Über die Gitterpunkte in einem Kreise.

Von

Karl Grandjot in Göttingen.

Neuere Untersuchungen über die Anzahl der Gitterpunkte in einem Kreise haben zu Ergebnissen geführt, die sich unter Benutzung der Bezeichnungen

$$U(n) = \sum_{a^2+b^2=n} 1,$$

$$P(x) = \sum_{0 \leqq n \leqq x} U(n) - \pi x,$$

$$\beta = \frac{1}{3\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U^2(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$$

so aussprechen lassen:

Herr Cramér[1]) bewies für jedes $\varepsilon > 0$

$$\int_0^y P^2(x)\,dx = \beta y^{\frac{3}{2}} + O(y^{\frac{5}{4}+\varepsilon})$$

und Herr Landau[2]) dann sogar

$$\int_0^y P^2(x)\,dx = \beta y^{\frac{3}{2}} + O(y^{1+\varepsilon}).\,^{3)} \tag{1}$$

Das folgende bekannte Verfahren leitet hieraus und allgemeiner aus jeder Beziehung

$$R(y) = \int_0^y P^2(x)\,dx - \beta y^{\frac{3}{2}} = O(y^{\alpha}) \quad \text{mit} \quad \alpha \leqq 3 \tag{2}$$

---

[1]) Über zwei Sätze des Herrn G. H. Hardy, Math. Zeitschr. **15** (1922), S. 201–210.

[2]) Über die Gitterpunkte in einem Kreise, Gött. Nachr. 1924, S. 58–65.

[3]) Daß beide Verfasser nur von 1 an integrieren und daß ihr $P(x)$ sich von meinem um 1 unterscheidet, macht nichts aus, wie man z. B. mit Hilfe von S. 65 der unter [2]) genannten Arbeit sieht.

eine Abschätzung von $P(x)$ her. Aus (2) folgt

$$\int_y^{y+y^{\frac{\alpha}{3}}} P^2(x)\,dx = O\left(y^{\frac{\alpha}{3}} y^{\frac{1}{2}}\right) + O(y^\alpha),$$

also

$$y^{\frac{\alpha}{3}} |P(y)| \leqq \int_y^{y+y^{\frac{\alpha}{3}}} |P(x)|\,dx + \int_y^{y+y^{\frac{\alpha}{3}}} |P(x) - P(y)|\,dx$$

$$\leqq \left(y^{\frac{\alpha}{3}} \int_y^{y+y^{\frac{\alpha}{3}}} P^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + O\int_y^{y+y^{\frac{\alpha}{3}}} (x-y+1)\,x^\varepsilon\,dx$$

$$= O\left(y^{\frac{\alpha}{3}+\frac{1}{4}}\right) + O\left(y^{\frac{2}{3}\alpha}\right) + O\left(y^{\frac{2}{3}\alpha+\varepsilon}\right),$$

$$P(y) = O\left(y^{\frac{1}{4}}\right) + O\left(y^{\frac{\alpha}{3}+\varepsilon}\right).$$

Aus Herrn Landaus Ergebnis folgt so die wohlbekannte Abschätzung

$$P(x) = O(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}).$$

Das schärfere

$$P(x) = O(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon})$$

würde sich aus der Richtigkeit von

$$R(y) = O(y^{\frac{3}{4}+\varepsilon})$$

ergeben. Ich hüte mich aber, diese letztere Vermutung auszusprechen; weshalb, mag man gerade zwischen den folgenden Zeilen lesen.

Ich werde nämlich für die Funktionen

$$P_\varrho(y) = \varrho \int_0^y (y-x)^{\varrho-1} P(x)\,dx \qquad (\varrho \geqq 1 \text{ ganz})$$

mit der Abkürzung

$$\beta_\varrho = \frac{(\varrho\,!)^2}{(2\varrho+3)\,\pi^{2\varrho+2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U^2(n)}{n^{\varrho+\frac{3}{2}}}$$

nicht nur die ungefähr (1) entsprechende (um das ε bessere) Beziehung

$$(3) \qquad R_\varrho(y) = \int_0^y P_\varrho^2(x)\,dx - \beta_\varrho\, y^{\varrho+\frac{3}{2}} = O(y^{\varrho+1})$$

nachweisen, sondern auch

$$(4) \qquad R_\varrho(y) = \Omega(y^{\varrho+1})$$

(d. h. bei passendem von y freiem $K > 0$

$$|R_\varrho(y)| > K\,y^{\varrho+1}$$

für eine Folge ins Unendliche wachsender y).

Der Nachweis von (3) ist entsprechend einfacher als der von (1) bei Herrn Landau, da die bekannten Reihen, welche $P_\varrho(x)$ darstellen, absolut konvergieren; der Beweis von (4) wird dadurch überhaupt erst möglich. Ich benutze im übrigen noch einen Kunstgriff, den Herr Landau in einem ähnlichen Fall verwendet hat.

In der für $x \geqq 0$ gültigen Formel

$$\frac{\pi^\varrho}{\varrho!} P_\varrho(x) = x^{\frac{\varrho+1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(n)}{n^{\frac{\varrho+1}{2}}} J_{\varrho+1}(2\pi\sqrt{nx})$$

konvergiert die Reihe rechter Hand absolut, da für $z > 0$

$$(5) \qquad |J_{\varrho+1}(z)| < c z^{-\frac{1}{2}} \text{ [4]}$$

gilt. Somit erhalte ich

$$\frac{\pi^{2\varrho}}{(\varrho!)^2} P_\varrho^2(x) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{U(m)U(n)}{(mn)^{\frac{\varrho+1}{2}}} x^{\varrho+1} J_{\varrho+1}(2\pi\sqrt{mx}) J_{\varrho+1}(2\pi\sqrt{nx})$$

bei beliebiger Anordnung der Reihenglieder. Zufolge (5) konvergiert diese Reihe auch gleichmäßig auf $0 \leqq x \leqq y$, so daß

$$\frac{\pi^{2\varrho}}{(\varrho!)^2} \int_0^y P_\varrho^2(x)\,dx = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{U(m)U(n)}{(mn)^{\frac{\varrho+1}{2}}} \int_0^y x^{\varrho+1} J_{\varrho+1}(2\pi\sqrt{mx}) J_{\varrho+1}(2\pi\sqrt{nx})\,dx$$

$$(6) \qquad = 2 \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{U(m)U(n)}{(mn)^{\frac{\varrho+1}{2}}} \int_0^{\sqrt{y}} x^{2\varrho+3} J_{\varrho+1}(2\pi x\sqrt{m}) J_{\varrho+1}(2\pi x\sqrt{n})\,dx \text{ [5]}$$

wird. Aus

$$\left| J_{\varrho+1}(z) + \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\varrho\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - c z^{-\frac{3}{2}} \sin\left(z - \frac{\varrho\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right| < c z^{-\frac{5}{2}}$$

für $z > 0$ folgt bei $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $x > 0$, $\omega = -\frac{\varrho\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

$$\left| J_{\varrho+1}(\alpha x) J_{\varrho+1}(\beta x) - \frac{2}{\pi x \sqrt{\alpha\beta}} \cos(\alpha x + \omega) \cos(\beta x + \omega) \right.$$
$$\left. + \frac{c}{x^2\sqrt{\alpha\beta}} \left(\frac{\sin(\alpha x + \omega)\cos(\beta x + \omega)}{\alpha} + \frac{\cos(\alpha x + \omega)\sin(\beta x + \omega)}{\beta} \right) \right|$$
$$< c(\alpha\beta)^{-\frac{1}{2}} x^{-3}.$$

---

[4]) Alle c sind reell und hängen nur von ϱ ab.

[5]) Den Wert dieses Integrals kann man zwar in geschlossener Form durch Besselsche Funktionen ausdrücken; das wird aber umständlich und nützt mir nichts. Bemerkenswert ist höchstens die im Falle $m = n$ verwendbare Beziehung

$$\frac{d}{dz}\left(z^{2\nu}\left(J_{\nu-1}^2(z) + J_\nu^2(z)\right)\right) = (4\nu - 2) z^{2\nu-1} J_{\nu-1}^2(z).$$

Hieraus ergibt sich, wenn beide Konstanten des O nur von ϱ abhängen,

$$\int_0^{\sqrt{y}} x^{2\varrho+3} J_{\varrho+1}(\alpha x) J_{\varrho+1}(\beta x) dx$$

$$= \frac{2}{\pi\sqrt{\alpha\beta}} \int_0^{\sqrt{y}} x^{2\varrho+2} \cos(\alpha x + \omega)\cos(\beta x + \omega) dx$$

$$+ \frac{c}{\sqrt{\alpha\beta}} \int_0^{\sqrt{y}} x^{2\varrho+1} \left(\frac{\sin(\alpha x + \omega)\cos(\beta x + \omega)}{\alpha} + \frac{\cos(\alpha x + \omega)\sin(\beta x + \omega)}{\beta}\right) dx$$

$$+ O\left((\alpha\beta)^{-\frac{1}{2}} y^{\varrho+\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{\alpha\beta}} \int_0^{\sqrt{y}} x^{2\varrho+2} (\cos(\alpha - \beta)x \pm \sin(\alpha + \beta)x) dx$$

$$+ \frac{c}{\sqrt{\alpha\beta}} \int_0^{\sqrt{y}} x^{2\varrho+1} \left(\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)\sin(\alpha - \beta)x \pm \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)\cos(\alpha + \beta)x\right) dx$$

$$+ O\left((\alpha\beta)^{-\frac{1}{2}} y^{\varrho+\frac{1}{2}}\right).$$

Das liefert einerseits

$$\int_0^{\sqrt{y}} x^{2\varrho+3} J_{\varrho+1}^2(\alpha x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi\alpha} \int_0^{\sqrt{y}} x^{2\varrho+2} (1 \pm \sin 2\alpha x) dx + \frac{c}{\alpha^2} \int_0^{\sqrt{y}} x^{2\varrho+1} \cos 2\alpha x\, dx + O(y^{\varrho+\frac{1}{2}})$$

$$= \frac{y^{\varrho+\frac{3}{2}}}{(2\varrho+3)\pi\alpha} \pm \frac{y^{\varrho+1}}{2\pi\alpha^2} \cos 2\alpha\sqrt{y} + O(y^{\varrho+\frac{1}{2}}),$$

andererseits für $\alpha \neq \beta$

$$\int_0^{\sqrt{y}} x^{2\varrho+3} J_{\varrho+1}(\alpha x) J_{\varrho+1}(\beta x)\, dx$$

$$= \frac{y^{\varrho+1}}{\pi\sqrt{\alpha\beta}} \left(\frac{1}{\alpha-\beta} \sin(\alpha - \beta)\sqrt{y} \pm \frac{1}{\alpha+\beta} \cos(\alpha + \beta)\sqrt{y}\right)$$

$$+ O\left((\alpha\beta)^{-\frac{1}{2}} \frac{y^{\varrho+\frac{1}{2}}}{(\alpha-\beta)^2}\right) + O\left((\alpha\beta)^{-\frac{1}{2}} y^{\varrho+\frac{1}{2}}\right).$$

Beides setze ich mit $\alpha = 2\pi\sqrt{m}$, $\beta = 2\pi\sqrt{n}$ in (6) ein und erhalte

$$\frac{\pi^{2\varrho}}{(\varrho!)^2} \int_0^y P_\varrho^2(x)\, dx = 2 \sum_{\substack{m,n=1 \\ m=n}}^{\infty} + 4 \sum_{\substack{m,n=1 \\ m>n}}^{\infty}$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U^2(n)}{n^{\varrho+1}} \left(\frac{y^{\varrho+\frac{3}{2}}}{2(2\varrho+3)\pi^2\sqrt{n}} \pm \frac{y^{\varrho+1}}{8\pi^3 n} \cos 4\pi\sqrt{ny}\right) + O \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U^2(n)}{n^{\frac{5}{2}}}\, y^{\varrho+\frac{1}{2}}$$

$$+ c y^{\varrho+1} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{U(m)}{m^{\frac{\varrho}{2}+\frac{3}{4}}} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{U(n)}{n^{\frac{\varrho}{2}+\frac{3}{4}}} \left(\frac{\sin 2\pi(\sqrt{m}-\sqrt{n})\sqrt{y}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} \pm \frac{\cos 2\pi(\sqrt{m}+\sqrt{n})\sqrt{y}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} \right)$$

$$+ O y^{\varrho+\frac{1}{2}} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{U(m)}{m^{\frac{5}{4}}} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{U(n)}{n^{\frac{5}{4}}} \left(1 + \frac{m}{(m-n)^2}\right),$$

wo alle auftretenden Reihen absolut und auf jeder endlichen y-Strecke gleichmäßig konvergieren:

$$\sum_{n=1}^{m-1} \frac{U(n)}{n^{\frac{\varrho}{2}+\frac{3}{4}}} \frac{1}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} = O \sum_{n=1}^{m-1} n^{-1} \frac{m^{\frac{1}{2}}}{m-n}$$

$$= O \sum_{n<\frac{m}{2}} n^{-1} \frac{m^{\frac{1}{2}}}{m} + O \sum_{\frac{m}{2} \leqq n < m} m^{-1} \frac{m^{\frac{1}{2}}}{m-n} = O(1),$$

$$\sum_{n=1}^{m-1} \frac{U(n)}{n^{\frac{5}{4}}} = O(1),$$

$$\sum_{n=1}^{m-1} \frac{U(n)}{n^{\frac{5}{4}}} \frac{m}{(m-n)^2} = O \sum_{n<\frac{m}{2}} n^{-1} \frac{m}{m^2} + O \sum_{\frac{m}{2} \leqq n < m} m^{-1} \frac{m}{(m-n)^2} = O(1).$$

Schließlich wird

$$\frac{\pi^{2\varrho}}{(\varrho!)^2} \int_0^y P_\varrho^2(x)\,dx = \frac{y^{\varrho+\frac{3}{2}}}{(2\varrho+3)\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U^2(n)}{n^{\varrho+\frac{3}{2}}}$$

$$\pm \frac{y^{\varrho+1}}{4\pi^3} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U^2(n)}{n^{\varrho+2}} \cos 4\pi\sqrt{ny} \right.$$

$$\left. + c \sum_{m=2}^{\infty} \frac{U(m)}{m^{\frac{\varrho}{2}+\frac{3}{4}}} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{U(n)}{n^{\frac{\varrho}{2}+\frac{3}{4}}} \left(\frac{\sin 2\pi(\sqrt{m}-\sqrt{n})\sqrt{y}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} \pm \frac{\cos 2\pi(\sqrt{m}+\sqrt{n})\sqrt{y}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} \right) \right)$$

$$+ O(y^{\varrho+\frac{1}{2}}),$$

wodurch zunächst (3) bewiesen ist. Für den Nachweis von (4) langt z. B. die Angabe eines $H > 0$, so daß der Betrag von

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U^2(n)}{n^{\varrho+2}} \cos 2z\sqrt{n}$$

$$(7) \qquad + c_0 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{U(m)}{m^{\frac{\varrho}{2}+\frac{3}{4}}} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{U(n)}{n^{\frac{\varrho}{2}+\frac{3}{4}}} \left(\frac{\sin(\sqrt{m}-\sqrt{n})z}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} \pm \frac{\cos(\sqrt{m}+\sqrt{n})z}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} \right)$$

durch ein z auf jeder reellen Strecke der Länge H größer als 5 gemacht werden kann. Das tut, so behaupte ich,

$$H=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U^2(n)}{n^3}+c_0\sum_{m=2}^{\infty}\frac{U(m)}{m^{\frac{5}{4}}}\left(\sum_{n=1}^{m-1}\frac{U(n)}{n^{\frac{5}{4}}}+\sum_{\substack{n=1\\ \sqrt{m}-\sqrt{n}\neq 2}}^{m-1}\frac{U(n)}{n^{\frac{5}{4}}}\frac{1}{(\sqrt{m}-\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n}-2)}\right),$$

wo c_0 die Zahl aus (7) ist. Ich zeige zuerst die Konvergenz der letzten Reihe rechts. Wenn $1\leqq n<m$ und g eine ganze Zahl $\neq 4\sqrt{m}$ ist, so gilt

$$|g-4\sqrt{m}|\geqq|\sqrt{16m+1}-4\sqrt{m}|=\frac{1}{\sqrt{16m+1}+4\sqrt{m}}>\frac{1}{9\sqrt{m}};$$

das ergibt

$$|(\sqrt{m}-2)^2-(\sqrt{n})^2|=|m-n+4-4\sqrt{m}|>\frac{1}{9\sqrt{m}}$$

und wegen

$$\sqrt{m}-2+\sqrt{n}<2\sqrt{m} \tag{8}$$

auch

$$|\sqrt{m}-\sqrt{n}-2|>\frac{1}{18m}. \tag{9}$$

In $\sum\limits_{n=1}^{m-1}$ kommen aber höchstens vier Glieder mit $|\sqrt{m}-\sqrt{n}-2|<m^{-\frac{1}{2}}$ vor, da hieraus $|(\sqrt{m}-2)^2-n|<2$ wegen (8) folgt. Ihr Beitrag ist nach (9)

$$O(m^{-\frac{5}{4}+\varepsilon}m)=O(1);$$

die übrigen geben

$$O\sum_{n=1}^{m-1}n^{-\frac{5}{4}+\varepsilon}\frac{m}{m-n}=O\sum_{n<\frac{m}{2}}n^{-\frac{5}{4}+\varepsilon}+O\sum_{\frac{m}{2}\leqq n<m}m^{-\frac{5}{4}+\varepsilon}\frac{m}{m-n}=O(1).$$

Bei $\gamma>0$ ist nun

$$\int_a^{a+H}\cos 2z\,{\cos\atop\sin}\gamma z\,dz=\frac{1}{2}\int_a^{a+H}\left({\cos\atop\sin}(\gamma+2)z+{\cos\atop\sin}(\gamma-2)z\right)dz,$$

also

$$\left|\int_a^{a+H}\cos 2z\,{\cos\atop\sin}\gamma z\,dz\right|<\frac{2}{|\gamma-2|}\quad\text{für}\quad\gamma\neq 2,$$

$$\left|\int_a^{a+H}\cos 2z\sin 2z\,dz\right|<1,$$

$$\left|\int_a^{a+H}\cos^2 2z\,dz-\frac{H}{2}\right|<1.$$

Das ergibt wegen $U(1)=4$

$$\Big|\int_a^{a+H} S(z)\cos 2z\,dz-8H\Big|$$

$$<3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U^2(n)}{n^3}+\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)c_0\sum_{m=2}^{\infty}\frac{U(m)}{m^{\frac{5}{4}}}\Bigg(\sum_{n=1}^{m-1}\frac{U(n)}{n^{\frac{5}{4}}}+\sum_{\substack{n=1\\ \sqrt{m}-\sqrt{n}\neq 2}}^{m-1}\frac{U(n)}{n^{\frac{5}{4}}}\,\frac{1}{(\sqrt{m}-\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n}-2)}\Bigg)=3H,$$

also

$$\int_a^{a+H} S(z)\cos 2z\,dz>5H.$$

Demnach kann auf $a\leqq z\leqq a+H$ nicht überall

$$|S(z)|\leqq 5$$

sein.

Göttingen, 10. Januar 1926.

(Eingegangen am 19. 1. 1926.)