1877), Referat des Verfassers, Math. Ann. 13, S. 255.
84. Abdruck von Nr. 82, ebenda S. 571.
85. Abdruck von Nr. 79, ebenda S. 573.
86. Entwicklung nach Elementarpotentialen, Ber. 30, S. 47.
87. 1879. Abdruck von Nr. 83, Repertorium von Königsberger und Zeuner 2, S. 108.
88. Über das Prinzip der virtuellen oder fakultativen Verrückungen, mit vier Textfiguren, Ber. 31, S. 53.
89. 1880. Die Verteilung der Elektrizität auf eine Kugelkalotte, mit acht Textfiguren, Abh. 12, S. 399.
90. Über die peripolaren Koordinaten, mit sechs Textfiguren, ebenda S. 363.
91. Verallgemeinerung des Bobilewschen Satzes, mit einer Textfigur, Ber. 32, S. 22.
92. Über das Webersche Gesetz, ebenda S. 35.
93. Über die Brechung eines unendlich dünnen regulären Strahlenbündels, mit sechs Textfiguren, ebenda S. 42.

<sup>15)</sup> Titel von Nr. 73: Über die Zuverlässigkeit des Ampèreschen Gesetzes. Nr. 73 u. 74 sind auch separat bei Teubner erschienen.

94. Neue Sätze über das Logarithmische Potential, Math. Ann. **16**, S. 409.  
 95. Neue Sätze über das Newtonsche Potential, ebenda S. 432.  
 96. Abdruck von Nr. 26, ebenda **17**, S. 400.  
 97. 1881. Über die Mehlerschen Kegelfunktionen und deren Anwendung auf elektrostatische Probleme, ebenda **18**, S. 195.  
 \*98. Über die nach Kreis-, Kugel- und Zylinderfunktionen fortschreitenden Entwicklungen, unter durchgängiger Anwendung des du Bois-Reymond'schen Mittelwertsatzes. Leipzig, Teubner.  
 99. Über zwei von G. Cantor und P. du Bois-Reymond über die trigonometrischen Reihen aufgestellte Sätze und deren Übertragung auf solche Reihen, die nach Kugelfunktionen fortschreiten, mit drei Textfiguren, Ber. **33**, S. 1.  
 100. 1883. Fortsetzung und Berichtigung hierzu, ebenda **35**, S. 18.  
 101. Über eine neue und einfache Methode zur Untersuchung der Stetigkeit, respektive Unstetigkeit mehrdeutiger Funktionen, ebenda S. 85.  
 102. Über das Verschwinden der Thetafunktionen, ebenda S. 99.  
 \*103. Hydrodynamische Untersuchungen. Mit einem Anhang über Probleme der Elektrostatik und der magnetischen Induktion. Leipzig, Teubner.  
 104. Über eine gewisse Erweiterung des Cantorschen Satzes, Math. Ann. **22**, S. 406.  
 \*105. 1884. Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale, 2. Aufl., Leipzig, Teubner.  
 106. 1885. Über die rollende Bewegung eines Körpers auf einer gegebenen Horizontalebene unter dem Einfluß der Schwere, mit 2 Textfiguren, Ber. **37**, S. 352.  
 107. 1886. Über eine einfache Methode zur Begründung des Prinzips der virtuellen Verrückungen, ebenda **38**, S. 70.  
 108. Über gewisse partikuläre Integrale der Differentialgleichung  $\Delta F = F$ , insbesondere über die Entwicklung dieser partikulären Integrale nach Kugelfunktionen, ebenda S. 75.  
 109. Ausdehnung der Keplerschen Gesetze auf den Fall, daß die Bewegung auf einer Kugeloberfläche stattfindet, ebenda S. 1.  
 110. Abdruck von 106, Math. Ann. **27**, S. 478.  
 111. Abdruck von 107, ebenda S. 502.  
 112. Über die Kugelfunktionen  $P_n$  und  $Q_n$ , insbesondere über die Entwicklung der Ausdrücke  

$$P_n(\zeta\zeta_1 + \sqrt{1-\zeta^2}\sqrt{1-\zeta_1^2}\cos\Phi) \quad \text{und} \quad Q_n(\zeta\zeta_1 + \sqrt{1-\zeta^2}\sqrt{1-\zeta_1^2}\cos\Phi)$$
nach den Cosinus der Vielfachen von  $\Phi$ . Mit 6 Textfiguren. Sep.<sup>16)</sup>, Abh. **13**, S. 401.  
 113. 1887/88. Grundzüge der analytischen Mechanik, insbesondere der Mechanik starrer Körper. I. Ber. **39**, S. 153, II. mit 5 Textfiguren, ebenda **40**, S. 22.  
 114. Über die Methode des arithmetischen Mittels, I. mit 11 Textfiguren, Abh. **13**, S. 705, II. mit 19 Textfiguren, ebenda **14**, S. 563.  
 115. 1888. Über die Stetigkeit mehrdeutiger Funktionen, Ber. **40**, S. 120.  
 116. Über das Verhalten der Greenschen Funktion an der Grenze ihres Gebietes, ebenda S. 163.

<sup>16)</sup> Sep. bedeutet, daß die Abhandlung separat in dem angegebenen Jahre erschienen ist, während der Band der Abh. ein späteres Erscheinungsjahr trägt.

117. 1889. Über das Malfattische Problem, mit 1 Textfigur, ebenda 41, S. 22.
118. 1890. Neue Sätze über das elektrostatische und über das magnetische Potential, ebenda 42, S. 88.
119. Über einige Fundamentalsätze der Potentialtheorie, ebenda S. 327.
120. 1891. Bemerkungen zur mechanischen Theorie der Wärme, mit 5 Textfiguren, ebenda 43, S. 75.
121. Ein merkwürdiger Satz im Gebiete der Hydrodynamik, ebenda S. 567.
122. Über stationäre elektrische Flächenströme, ebenda S. 571.
123. 1891/92. Einfacher Beweis eines F. Neumannschen Satzes, Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 1, S. 26.
124. 1892. Über einen eigentümlichen Fall elektrodynamischer Induktion, mit 1 Textfigur, Abh. 18, S. 65.
125. Analogien zwischen Hydrodynamik und Elektrodynamik, Ber. 44, S. 86.
126. Das Ostwaldsche Axiom des Energieumsatzes, ebenda S. 184.
- \*127. 1893. Beiträge zu einzelnen Teilen der mathematischen Physik. Leipzig, Teubner.
128. Zur Theorie des Magnetismus, vorläufige Mitteilung, Ber. 45, S. 429.
129. 1894. Über die Bewegung der Wärme in kompressiblen oder auch inkompressiblen Flüssigkeiten, ebenda 46, S. 1.
130. Über das Newtonsche Gesetz, ebenda S. 279.
131. 1895. Über einen Ersatz des Dirichletschen Prinzips für gewisse Fälle, ebenda 47, S. 185.
132. 1896. Über die elektrodynamischen Elementarwirkungen, ebenda 48, S. 221.
- \*133. Allgemeine Untersuchungen über das Newtonsche Prinzip der Fernwirkungen. Leipzig, Teubner.
134. 1897. Die Anwendung des Hamiltonschen Prinzips in der Hydrodynamik und Aërodynamik, Ber. 49, S. 611.
- \*135. 1898. Die elektrischen Kräfte, Darlegung und genauere Betrachtung der von hervorragenden Physikern entwickelten mathematischen Theorien, 2. Teil. Leipzig, Teubner.
136. 1899. Worte zum Gedächtnis an Wilhelm Hankel, Ber. 51, S. LXII.
137. Beiträge zur analytischen Mechanik, ebenda S. 371.
138. 1901. Über die Methode des arithmetischen Mittels, insbesondere über die Vervollkommnungen, welche die betreffenden Poincaréschen Untersuchungen in letzter Zeit durch die Arbeiten von A. Korn und E. R. Neumann erhalten haben. Math. Ann. 54, S. 1.
139. Über eine neue Methode zum Beweise der sogenannten Schließungstheoreme, Ber. 53, S. 319.
140. 1902. Über Metallreflexion und über totale Reflexion, mit 1 Textfigur, ebenda 54, S. 92.
141. Beiträge zur analytischen Mechanik, zweite und dritte Abhandlung, mit 3 Textfiguren, ebenda S. 333.
142. Über die Maxwell-Hertzsche Theorie, mit 3 Textfiguren, Abh. 27, S. 211; zweite Abhandlung, mit 3 Textfiguren, ebenda S. 753.
- 143<sup>17)</sup>. 1903. Über eine gewisse Gattung von Kugelflächen-Integralen, Ber. 55, S. 264.
144. 1904. Über die Maxwell-Hertzsche Theorie, dritte Abhandlung, mit 3 Textfiguren, Abh. 28, S. 75.

<sup>17)</sup> Von dieser Arbeit ist 1904 in *Prace matematyczno-fizyczne* (Warschau) 15, eine Übersetzung erschienen.

145. Über die sogenannte absolute Bewegung, Boltzmann-Festschr. S. 252.
146. Über die Hervorbringung der Kettenlinie durch Biegung einer Kreisfläche, Ber. 56, S. 13.
147. Über Funktionen, die von drei reellen Argumenten abhängen, ebenda S. 5.
148. 1906. Über zwei inkongruente Polyeder, ebenda 58, S. 471.
149. Über das logarithmische Potential, ebenda S. 483.
150. 1907. Über das logarithmische Potential einer gewissen Ovalfläche, ebenda 59, S. 278.
151. 1908. Über das logarithmische Potential einer gewissen Ovalfläche, zweite Abhandlung, ebenda 60, S. 53, dritte Abhandlung, S. 240.
152. Einige Äußerungen C. G. J. Jacobis über die Prinzipien der analytischen Mechanik, ebenda S. 80.
153. Über die Entwicklung der Potenzen der reziproken Entfernung zweier Punkte nach Kugelfunktionen, ebenda S. 269.
154. Nekrolog auf Wilhelm Scheibner, gesprochen in der öffentlichen Gesamtsitzung beider Klassen vom 14. November 1908, ebenda S. 375.
155. 1909. Zur Theorie des logarithmischen Potentials, Aufsatz I, ebenda S. 156.
156. Über das logarithmische Potential einer gewissen Ovalfläche, mit 6 Figuren im Text, Abh. 31, S. 31.
157. Über einige Reihenentwicklungen, die nach Produkten von Kugelfunktionen fortschreiten, Journ. f. Math. 135, S. 157.
158. 1910. Über den Körper Alpha, Ber. 62, S. 69.
159. Zur Theorie des logarithmischen Potentials, Aufsatz II, mit 6 Figuren im Text, ebenda S. 87; Aufsatz III, mit 2 Figuren im Text, S. 278; Aufsatz IV, mit 14 Figuren im Text, S. 307; Aufsatz V (Erweiterung der Dürllschen Methode), S. 368.
160. Nachtrag zu dem Aufsatz über den Körper Alpha, ebenda S. 383.
161. 1911. Zur Theorie des logarithmischen Potentials, Aufsatz VI, ebenda 63, S. 226; Aufsatz VII (Über das Riemannsche Abbildungsproblem), S. 240; Aufsatz VIII (Über die Fourierschen Reihen), mit 2 Figuren im Text, S. 407.
162. 1912. Zur Theorie des logarithmischen Potentials, Aufsatz IX (Über die Fourierschen Reihen), ebenda 64, S. 115; Aufsatz X (Die Kreisbogenaufgabe), mit 3 Figuren im Text, S. 273; Aufsatz XI (Fortsetzung), mit 1 Figur im Text, S. 340.
163. Einige elementare Sätze über periodische Funktionen, ebenda S. 120.
164. 1913. Zur Theorie des logarithmischen Potentials, Aufsatz XII (Integraldarstellung von Funktionen), mit 3 Figuren im Text, ebenda 65, S. 144.
165. Zur Theorie der Fourierschen Reihen, ebenda S. 197.
166. 1914. Über die Dirichletsche Theorie der Fourierschen Reihen, ein Versuch, die Dirichletsche Theorie so umzugestalten, daß sie Auskunft gibt nicht nur über die Gleichwertigkeit zwischen der gegebenen Funktion und der ihr entsprechenden Reihe sowie über die Konvergenz der Reihe, sondern auch über die Gleichmäßigkeit dieser Konvergenz. Sep., Abh. 33, S. 117.
167. 1915. Das allgemeine Cauchysche Theorem

$$F(z^0) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(z) dz}{z - z^0}$$

in seiner Anwendung auf die Kreisbogenaufgabe, mit 2 Figuren im Text, ebenda 66, S. 160.

168. Zur Theorie der Äquipotentialität, Ber. **67**, S. 188.  
169. 1916. Das allgemeine Cauchysche Theorem, ebenda **68**, S. 8.  
170. Franz Neumanns Beiträge zur Krystallonomie aus den Jahren 1823 und 1826, ein Versuch, den wesentlichen Inhalt dieser vor fast 100 Jahren erschienenen fundamentalen Schriften in übersichtlicher und lückenloser Weise darzustellen. Sep., Abh. **33**, S. 195.  
171. 1917. Über die Integralformel der Randwertaufgaben, Ber. **69**, S. 454.  
172. 1919. Über die von Franz Neumann gegebene Begründung des Hauyschen Gesetzes, mit 14 Textfiguren, Ber. **71**, S. 35.  
173. Über die von Franz Neumann im Jahre 1823 gegebene Projektionsmethode, mit 12 Figuren im Text, ebenda S. 313.  
174. 1920. Beiträge zum Studium der Randwertaufgaben, Abh. **35**, S. 369.  
175. 1921. Eine Modifikation der von Dirichlet im Jahre 1829 gegebenen Theorie, Ber. **73**, S. 201.  
176. 1924. Neue Aufgaben und Sätze aus der Geometrie, Zeitschr. f. math. u. naturwiss. Unterricht **55**, S. 85.

(Eingegangen am 26. 1. 1926.)