

# Über asymptotische Entwicklungen von Funktionen.

Von

Alfred Haar in Szeged (Ungarn).

## Einleitung.

Zu den Problemen, die man am häufigsten in der mathematischen Analysis begegnet, gehört das Studium des asymptotischen Verhaltens einer Funktion  $f(x)$ , die für hinreichend große Werte der Veränderlichen definiert ist. Formuliert man die Aufgabe in voller Allgemeinheit, so kann es sich nur darum handeln, das asymptotische Verhalten einer vorgelegten Funktion durch das entsprechende Verhalten anderer, einfacherer, Funktionen zu charakterisieren. Ein analoges Problem tritt auf, wenn eine Zahlenfolge  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$  vorgelegt ist, deren allgemeines Glied für große Werte des Zeigers untersucht werden soll. Zur Behandlung dieser letzten Aufgabe dient eine sehr allgemeine und fruchtbare Methode, die von G. Darboux in einer berühmten Abhandlung<sup>1)</sup> ausgearbeitet wurde und vielfach als *Methode von Darboux* bezeichnet wird, obwohl der fundamentale Gedanke schon in älteren Arbeiten, namentlich in Untersuchungen von Laplace, Cauchy und Riemann, aufzufinden ist. Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, ein *analoges Verfahren zur Bestimmung des asymptotischen Verhaltens von Funktionen zu entwickeln, das für Funktionen dasselbe leistet, wie die Darboux'sche Methode für Zahlenfolgen*. In Anlehnung an diese klassischen Untersuchungen gewinne ich eine Methode, die — in gleicher Weise, wie jene für Zahlenfolgen — geeignet ist, in sehr allgemeinen Fällen zur asymptotischen Entwicklung von Funktionen zu führen.

Um den Gedankengang des zu befolgenden Verfahrens mit der Darboux'schen Methode in Verbindung zu setzen, sei kurz an diese erinnert. Mit

<sup>1)</sup> Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en série. Journal de mathématiques pures et appliquées. (3), 4, S. 5–56 und S. 377–416 (1878).

der vorgelegten Zahlenfolge  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$  bilde man ihre erzeugende Funktion:

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n;$$

gelingt es, eine andere Potenzreihe

$$\Phi^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^* z^n$$

mit demselben Konvergenzkreis vom Radius  $r$  anzugeben, die so beschaffen ist, daß die Randfunktion der durch die Differenz  $\Phi(z) - \Phi^*(z)$  dargestellten analytischen Funktion auf dem Konvergenzkreis  $k$ -mal stetig differenzierbar ist, so gilt die Limesgleichung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n n^k (f_n - f_n^*) = 0,$$

die zur gesuchten asymptotischen Entwicklung führt. Der Kern dieser Methode besteht in der Erkenntnis, daß die Singularitäten der erzeugenden Funktion — und zwar diejenigen, die auf dem Konvergenzkreis liegen — charakteristisch für das asymptotische Verhalten der vorgelegten Zahlenfolge sind. Darboux untersucht in der erwähnten Abhandlung in ausführlicher Weise den Fall, in dem  $\Phi(z)$  auf dem Konvergenzkreis nur algebraische Singularitäten besitzt, und macht sodann eine Reihe von höchst bemerkenswerten Anwendungen.

Es liegt nun der Gedanke nahe, wenn statt einer Zahlenfolge  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$  eine Funktion  $f(x)$  der kontinuierlichen Veränderlichen vorgelegt ist, zum Studium ihres Verhaltens für große Werte der Variablen an Stelle der durch die obige Summe definierten erzeugenden Funktion, die durch das Integral

$$\int_0^{\infty} f(x) z^x dx$$

dargestellte Funktion heranzuziehen. Schreibt man — um auf eine bequemere Form zu gelangen —  $e^{-z}$  an Stelle von  $z$ , so erhält man den Ausdruck:

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} f(x) dx$$

und der Grundgedanke der folgenden Untersuchungen besteht darin, daß diese Funktion von  $z$  — bzw. ihre Singularitäten — in gleicher Weise das asymptotische Verhalten von  $f(x)$  bestimmen, wie die obige erzeugende Funktion  $\Phi(z)$  das Verhalten der Zahlenfolge  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ .

Bekanntlich spielt das so erhaltene Integral in verschiedenen Gebieten der Analysis eine wichtige Rolle; es wird als *Laplacesche* (oft auch *Abelsche*) *Transformierte* der Funktion  $f(x)$  bezeichnet; andere Autoren ziehen

die Bezeichnung Determinanten-Funktion vor. Ich erwähne an dieser Stelle nur den schönen Vortrag von Herrn S. Pincherle<sup>2)</sup> auf dem Mathematiker-Kongreß in Rom, in dem auch auf einen Zusammenhang des asymptotischen Verhaltens von  $f(x)$  mit der Laplaceschen Transformierten hingewiesen wird, sowie einen wichtigen Satz des Herrn E. Landau<sup>3)</sup>, der die Konvergenzabszisse des obigen Integrals mit dem asymptotischen Verhalten der Funktion  $f(x)$  in Verbindung bringt. Auch die berühmten Untersuchungen Poincarés über die asymptotischen Entwicklungen der Lösungen linearer Differentialgleichungen machen von der Laplaceschen Transformation Gebrauch, aber in einer Weise, die gänzlich verschieden von unserem Verfahren ist<sup>4)</sup>.

Wir werden vor allem zeigen (§ 1), daß wenn zwei Funktionen  $f(x)$  und  $f^*(x)$  gegeben sind (wir nehmen der Einfachheit halber an, daß sie für alle positiven Werte von  $x$  definiert, stetig und in jedem endlichen Intervall von beschränkter Schwankung sind), die so beschaffen sind, daß die Differenz ihrer Laplaceschen Transformierten

$$\varphi(z) - \varphi^*(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} f(x) dx - \int_0^{\infty} e^{-zx} f^*(x) dx$$

regulär analytisch für alle Werte von  $z$  ist, deren reeller Teil größer als eine reelle Konstante  $a$  ausfällt<sup>5)</sup> und auf der Geraden  $\Re(z) = a$  solche Randwerte besitzt, die  $k$ -mal stetig differenzierbar sind, die Limesgleichung

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-ax} x^k (f(x) - f^*(x)) = 0$$

gilt, falls für das Verhalten von  $\varphi(z) - \varphi^*(z)$  im Unendlichen noch eine

<sup>2)</sup> Alcune spigolature nel campo delle funzioni determinanti. Atti del IV. congresso dei matematici. Roma 1905, S. 44.

<sup>3)</sup> Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen, Sitzungsber. d. bayr. Akad., Math.-phys. Klasse, 36 (1906), S. 151–218.

<sup>4)</sup> Die schönen Untersuchungen von Herrn Hj. Mellin über asymptotische Reihen stehen in näherer Berührung mit der vorliegenden Arbeit, da in diesen ein dem Laplaceschen analoges Integral angewandt wird. Ein prinzipieller Unterschied besteht darin, daß sich Herr Mellin auf analytische Funktionen, die in einem bestimmten Winkel definiert sind, beschränkt. Wir verweisen auf seine zusammenfassende Arbeit: Abriß einer allgemeinen und einheitlichen Theorie der asymptotischen Reihen. Wissenschaftliche Vorträge, gehalten auf dem V. Kongreß der skandinavischen Mathematiker. Helsingfors 1923, S. 1–17. — Die Laplacesche Transformation wurde in den letzten Jahren von den Herren F. Bernstein und G. Doetsch in einer Reihe von interessanten Arbeiten zum Studium gewisser Funktionalgleichungen herangezogen; sie benutzen den Ausdruck Oberfunktion bzw. Unterfunktion für  $f(x)$  bzw.  $\varphi(z)$ .

<sup>5)</sup> Zuzufolge der oben durchgeführten Transformation der unabhängigen Veränderlichen spielen jetzt die Vertikalen die Rolle, die bei der erzeugenden Funktion  $\Phi(z)$  die konzentrischen Kreise hatten.

Zusatzbedingung erfüllt ist, die wir als den *Fourierschen Charakter* dieser Funktion bezeichnen, da sie für die Gültigkeit der sog. Fourierschen Integralformel charakteristisch ist (S. 77).

Dem Vorgange Darboux's entsprechend beschäftigen wir uns sodann (§ 2) mit dem Fall, in dem die Laplacesche Transformierte  $\varphi(z)$  einer Funktion  $f(x)$  so beschaffen ist, daß diejenige singuläre Stelle (bzw. Stellen), deren reeller Teil möglichst groß ist, eine algebraische bzw. logarithmische Singularität ist, im Unendlichen aber die oben erwähnten Zusatzbedingungen erfüllt sind. Wir stellen in diesem Falle die volle asymptotische Entwicklung der Funktion  $f(x)$  auf (S. 85 und 86), und gelangen auf diese Weise zu fertigen Formeln, die in verschiedenen Anwendungen in bequemer und rascher Weise zum Ziele führen.

Die Anwendbarkeit der dargelegten Methode und der erhaltenen Resultate ist eine äußerst mannigfaltige. Es zeigt sich, daß eine große Menge der in der Literatur behandelten asymptotischen Entwicklungen in einfachster Weise sich auf diesem Weg ergeben. Anwendungen auf lineare Differentialgleichungen, auf die Theorie der Gammafunktionen und der Besselschen Funktionen, sowie auf die allgemeine Theorie der Funktionen komplexer Variablen ergeben sich ohne prinzipielle Schwierigkeiten. Ich werde in folgenden Mitteilungen insbesondere Anwendungen auf die Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen vom parabolischen und hyperbolischen Typus darlegen und dabei das alte Problem des „*Endverlaufes*“ in der Theorie der Wärmeleitung behandeln.

Die Anwendungen, die in der vorliegenden Arbeit zusammengestellt sind, verfolgen lediglich den Zweck, die Tragweite und Kraft des dargelegten Verfahrens zu illustrieren. Zu diesem Ende habe ich zunächst zwei altbekannte Beispiele: die asymptotische Entwicklung der Besselschen Funktion (§ 3) und das Laplacesche Problem der Funktionen großer Zahlen, d. h. die asymptotische Entwicklung des durch das Integral

$$\int_0^1 e^{x F(t)} G(t) dt$$

dargestellten Funktion (§ 4) herangezogen. Durch Anwendung der in § 2 aufgestellten Formeln gewinne ich die bekannten Entwicklungen der Theorie der Besselschen Funktionen ohne jede Mühe, für das Laplacesche Problem aber explizite Ausdrücke, die — wie mir scheint — sowohl für theoretische Untersuchungen, wie auch für numerische Rechnungen geeignet sind<sup>6)</sup>.

<sup>6)</sup> Von der ausgedehnten Literatur dieses Problems sei hier nur auf die elegante Behandlung von O. Perron hingewiesen: Über die näherungsweise Berechnung der Funktionen großer Zahlen. Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Math.-phys. Klasse 1917, S. 191—219.

Außer diesen beiden klassischen Aufgaben behandle ich (§ 3) die von Herrn Hardy in einer schönen Arbeit<sup>7)</sup> in Angriff genommene asymptotische Entwicklung der durch die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^s k!}$$

definierten ganzen Funktion, falls  $x$  längs eines Strahles, der im ersten oder vierten Quadranten liegt, ins Unendliche rückt, und zeige, daß die Hardyschen Resultate das erste Glied der von mir gewonnenen Entwicklung bilden, ferner ein Problem der Theorie der Reihenentwicklungen nach Besselschen Funktionen (§ 4), das mit den üblichen Methoden nicht ohne Schwierigkeiten zu behandeln wäre.

Auf die oben erwähnten Anwendungen aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen hoffe ich später zurückzukommen.

### § 1.

#### Laplacesche Transformation und asymptotische Entwicklungen.

1. Wir legen unseren Untersuchungen eine für alle positiven Werte von  $x$  definierte Funktion  $f(x)$  zugrunde, die stetig und in jedem endlichen Intervall von beschränkter Schwankung ist, und betrachten ihre Laplacesche Transformierte

$$(1) \quad \varphi(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} f(x) dx.$$

Wenn dieses Integral für den (der Einfachheit halber reell angenommenen) Wert  $z = \sigma_0$  konvergiert, so konvergiert es bekanntlich für jeden Wert von  $z$ , dessen reeller Teil größer als derjenige von  $\sigma_0$  ist, und zwar ist diese Konvergenz eine gleichmäßige in jedem Winkel  $< \pi$ , mit dem Punkt  $z = \sigma_0$  als Scheitelpunkt, dessen Halbierende zur positiven reellen Achse parallel läuft. Daraus wird in gewohnter Weise geschlossen, daß das Konvergenzgebiet des betrachteten Integrals eine Halbebene ist, in der  $\varphi(z)$  eine reguläre analytische Funktion darstellt.

In dieser Halbebene betrachten wir die Vertikale  $\Re(z) = \sigma > \sigma_0$  und nehmen an, daß die Funktion  $\varphi(z)$  längs dieser Geraden so beschaffen ist, daß das Integral

$$(2) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{(z-\sigma)x} \varphi(z) dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi(\sigma + it) dt$$

<sup>7)</sup> On the zeroes of certain classes of integral Taylor series. London Proc. (2), 2, S. 332–335 und 401–431.

existiert, und zwar gleichmäßig für alle  $x$ , die eine bestimmte Größe  $X$  übersteigen. Dann ist für diese Werte von  $x$

$$(3) \quad f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{zx} \varphi(z) dz.$$

Bei etwas modifizierten Annahmen ist diese Umkehrungsformel — und ähnliche dieser Art — in der Literatur von verschiedenen Autoren aufgestellt und angewandt worden. Schon Herr Pincherle hat in einer bekannten Abhandlung<sup>8)</sup> unter bestimmten Einschränkungen über  $f(x)$  diese Formel abgeleitet; Herr Hamburger<sup>9)</sup> bewies sie sodann unter der Annahme, daß das Integral (1) für  $z = \sigma_0$  absolut konvergiert. Für unsere Zwecke, da es sich eben darum handelt, aus den Eigenschaften der Funktion  $\varphi(z)$  auf diejenige von  $f(x)$  zu schließen, ist es wichtig, daß keine Annahmen über das Verhalten von  $f(x)$  im Unendlichen gemacht werden, statt dessen die gleichmäßige Konvergenz des Integrals (2) verlangt wird.

Um unter dieser Bedingung die Umkehrungsformel abzuleiten, setzen wir zur Abkürzung:

$$F(x) = \int_0^x e^{-\sigma_0 x} f(x) dx;$$

wegen der Konvergenz des Integrals (1) für  $z = \sigma_0$  bleibt  $|F(x)|$  für jeden Wert von  $x$  kleiner als eine feste Zahl. Durch Produktintegration erhält man für  $\Re(z) > \sigma_0$ :

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} e^{-(z-\sigma_0)x} \frac{dF}{dx} dx = (z - \sigma_0) \int_0^{\infty} e^{-(z-\sigma_0)x} F(x) dx,$$

wobei das letzte Integral für die betrachteten Werte von  $z$  absolut konvergiert. Setzen wir noch zur Abkürzung

$$\Phi^*(z) = \frac{\varphi(z)}{z - \sigma_0}, \quad F^*(x) = e^{\sigma_0 x} F(x),$$

so ergibt sich aus

$$(4) \quad \Phi^*(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} F^*(x) dx$$

die Umkehrungsformel<sup>10)</sup>

$$(5) \quad F^*(x) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\omega=\infty} \int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} e^{zx} \Phi^*(z) dz \quad (\sigma > \sigma_0)$$

<sup>8)</sup> Sur les fonctions déterminantes. Annales de l'École Normale Supérieure 22 (1905), S. 1–69.

<sup>9)</sup> Über eine Riemannsche Formel aus der Theorie der Dirichletschen Reihen. Math. Zeitschr. 6 (1920), S. 6.

<sup>10)</sup> Dies ist eben der Fall, den Herr Hamburger in seiner a. a. O. genannten Arbeit behandelt.

als eine unmittelbare Folge des Fourierschen Integrals. In der Tat folgt<sup>11)</sup> wegen der absoluten Konvergenz des Integrals (4) für  $z = \sigma > \sigma_0$

$$e^{-\sigma x} F^*(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\omega=\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma \xi} F^*(\xi) \frac{\sin \omega(\xi-x)}{\xi-x} d\xi$$

an jeder Stelle  $x > 0$  (da  $F^*(x)$  differenzierbar ist). Hieraus ergibt sich durch eine leichte Umformung

$$\begin{aligned} e^{-\sigma x} F^*(x) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\omega=\infty} \int_0^{\omega} e^{-\sigma \xi} F^*(\xi) \left\{ \int_{-\omega}^{\omega} e^{-it(\xi-x)} dt \right\} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\omega=\infty} \int_{-\omega}^{\omega} \left\{ \int_0^{\omega} e^{-\sigma \xi} F^*(\xi) e^{-it(\xi-x)} d\xi \right\} dt, \end{aligned}$$

da die Umkehrung der Integrationsfolgen wegen der angenommenen absoluten Integrabilität des Integranden gestattet ist. Hieraus entnimmt man unmittelbar

$$\begin{aligned} F^*(x) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\omega=\infty} \int_{-\omega}^{\omega} e^{(\sigma+it)x} \left\{ \int_0^{\omega} e^{-(\sigma+it)\xi} F^*(\xi) d\xi \right\} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\omega=\infty} \int_{-\omega}^{\omega} e^{(\sigma+it)x} \Phi^*(\sigma+it) dt, \end{aligned}$$

womit die Formel (5) erwiesen ist. Die so gewonnene Gleichung

$$(5') \quad e^{\sigma_0 x} F(x) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\omega=\infty} \int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} e^{zx} \frac{\varphi(z)}{z-\sigma_0} dz$$

führt nun zu unserer Behauptung durch die folgende Überlegung: Schreibt man zur Abkürzung<sup>12)</sup>:

$$(2^*) \quad f^*(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{(z-\sigma_0)x} \varphi(z) dz,$$

<sup>11)</sup> Vgl. C. Jordan, Cours d'Analyse (3. Aufl.) 2, S. 278.

<sup>12)</sup> Aus den für das Integral (2) gemachten Voraussetzungen folgt nicht nur die Existenz des Integrals

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{(z-\sigma_0)x} \varphi(z) dz = e^{(\sigma-\sigma_0)x} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{(z-\sigma)x} \varphi(z) dz,$$

sondern auch die Tatsache, daß es in jedem endlichen Intervall

$$x_1 \leq x \leq x_2$$

gleichmäßig konvergiert, sobald  $x_1$  und  $x_2$  größer als  $X$  ausfallen.

so folgt — falls  $x_1$  und  $x_2$  größer als  $X$  sind —

$$\int_{x_1}^{x_2} f^*(x) dx = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{(z-\sigma_0)x_2} - e^{(z-\sigma_0)x_1}}{z-\sigma_0} \varphi(z) dz,$$

da die Umkehrung der Integrationsfolgen wegen der angenommenen gleichmäßigen Konvergenz des Integrals (2) für  $x > X$  gestattet ist. Das heißt es ist

$$\int_{x_1}^{x_2} f^*(x) dx = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} e^{-\sigma_0 x} f(x) dx,$$

und wegen der Stetigkeit der Funktionen  $f(x)$  und  $f^*(x)$

$$f^*(x) = e^{-\sigma_0 x} f(x).$$

Hieraus folgt aber mit Rücksicht auf (2\*) unsere Umkehrungsformel

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{zx} \varphi(z) dz.$$

2. Bevor wir weitere Schlüsse aus dieser Umkehrungsformel ziehen, wollen wir zwei Fälle hervorheben, in denen das Integral

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{(z-\sigma)x} \varphi(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi(\sigma+it) dt$$

gleichmäßig in  $x$  konvergent ist, da sie in den folgenden Untersuchungen häufig auftreten werden. Dies findet jedenfalls statt, wenn

a)  $\varphi(\sigma+it)$  bei  $t = \pm\infty$  absolut integabel ist, da sodann für jeden Wert von  $x$

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} e^{itx} \varphi(\sigma+it) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi(\sigma+it)| dt$$

ist, oder wenn

b) die Ableitung  $\varphi'(\sigma+it)$  für  $t = \pm\infty$  absolut integabel und

$$\lim_{t=\pm\infty} \varphi(\sigma+it) = 0$$

ist. In der Tat ist

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} e^{itx} \varphi(\sigma+it) dt \right| &= \left| \frac{e^{it\beta} \varphi(\sigma+i\beta) - e^{it\alpha} \varphi(\sigma+i\alpha)}{ix} - \frac{1}{x} \int_{\alpha}^{\beta} e^{itx} \varphi'(\sigma+it) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{x} \left\{ |\varphi(\sigma+i\beta)| + |\varphi(\sigma+i\alpha)| + \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(\sigma+it)| dt \right\}, \end{aligned}$$

und diese Ungleichung lehrt, daß für alle Werte von  $|x|$ , die oberhalb

einer positiven Grenze liegen, dieses Integral kleiner als eine von  $x$  unabhängige Größe  $\delta$  wird, falls die Grenzen  $\alpha$  und  $\beta$  hinreichend große positive bzw. negative Zahlen bedeuten.

Die gleichmäßige Konvergenz der Integrale von der Form

$$(6) \quad \int_a^\infty e^{itx} \psi(t) dt \quad \text{bzw.} \quad \int_{-\infty}^a e^{itx} \psi(t) dt$$

spielt bekanntlich eine wichtige Rolle, wenn es sich darum handelt, nachzuweisen, ob die Fouriersche Integralformel für die Funktion  $\psi(t)$  gültig ist. Deshalb wollen wir der Kürze halber sagen, daß die Funktion  $\psi(t)$  bei  $t = \infty$  bzw. bei  $t = -\infty$  für alle  $x \geq X$  den Fourierschen Charakter hat, wenn das entsprechende Integral für diese Werte von  $x$  gleichmäßig konvergiert, d. h. wenn man zu jeder noch so kleinen Zahl  $\delta$  eine positive Grenze  $\omega$  derart bestimmen kann, daß für alle  $x \geq X$

$$\left| \int_\alpha^\beta e^{ixt} \psi(t) dt \right| < \delta$$

ausfällt, sobald  $\alpha \geq \omega$  und  $\beta \geq \omega$  bzw.  $\alpha \leq -\omega$  und  $\beta \leq -\omega$  ist<sup>13</sup>).

Beispielsweise hat die Funktion

$$\frac{e^{-it}}{\sigma + it}$$

(wo  $\sigma$  eine reelle Größe bedeutet) sowohl bei  $t = \infty$  als auch bei  $t = -\infty$  für jeden positiven Wert von  $x$  den Fourierschen Charakter; es ist nämlich:

$$\int_\alpha^\beta e^{itx} \frac{e^{-it}}{\sigma + it} dt = \frac{1}{1+x} \left\{ \frac{e^{i\beta(1+x)}}{i(\sigma + i\beta)} - \frac{e^{i\alpha(1+x)}}{i(\sigma + i\alpha)} + \int_\alpha^\beta \frac{e^{it(1+x)}}{(\sigma + it)^2} dt \right\},$$

aus der die erwähnte Gleichmäßigkeit für jedes positive  $x$  unmittelbar folgt.

Aus der gleichmäßigen Konvergenz der Integrale (6) (für  $x \geq X$ ) folgen — in bekannter Weise — die Limesgleichungen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^\infty e^{itx} \psi(t) dt = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^a e^{itx} \psi(t) dt = 0,$$

falls die Funktion  $\psi(t)$  in jedem endlichen Intervall integrabel ist<sup>14</sup>).

3. Entscheidend für die folgenden Entwicklungen ist der Umstand, wie weit nach links in der obigen Umkehrformel die Integrationsgerade

<sup>13</sup>) Die Voraussetzung der Umkehrformel (gleichmäßige Konvergenz des Integrals (2)) besteht in dem Fourierschen Charakter von  $\varphi(\sigma + it)$  bei  $t = \pm \infty$ .

<sup>14</sup>) Um unnötige Komplikationen zu vermeiden, benutzen wir in der vorliegenden Arbeit überall den Lebesgueschen Integralbegriff. Bei Zugrundelegung des Riemanschen Integrals wäre absolute Integrabilität erforderlich.

verschiebbar ist, d. h. die Frage nach der kleinsten reellen Zahl  $a$ , für die die Formel

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zx} \varphi(z) dz$$

noch gilt. Hierzu sei folgendes bemerkt. Sei  $a$  eine reelle Größe  $< \sigma$  von der folgenden Beschaffenheit: Die Funktion  $\varphi(z)$  ist

I. für alle Werte von  $z$ , deren reeller Teil größer als  $a$  ausfällt, regulär analytisch;

II. sie besitzt Randwerte<sup>15)</sup> längs der Geraden  $\Re(z) = a$ , die eine solche Funktion  $\varphi(a+it)$  der Ordinate  $t$  bestimmen, deren Betrag in jedem endlichen Intervall von  $t$  beschränkt und die bei  $t = \pm \infty$  für hinreichend große Werte von  $x$  vom Fourierschen Charakter ist;

III. die Integrale

$$\int_{a+i\omega}^{\sigma+i\omega} e^{zx} \varphi(z) dz \quad \text{und} \quad \int_{a-i\omega}^{\sigma-i\omega} e^{zx} \varphi(z) dz$$

streben (bei hinreichend großen Werten von  $x$ ) gegen Null, falls  $\omega$  über alle Grenzen wächst.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt noch

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zx} \varphi(z) dz = \frac{e^{ax}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi(a+it) dt.$$

In der Tat, wendet man das Cauchysche Theorem auf das Rechteck mit den Ecken<sup>16)</sup>

$$a - i\omega_1, \quad \sigma - i\omega_1, \quad \sigma + i\omega_2, \quad a + i\omega_2$$

<sup>15)</sup> Der Begriff des Randwertes ist dabei wie folgt zu verstehen: Die Funktion  $\varphi(z)$  besitzt an der Stelle  $z_0 = a + it_0$  den Randwert  $A_0$ , wenn man zu jeder positiven Zahl  $\delta$  eine Größe  $\varepsilon$  derart bestimmen kann, daß für jedes  $z$ , dessen reeller Teil größer als  $a$  ist, die Ungleichung

$$|A_0 - \varphi(z)| < \delta$$

eine Folge der Ungleichung

$$|z - z_0| < \varepsilon$$

ist.

<sup>16)</sup> Die Anwendbarkeit des Cauchyschen Theorems im vorliegenden Falle ergibt sich aus folgender Überlegung: Aus der Annahme, daß die Randwerte eine beschränkte Funktion bilden, folgt die Beschränktheit der Funktion  $\varphi(z)$  selbst in dem betrachteten Rechteck. Wendet man daher den Cauchyschen Satz auf das Rechteck mit den Ecken

$$a + \varepsilon - i\omega_1, \quad \sigma - i\omega_1, \quad \sigma + i\omega_2, \quad a + \varepsilon + i\omega_2 \quad (\varepsilon > 0)$$

an (auf dessen Peripherie  $\varphi(z)$  regulär analytisch ist), so erhält man durch den

an, so folgt — da innerhalb des Rechtecks  $\varphi(z)$  regulär analytisch ist —

$$\int_{a-i\omega_1}^{a+i\omega_2} e^{zx} \varphi(z) dz = \int_{\sigma-i\omega_1}^{\sigma+i\omega_2} e^{zx} \varphi(z) dz + \int_{a-i\omega_1}^{\sigma-i\omega_1} e^{zx} \varphi(z) dz + \int_{\sigma+i\omega_2}^{a+i\omega_2} e^{zx} \varphi(z) dz,$$

woraus mit Rücksicht auf die Bedingung III durch den Grenzübergang  $\omega_1 = \infty$  und  $\omega_2 = \infty$  unsere Behauptung folgt.

Erfüllt  $\varphi(z)$  alle oben aufgezählten Bedingungen, so gilt — nach der am Schluß von 2., S. 9 gemachten Bemerkung —

$$\lim_{x=\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itz} \varphi(a+it) dt = 0,$$

d. h. es ist

$$\lim_{x=\infty} e^{-ax} f(x) = 0,$$

und wir gelangen zu dem folgenden Satz, der die Grundlage unserer Untersuchungen bildet:

*Es sei  $f(x)$  eine für alle positiven Werte von  $x$  definierte Funktion, die in jedem endlichen Intervall stetig und von beschränkter Schwankung ist. Wir nehmen ferner an, daß ihre Laplacesche Transformierte*

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} f(x) dx$$

die folgenden Eigenschaften<sup>17)</sup> besitzt:

I. Sie ist für alle Werte von  $z = \sigma + it$ , deren reeller Teil größer als  $a$  ist, regulär analytisch, und es besitzt die Funktion  $\varphi(\sigma + it)$  der reellen Veränderlichen  $t$  bei  $t = \pm \infty$  für hinreichend große Werte von  $x$  den Fourierschen Charakter.

II. Sie besitzt längs der Geraden  $\Re(z) = a$  Randwerte, die eine solche Funktion definieren, deren Betrag in jedem endlichen Intervall beschränkt ist und die bei  $t = \pm \infty$  für hinreichend große  $x$  vom Fourierschen Charakter ist.

III. Die Integrale

$$\int_{a+i\omega}^{\sigma+i\omega} e^{zx} \varphi(z) dz \quad \text{und} \quad \int_{a-i\omega}^{\sigma-i\omega} e^{zx} \varphi(z) dz$$

streben bei hinreichend großen Werten von  $x$  gegen Null, falls  $\omega$  über alle Grenzen wächst.

Grenzübergang  $\varepsilon = 0$  die gewünschte Formel, da wegen der Beschränktheit der auftretenden Funktionen die Limesgleichungen

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{a+\varepsilon-i\omega_1}^{a+\varepsilon+i\omega_2} e^{zx} \varphi(z) dz = \int_{a-i\omega_1}^{a+i\omega_2} e^{zx} \varphi(z) dz, \quad \lim_{\varepsilon=0} \int_{a+\varepsilon+i\omega}^{\sigma+i\omega} e^{zx} \varphi(z) dz = \int_{a+i\omega}^{\sigma+i\omega} e^{zx} \varphi(z) dz$$

gelten.

<sup>17)</sup> Im folgenden werden diese Eigenschaften als Bedingungen I, II, III zitiert.

Unter diesen Bedingungen gilt die Limesgleichung:

$$\lim_{x=\infty} e^{-ax} f(x) = 0.$$

4. Wir nehmen jetzt an, daß die Laplacesche Transformierte  $\varphi(z)$  von  $f(x)$  — außer den in dem vorangehenden Satz aufgestellten Bedingungen I, II, III — noch der weiteren Bedingung unterworfen ist, daß die Randfunktion  $\varphi(a+it)$   $n$ -mal differenzierbar ist, die so gewonnenen Funktionen:

$$\varphi(a+it), \quad \varphi'(a+it), \quad \varphi''(a+it), \quad \dots, \quad \varphi^{(n-1)}(a+it)$$

für  $t = \pm \infty$  den Grenzwert Null haben und  $\varphi^{(n)}(a+it)$  in jedem endlichen Intervall der Variablen  $t$  integrabel, bei  $t = \pm \infty$  aber für hinreichend große Werte von  $x$  vom Fourierschen Charakter ist<sup>18)</sup>.

Unter diesen Bedingungen gilt die schärfere asymptotische Formel:

$$\lim_{x=\infty} x^n e^{-ax} f(x) = 0,$$

denn es ist bei den gemachten Annahmen

$$\begin{aligned} e^{-ax} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi(a+it) dt = -\frac{1}{2\pi x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi'(a+it) dt \\ &= \frac{1}{2\pi x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi''(a+it) dt = \dots = \frac{(-1)^n}{2\pi x^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi^{(n)}(a+it) dt, \end{aligned}$$

woraus nach der am Schluß von 2. (S. 77) gemachten Bemerkung unsere Behauptung unmittelbar folgt.

Es sei noch bemerkt, daß die dargelegte Methode anwendbar bleibt, wenn die vorgelegte Funktion nicht für alle positiven Werte von  $x$ , sondern nur für solche definiert ist, die größer als eine untere Grenze  $X$  sind. Wenn man nämlich  $f(x)$  für  $x \leq X$  gleich Null setzt und das asymptotische Verhalten der so erhaltenen Funktion nach der vorangehenden Methode untersucht, so handelt es sich um das Studium der Funktion

$$\varphi(z) = \int_X^{\infty} e^{-zx} f(x) dx.$$

Wir werden sogar sehen, daß selbst in Fällen, wo die Funktion  $f(x)$  für alle positiven  $x$  definiert ist, häufig zweckmäßig ist, statt des ursprünglichen Integrals (1) auf dieses letzte Integral zurückzugreifen, was ja da-

<sup>18)</sup> Man beachte, daß aus dem Umstande, daß die  $n$ -te Ableitung  $\varphi^{(n)}(a+it)$  bei  $t = \pm \infty$  den Fourierschen Charakter besitzt und die Ableitungen  $\varphi(a+it)$ ,  $\varphi'(a+it)$ ,  $\dots$ ,  $\varphi^{(n-1)}(a+it)$  für  $t = \pm \infty$  gegen Null streben, der Fouriersche Charakter von  $\varphi^{(n-1)}(a+it)$ ,  $\varphi^{(n-2)}(a+it)$ ,  $\dots$ ,  $\varphi(a+it)$  bewiesen werden kann.

mit gleichbedeutend ist, statt des asymptotischen Verhaltens von  $f(x)$  das Verhalten derjenigen Funktion zu studieren, die für  $x \leq X$  verschwindet, für  $x > X$  aber mit  $f(x)$  übereinstimmt.

## § 2.

**Die einfachsten Singularitäten der Laplaceschen Transformierten.**

5. Die vorangehenden Untersuchungen zeigen den Zusammenhang zwischen dem asymptotischen Verhalten einer Funktion und den funktionentheoretischen Eigenschaften ihrer Laplaceschen Transformierten in voller Analogie mit der sogenannten Darboux'schen Methode, die das asymptotische Verhalten einer Zahlenfolge  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$  mit den funktionentheoretischen Eigenschaften ihrer erzeugenden Funktion  $\sum f_n z^n$  in Verbindung setzt. Wie bei der Anwendung der Darboux'schen Methode der erste Schritt die Bestimmung des Konvergenzkreises der erzeugenden Funktion ist, so wird im folgenden der erste Schritt die Bestimmung der unteren Grenze  $a$  derjenigen Abszissen sein, für die die Laplacesche Transformierte die Bedingungen I und III unseres Satzes S. 79 erfüllt. Obwohl auf dieser Grenzgeraden keine singulären Stellen der Funktion  $\varphi(z)$  liegen müssen, so werden in den folgenden Anwendungen dennoch hauptsächlich solche Fälle auftreten, wo das Verhalten der Laplaceschen Transformierten im Unendlichen keine wesentlichen Schwierigkeiten bietet und die Grenzgerade  $\Re(z) = a$  einfach dadurch bestimmt ist, daß auf ihr singuläre Punkte von  $\varphi(z)$  von einfachem Charakter liegen. Dies führt auf die Frage, das asymptotische Verhalten von  $f(x)$  zu bestimmen, falls  $\varphi(z)$  auf der erwähnten Grenzgeraden singuläre Stellen vom algebraischen Charakter (in endlicher Anzahl) aufweist, im Unendlichen aber alle aufgestellten Forderungen erfüllt. Dieses Vorgehen entspricht genau dem, was Darboux in seiner berühmten Abhandlung unternommen hat, und wir gelangen zu dem folgenden Satz:

*Die Funktion*

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} f(x) dx$$

*erfülle für  $\Re(z) > a$  die Bedingungen I und III unseres Satzes S. 79; auf der Geraden  $\Re(z) = a$  selbst gestatte die Funktion  $\varphi(z)$  bzw. ihre Randwerte die folgende Zerlegung:*

$$\varphi(z) = \frac{1}{(z - z_0)^e} + \psi(z) \quad (z = a + it),$$

*wobei  $z_0 = a + it_0$  ein Punkt der Geraden ist, die Funktion  $\psi(a + it)$  aber eine  $n$ -mal differenzierbare Funktion von  $t$  bedeutet von der Be-*

*schaffenheit, daß  $|\psi^{(n)}(a+it)|$  in jedem endlichen Intervall von  $t$  beschränkt ist; die Ableitungen*

$$\varphi(a+it), \varphi'(a+it), \dots, \varphi^{(n-1)}(a+it)$$

*mögen für  $t = \pm \infty$  den Grenzwert Null haben, und schließlich besitze  $\varphi^{(n)}(a+it)$  bei  $t = \pm \infty$  für hinreichend große  $x$  den Fourierschen Charakter.*

*Unter diesen Bedingungen gilt die asymptotische Formel:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-\alpha x} \left[ f(x) - \frac{1}{\Gamma(\varrho)} e^{z_0 x} x^{\varrho-1} \right] = 0;$$

*$\varrho$  bedeutet hierbei eine beliebige reelle oder komplexe Größe, die weder Null noch eine negative ganze Zahl ist.*

Wir beweisen diesen Satz, indem wir zeigen werden, daß die Laplace'sche Transformierte  $\Phi(z)$  der Funktion

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\varrho)} e^{z_0 x} x^{\varrho-1}$$

für  $\Re(z) > a$  die erwähnten Bedingungen I und III erfüllt, daß sie eine Zerlegung von der Form

$$\Phi(z) = \frac{1}{(z-z_0)^\varrho} + \Psi(z)$$

gestattet, wo  $\Psi(z)$  eine ganze transzendente Funktion ist, und schließlich daß  $\Phi(z)$  und alle Ableitungen  $\Phi^{(n)}(z)$  auf der Geraden  $\Re(z) = a$  bei  $t = \pm \infty$  den Fourierschen Charakter besitzen und gegen Null streben, wenn  $t$  über alle Grenzen wächst.

Auf Grund dieser Tatsache ergibt sich nämlich die obige Behauptung, wenn man den Satz S. 80 auf die Funktion

$$f(x) - \frac{1}{\Gamma(\varrho)} e^{z_0 x} x^{\varrho-1}$$

anwendet, deren Laplace'sche Transformierte

$$\varphi(z) - \Phi(z) = \psi(z) - \Psi(z)$$

alle Bedingungen jenes Theorems erfüllt.

Wenn der reelle Teil von  $\varrho$  positiv ist, so ist unsere Behauptung eine unmittelbare Folge der fundamentalen Formel der Theorie der  $\Gamma$ -Funktionen

$$(7) \quad \Phi(z) = \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \int_0^\infty e^{-zx} e^{z_0 x} x^{\varrho-1} dx = \frac{1}{(z-z_0)^\varrho}.$$

Die Funktion  $\Psi(z)$  ist also identisch Null und der Fouriersche Charakter von  $\Phi(z)$  und ihrer Ableitungen ist eine Folge (nach einer S. 76 gemachten Bemerkung) des Umstandes, daß die Integrale

$$\int_{a+i\omega}^{a+i\infty} |\Phi^{(n)}(z)| dz \quad \text{bzw.} \quad \int_{a-i\infty}^{a-i\omega} |\Phi^{(n)}(z)| dz \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

absolut konvergieren, wenn  $-\omega < t_0 < \omega$  ist.

Eine etwas umständlichere Diskussion erfordert der Fall, wo  $\Re(\varrho) < 0$  ausfällt.

In diesem Falle betrachten wir die Laplacesche Transformierte der Funktion  $\frac{1}{\Gamma(\varrho)} e^{z_0 x} x^{\varrho-1}$  zwischen den Grenzen 1 und  $\infty$ , also

$$(8) \quad \Phi(z) = \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \int_1^{\infty} e^{-(z-z_0)x} x^{\varrho-1} dx \quad \Re(z) > \Re(z_0) = a.$$

Auch dieses Integral wird in der Theorie der  $\Gamma$ -Funktionen vielfach behandelt. Durch zweimalige Produktintegration ergibt sich zunächst

$$(8') \quad \Phi(z) = \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \left\{ \frac{e^{-(z-z_0)}}{z-z_0} + (\varrho-1) \frac{e^{-(z-z_0)}}{(z-z_0)^2} + \frac{(\varrho-1)(\varrho-2)}{(z-z_0)^3} \int_1^{\infty} e^{-(z-z_0)x} x^{\varrho-3} dx \right\},$$

woraus man unmittelbar erkennt, daß die Bedingungen I und III erfüllt sind, da für  $z = \sigma + it$ ,  $\sigma > a = \Re(z_0)$  das erste Glied in dieser Summe nach der Bemerkung S. 77 bei  $t = \pm \infty$  den Fourierschen Charakter besitzt, die beiden andern Glieder aber absolut integrable Funktionen von  $t$  (im Intervall  $-\infty < t < \infty$ ) darstellen.

Man überzeugt sich ferner durch eine einfache Überlegung, daß für jeden Wert von  $z_0$ , der von  $z$  verschieden ist

$$\Phi(z) = \frac{1}{\Gamma(\varrho)(z-z_0)^\varrho} \left\{ \int_{z-z_0}^1 e^{-x} x^{\varrho-1} dx + \int_1^{\infty} e^{-x} x^{\varrho-1} dx \right\}$$

ist, wobei das erste Integral längs eines Weges zu nehmen ist, der die negative reelle Achse nicht trifft. Für reelle positive Werte von  $z - z_0$  folgt diese Relation aus der Definition von  $\Phi(z)$ , wenn man in dem Integral (8) die neue Integrationsvariable  $(z - z_0)x$  einführt; für andere Werte von  $(z - z_0)$  aus dem Umstande, daß in der längs der reellen

negativen Achse aufgeschnittenen Ebene  $e^{-z} z^{\varrho-1}$  eine reguläre analytische Funktion darstellt<sup>19)</sup>. Beachtet man noch, daß

$$\int_{z-z_0}^1 e^{-x} x^{\varrho-1} dx = \int_{z-z_0}^1 \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{x^{\nu+\varrho-1}}{\nu!} dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{1-(z-z_0)^{\nu+\varrho}}{\nu! (\nu+\varrho)}$$

ist, so ergibt sich in Anbetracht der bekannten Formel<sup>20)</sup>

$$\Gamma(\varrho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{1}{\nu! (\nu+\varrho)} + \int_1^{\infty} e^{-x} x^{\varrho-1} dx$$

( $\varrho$  keine negative ganze Zahl) die Relation

$$(9) \quad \Phi(z) = \frac{1}{(z-z_0)^{\varrho}} - \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{(z-z_0)^{\nu}}{\nu! (\nu+\varrho)} = \frac{1}{(z-z_0)^{\varrho}} + \Psi(z),$$

in der die unendliche Summe tatsächlich eine ganze Funktion von  $z$  darstellt.

Um schließlich das Verhalten von  $\Phi(z)$  auf der Geraden  $\Re(z) = a$  zu untersuchen, bemerke man, daß das Integral (8) wegen  $\Re(\varrho) \leq 0$  auch noch für die Werte  $z = a + it$  absolut konvergiert; daraus folgt nach einem bekannten Satze, der die Übertragung des Abelschen Satzes über Potenzreihen auf die Laplaceschen Integrale ist, die Relation

$$\Phi(a + it) = \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \int_1^{\infty} e^{-i(t-t_0)x} x^{\varrho-1} dx,$$

aus der man durch wiederholte Produktintegration die folgende Formel gewinnt:

$$\begin{aligned} \Gamma(\varrho) \Phi(a + it) &= \left[ \frac{e^{-i(t-t_0)}}{i(t-t_0)} + (\varrho-1) \frac{e^{-i(t-t_0)}}{(i(t-t_0))^2} \right. \\ &+ (\varrho-1)(\varrho-2) \frac{e^{-i(t-t_0)}}{(i(t-t_0))^3} + \dots + (\varrho-1)(\varrho-2) \dots (\varrho-n) \frac{e^{-i(t-t_0)}}{(i(t-t_0))^{n+1}} \left. \right] \\ &+ \frac{(\varrho-1)(\varrho-2) \dots (\varrho-n-1)}{(i(t-t_0))^{n+1}} \int_1^{\infty} e^{-i(t-t_0)x} x^{\varrho-n-2} dx. \end{aligned}$$

Bilden wir nun die  $n$ -te Ableitung  $\Phi^{(n)}(a + it)$ , so erkennt man, daß

<sup>19)</sup> Die rechte Seite der letzten Gleichung stellt nämlich eine solche Funktion dar, die eindeutig regulär analytisch ist, falls  $z - z_0$  nicht gleich einer negativen reellen Zahl oder Null ist und die mit der ebenfalls analytischen Funktion  $\Phi(z)$  übereinstimmt, falls  $z - z_0$  gleich einer positiven reellen Zahl ist; daraus folgt die Übereinstimmung beider Funktionen.

<sup>20)</sup> Vgl. etwa N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktionen, S. 143.

die eckige Klammer in der obigen Darstellung durch  $n$ -malige Differentiation in eine Summe von der Form

$$\sum_{\nu=1}^{2n+1} \alpha_{\nu} \frac{e^{-i(t-t_0)}}{(t-t_0)^{\nu}}$$

übergeht, wobei die  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n+1}$  Konstante bedeuten; dieser Ausdruck hat nach der S. 76 und 77 gemachten Bemerkung bei  $t = \pm \infty$  (für hinreichend große  $x$ ) den Fourierschen Charakter. Die  $n$ -te Ableitung des zweiten Gliedes in der obigen Darstellung von  $\Phi(a+it)$  hat die Form

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{\beta_{\nu}}{(t-t_0)^{n+\nu}} \int_1^{\infty} e^{-i(t-t_0)x} x e^{-\nu-1} dx,$$

da die Ableitungen des Integrals wegen der gleichmäßigen Konvergenz sämtlicher auftretenden Integrale durch Differentiation des Integranden gewonnen werden. Alle Integrale in diesem Ausdruck sind dem Betrage nach unterhalb einer von  $t$  unabhängigen Grenze; daraus folgt die absolute Integrabilität im Unendlichen der durch diese Summe dargestellten Funktion, also ihr Fourierscher Charakter bei  $t = \pm \infty$ .

Es zeigen auch die entwickelten Formeln die Konvergenz der Ableitungen  $\Phi^{(n)}(a+it)$  gegen Null, falls  $t$  über alle Grenzen wächst. Damit ist unsere Behauptung in allen Teilen bewiesen.

In derselben Weise ergibt sich der etwas allgemeinere Satz, daß wenn die Laplacesche Transformierte  $\varphi(z)$  der betrachteten Funktion  $f(x)$  für  $\Re(z) > a$  die Bedingungen des vorangehenden Satzes erfüllt, auf der Geraden  $\Re(z) = a$  aber in der folgenden Form darstellbar ist:

$$\varphi(z) = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{a_{\kappa}}{(z-z_{\kappa})^{q_{\kappa}}} + \psi(z),$$

wobei  $z_{\kappa} = a + it_{\kappa}$  Punkte dieser Geraden, die Exponenten  $q_{\kappa}$  aber weder Null noch negative ganze Zahlen sind, wenn ferner die  $n$ -te Ableitung  $\varphi^{(n)}(a+it)$  in jedem endlichen Intervall von  $t$  vom beschränkten Betrage ist, die Funktionen

$$\varphi(a+it), \varphi'(a+it), \dots, \varphi^{(n-1)}(a+it)$$

für  $t = \pm \infty$  den Grenzwert Null haben und schließlich  $\varphi^{(n)}(a+it)$  bei  $t = \pm \infty$  den Fourierschen Charakter besitzt, so besteht die folgende asymptotische Formel:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-\alpha x} \left[ f(x) - \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{a_{\kappa}}{\Gamma(q_{\kappa})} e^{z_{\kappa} x} x^{q_{\kappa}-1} \right] = 0.$$

6. Der wesentliche Punkt der vorangehenden Untersuchungen ist die Diskussion des analytischen Charakters der Laplaceschen Transformierten der Funktion  $e^{z_0 x} x^{\rho-1}$ , falls  $\rho$  nicht Null und keine negative ganze Zahl ist. Wir wollen jetzt diese ausgeschlossenen Fälle untersuchen und annehmen, daß  $\rho = -k$  eine negative ganze Zahl oder Null ist. Dies führt zur Behandlung der Funktion:

$$\Phi(z) = \int_1^{\infty} e^{-zx} e^{z_0 x} x^{-k-1} dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Durch wiederholte partielle Integration erhält man — ähnlich wie im vorangehenden Falle — die Formel:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{e^{-(z-z_0)}}{z-z_0} - (k+1) \frac{e^{-(z-z_0)}}{(z-z_0)^2} + (k+1)(k+2) \frac{e^{-(z-z_0)}}{(z-z_0)^3} \\ &\quad - + \dots + (-1)^n (k+1)(k+2) \dots (k+n) \frac{e^{-(z-z_0)}}{(z-z_0)^{n+1}} \\ &\quad - (-1)^n \frac{(k+1)(k+2) \dots (k+n+1)}{(z-z_0)^{n+1}} \int_1^{\infty} e^{-(z-z_0)x} x^{-k-n-2} dx, \end{aligned}$$

aus der man, wie oben, erkennt, daß  $\Phi(z)$  alle Forderungen, die für das Verhalten im Unendlichen gestellt sind, erfüllt, sowohl für  $\Re(z) > \Re(z_0) = a$ , wie auch längs der Geraden  $\Re(z) = a$ . Wiederum gilt die Darstellung

$$\Phi(z) = (z-z_0)^k \left\{ \int_{z-z_0}^1 e^{-x} x^{-k-1} dx + \int_1^{\infty} e^{-x} x^{-k-1} dx \right\} dx$$

(wobei der Integrationsweg wie oben zu wählen ist), aus der man mit Rücksicht auf die Relation

$$\int_{z-z_0}^1 e^{-x} x^{-k-1} dx = \sum'_{(\nu)} (-1)^{\nu} \frac{1-(z-z_0)^{\nu-k}}{\nu! (\nu-k)} + \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \log(z-z_0),$$

in der die Summe auf alle ganzzahligen Werte von  $\nu$  mit Ausnahme von  $\nu = k$  zu erstrecken ist, erkennt, daß  $\Phi(z)$  eine Zerlegung von der Form:

$$\Phi(z) = (-1)^{k+1} \frac{(z-z_0)^k}{k!} \log(z-z_0) + \Psi(z)$$

gestattet, in der  $\Psi(z)$  eine ganze transzendente Funktion ist. Durch eine wörtliche Übertragung des Beweisganges, der auf den Satz S. 81 dieses Abschnittes führte, gelangt man aus dieser Zerlegung zu dem folgenden Resultat:

Die Laplacesche Transformierte  $\varphi(z)$  der Funktion  $f(x)$  erfülle die Bedingungen I und III (S. 79) für  $\Re(z) > a$ ; auf der Geraden  $\Re(z) = a$  gestatte  $\varphi(z)$  bzw. ihre Randwerte die Zerlegung:

$$\varphi(z) = (z-z_0)^k \log(z-z_0) + \psi(z) \quad (z_0 = a + it_0),$$

wobei  $k$  eine positive ganze Zahl oder Null bedeutet und die Funktion  $\varphi(a+it)$  von  $t$  so beschaffen ist, daß ihre  $n$ -te Ableitung  $\varphi^{(n)}(a+it)$  dem Betrage nach in jedem endlichen Intervall beschränkt bleibt; es mögen die Funktionen

$$\varphi(a+it), \varphi'(a+it), \dots, \varphi^{(n-1)}(a+it)$$

für  $t = \pm \infty$  den Grenzwert Null haben und  $\varphi^{(n)}(a+it)$  bei  $t = \pm \infty$  den Fourierschen Charakter (für hinreichend große  $x$ ) besitzen. Unter diesen Bedingungen gilt die asymptotische Formel:

$$\lim_{x=\infty} x^n e^{-ax} [f(x) + (-1)^k k! e^{z_0 x} x^{-k-1}] = 0.$$

7. Durch diesen Satz erhält man den asymptotischen Charakter der Funktion  $f(x)$ , falls ihre Laplacesche Transformierte in einem Punkte der kritischen Geraden eine logarithmische Singularität aufweist, im Unendlichen aber alle gestellten Forderungen erfüllt. Es liegt nun nahe, noch den allgemeinen Fall zu untersuchen, daß  $\varphi(z)$  längs der Geraden  $\Re(z) = a$  eine Zerlegung

$$\varphi(z) = \frac{\log(z-z_0)}{(z-z_0)^\varrho} + \psi(z)$$

gestattet, wobei  $\varrho$  keine negative ganze Zahl bedeutet,  $|\psi^{(n)}(a+it)|$  wiederum in jedem endlichen Intervall von  $t$  beschränkt bleibt, und  $\varphi(z)$  für  $\Re(z) > a$  die Bedingungen I und III, für  $\Re(z) = a$  aber — wie in den vorangehenden Fällen — die Bedingungen erfüllt, daß

$$\lim_{t=\pm\infty} \varphi^{(v)}(a+it) = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, n-1)$$

ist und  $\varphi^{(n)}(a+it)$  bei  $t = \pm \infty$  den Fourierschen Charakter besitzt. Man zeigt unschwer, daß unter diesen Bedingungen:

$$\lim_{x=\infty} x^n e^{-ax} \left[ f(x) + \frac{1}{\Gamma(\varrho)} e^{z_0 x} x^{\varrho-1} \left( \log x - \frac{\Gamma'(\varrho)}{\Gamma(\varrho)} \right) \right] = 0$$

ist.

In der Tat, ist der reelle Teil von  $\varrho$  positiv, so erhält man für  $\Re(z) > \Re(z_0) = a$  durch Differentiation der Gleichung (7) nach  $\varrho$ :

$$\int_0^\infty e^{-zx} e^{z_0 x} x^{\varrho-1} \log x \, dx = \frac{\Gamma'(\varrho)}{(z-z_0)^\varrho} - \frac{\Gamma(\varrho)}{(z-z_0)^\varrho} \log(z-z_0).$$

Wenn dagegen  $\Re(\varrho) < 0$ ,  $\varrho$  aber keine negative ganze Zahl ist, so ergibt sich in ähnlicher Weise aus (9):

$$\begin{aligned} & \int_1^\infty e^{-zx} e^{z_0 x} x^{\varrho-1} \log x \, dx \\ &= \frac{\Gamma'(\varrho)}{(z-z_0)^\varrho} - \frac{\Gamma(\varrho)}{(z-z_0)^\varrho} \log(z-z_0) + \sum_{v=0}^\infty (-1)^v \frac{(z-z_0)^v}{v!(v+\varrho)^2}, \end{aligned}$$

da die Differentiation unter dem Integralzeichen wegen der gleichmäßigen Konvergenz der resultierenden Integrale gestattet ist.

Man kann nun die Funktionen:

$$\Phi(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} e^{z_0 x} x^{\varrho-1} \log x \, dx \quad (\Re(\varrho) > 0)$$

bzw. 
$$\Phi(z) = \int_1^{\infty} e^{-zx} e^{z_0 x} x^{\varrho-1} \log x \, dx \quad (\Re(\varrho) < 0)$$

einer ähnlichen Diskussion unterwerfen, wie es in 5. mit der dort mit  $\Phi(z)$  bezeichneten Funktion geschah. Man überzeugt sich, daß diese Funktionen für  $\Re(z) > a$  regulär analytisch, für  $z = a + it$  aber bei  $t = \pm \infty$  den Fourierschen Charakter besitzen. Daraus folgt aber, daß, wenn die Laplacesche Transformierte  $\varphi(z)$  von  $f(x)$  längs der Geraden  $\Re(z) = a$  die Zerlegung:

$$\varphi(z) = \frac{\Gamma'(\varrho)}{(z-z_0)^\varrho} - \frac{\Gamma(\varrho)}{(z-z_0)^\varrho} \log(z-z_0) + \psi(z)$$

gestattet ( $\varrho \neq 0, -1, -2, \dots$ ), wobei  $|\psi^{(n)}(a+it)|$  in jedem endlichen Intervall von  $t$  beschränkt bleibt,  $\varphi(z)$  aber die Bedingungen I und III (S. 79) für  $\Re(z) > a$  erfüllt, für  $z = a + it$  aber so beschaffen ist, daß

$$\lim_{t=\pm\infty} \varphi^{(v)}(a+it) = 0 \quad (v=0, 1, 2, \dots, n-1)$$

ist, und  $\varphi^{(n)}(a+it)$  bei  $t = \pm \infty$  den Fourierschen Charakter besitzt, die asymptotische Formel:

$$\lim_{x=\infty} x^n e^{-\alpha x} [f(x) - e^{z_0 x} x^{\varrho-1} \log x] = 0$$

richtig ist.

Durch Kombination dieses Ergebnisses mit dem in 5. gewonnenen Resultat erhält man die zu Beginn von 7. aufgestellte Behauptung.

8. Dieser letzte Satz ergibt sich aus den beiden vorangehenden (vgl. 5. und 6.) durch ein Verfahren, das vielfach mit Vorteil angewandt werden kann; es besteht in der Anwendung der folgenden Formel, die das Multiplikationsgesetz der Laplaceschen Transformation angibt<sup>21)</sup>. Ist

$$\varphi_1(z) = \int_a^{\infty} e^{-zx} f_1(x) \, dx, \quad \varphi_2(z) = \int_a^{\infty} e^{-zx} f_2(x) \, dx,$$

so ist

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) \varphi_2(z) = \int_a^{\infty} e^{-zx} f(x) \, dx,$$

<sup>21)</sup> Diese leicht verifizierbare Formel tritt häufig in allen Untersuchungen — beispielsweise in der Wahrscheinlichkeitsrechnung — auf, bei denen die Laplacesche Transformation eine Rolle spielt; vgl. Horn: Journal für die reine und angewandte Mathematik 144, S. 170.

wobei

$$(10) \quad f(x) = \int_a^{x-a} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi$$

gesetzt ist, falls die auftretenden Integrale absolut konvergieren. Nehmen wir an, daß  $\varphi_1(z)$  im Punkte  $z = z_0$  eine algebraische Singularität (wie in 5.),  $\varphi_2(z)$  aber eine logarithmische (wie in 6.) besitzt, so hat  $\varphi(z)$  die Singularität der in 7. behandelten Art und das asymptotische Verhalten von  $f(x)$  — das uns schwer diskutierbar ist — liefert den letzten Satz. Überhaupt lehrt die Formel (10) das asymptotische Verhalten einer Funktion, deren Laplacesche Transformierte als ein Produkt dargestellt ist, wenn man das asymptotische Verhalten der zu den einzelnen Faktoren gehörigen Funktionen kennt.

Das Ergebnis unserer Untersuchungen besteht in der Erkenntnis, daß — falls die Laplacesche Transformierte  $\varphi(z)$  einer Funktion  $f(x)$  die erwähnten Bedingungen im Unendlichen erfüllt — der funktionentheoretische Charakter dieser Transformierten bzw. ihre singulären Stellen und zwar diejenigen, deren reeller Teil möglichst groß ist, ausschlaggebend für das asymptotische Verhalten der zugehörigen Funktion  $f(x)$  ist. Die behandelten Fälle betreffen Singularitäten von algebraisch-logarithmischem Charakter; es ließe sich auch der Fall behandeln, in dem die Laplacesche Transformierte eine exponentielle Singularität (von der Form  $e^{-\frac{1}{z}}$ ) aufweist. Man hat zu diesem Ende die Formel:

$$\int_0^{\infty} e^{-zx} \frac{\cos \lambda \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{z}} e^{-\frac{\lambda^2}{4z}}$$

heranzuziehen; in der Tat ist das asymptotische Verhalten der Funktion  $\frac{\cos \lambda \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$  eine total verschiedene von den bisher betrachteten. Es wäre auch des Interesses wert, zu untersuchen, welches asymptotische Verhalten einer Singularität von der Form  $\frac{[\log(z - z_0)]^s}{(z - z_0)^l}$  entspricht.

Wir wollen auf diese Fragen hier nicht weiter eingehen, sondern an einigen klassischen Beispielen zeigen, wie einfach die dargelegte Methode zur Bestimmung asymptotischer Ausdrücke zum Ziele führt.

### § 3.

#### Beispiele und Anwendungen (Potenzreihen).

9. Wir werden uns zunächst mit dem asymptotischen Verhalten einiger (beständig konvergenter) Potenzreihen

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

beschäftigen, wenn  $x$  längs eines vom Nullpunkte ausgehenden Strahles ins Unendliche rückt. Wenn die unendliche Reihe

$$(11) \quad \varphi_0(z) = \frac{a_0}{z} + \frac{1! a_1}{z^2} + \frac{2! a_2}{z^3} + \dots + \frac{n! a_n}{z^{n+1}} + \dots$$

für hinreichend große  $|z|$  konvergiert, so stellt sie die Laplacesche Transformierte der Funktion  $f(x)$  (für positive reelle Werte der Veränderlichen) dar, d. h. es ist

$$\varphi_0(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} f(x) dx.$$

Dies folgt, mit Rücksicht auf die Relation:

$$\int_0^{\infty} e^{-zx} x^{-n} dx = \frac{n!}{z^{n+1}},$$

unmittelbar aus einem bekannten Satz<sup>22)</sup> über die Integration von unendlichen Reihen.

Wir machen nun die Annahme, daß die Reihe (11) für  $|z| > R$  konvergent ist; die Funktion  $\varphi_0(z)$  ist alsdann im Unendlichen regulär und gleich Null; ihre Ableitungen verschwinden von mindestens zweiter Ordnung. Folglich sind alle Bedingungen, die wir in den Sätzen des vorangehenden Abschnittes für das Verhalten im Unendlichen gestellt haben, erfüllt; namentlich ist die Funktion  $\varphi_0(z)$  und alle ihre Ableitungen auf jeder Geraden vom Fourierschen Charakter, und es ist auch die Bedingung III (S. 79) für jedes  $a$  und  $\sigma$  erfüllt. Es kommen daher bei der Behandlung des asymptotischen Verhaltens von  $f(x)$  nur die im Endlichen gelegenen singulären Punkte von  $\varphi_0(z)$  in Betracht, und zwar in erster Reihe diejenigen, deren reeller Teil möglichst groß ist.

Wenn die unabhängige Veränderliche längs eines vom Nullpunkte ausgehenden Strahles ins Unendliche rückt, der mit der positiven reellen Achse den Winkel  $\theta$  bildet, d. h. wenn

$$x = |x| e^{i\theta}$$

ist, so handelt es sich um das asymptotische Verhalten der Funktion

$$a_0 + a_1 |x| e^{i\theta} + a_2 |x|^2 e^{2i\theta} + \dots + a_n |x|^n e^{ni\theta} + \dots,$$

deren Laplacesche Transformierte — nach dem Obigen — die Funktion

$$\varphi_\theta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! a_n e^{ni\theta}}{z^{n+1}} = e^{-i\theta} \varphi_0(e^{-i\theta} z)$$

ist. Da sich  $\varphi_\theta(z)$  im Unendlichen wie  $\varphi_0(z)$  verhält, so sind für das asymptotische Verhalten von  $f(x)$  längs des betrachteten Strahles die-

<sup>22)</sup> Vgl. etwa Bromwich, An Introduction to the Theorie of infinite series, S. 453.

jenigen singulären Stellen von  $\varphi_\theta(x)$  ausschlaggebend, deren reeller Teil möglichst groß ist. Nach der letzten Gleichung sind diese Stellen diejenigen singulären Punkte unserer Funktion  $\varphi_0(z)$ , die man durch die folgende Konstruktion gewinnt: Man betrachte denjenigen vom Nullpunkte ausgehenden Strahl, der den Winkel  $(-\theta)$  mit der positiven reellen Achse bildet (d. h. das Spiegelbild des betrachteten Strahles in bezug auf die reelle Achse), und bewege eine Gerade senkrecht auf diesen Strahl (bzw. auf seine Verlängerung) vom Unendlichweiten ausgehend, bis man auf eine singuläre Stelle von  $\varphi_0(z)$  stößt. Die auf dieser Geraden gelegenen singulären Punkte von  $\varphi_0(z)$  entsprechen den singulären Punkten von  $\varphi_\theta(z)$  mit größtmöglichem Realteil.

In dem ziemlich allgemeinen Falle, daß  $\varphi_0(z)$  nur Singularitäten von der im § 2 behandelten algebraisch-logarithmischen Art besitzt, und auf jeder Geraden nur endlich viele singuläre Punkte dieser Funktion liegen, beherrscht man — nach den vorangehenden Entwicklungen — das asymptotische Verhalten von  $f(x)$  längs jedes Strahles.

Die soeben erwähnte Konstruktion, die die Lage der „*ausschlaggebenden*“ singulären Stelle von  $\varphi_0(z)$  angibt, falls die unabhängige Veränderliche längs eines Strahles ins Unendliche rückt, liefert bereits verschiedene Sätze, die Phragmén und Lindelöf in ihrer grundlegenden Arbeit „*Sur une extension d'un principe classique de l'Analyse . . .*“ (Acta math. 31) abgeleitet haben. Unsere Resultate gestatten aber in bestimmter Hinsicht ein tieferes Eindringen in das asymptotische Verhalten der analytischen Funktionen, da sie nicht nur die Lage, sondern auch den Charakter der Singularitäten der Laplaceschen Transformierten berücksichtigen. Auf Anwendungen dieser Art hoffe ich in einer späteren Mitteilung zurückzukommen.

10. Ein Beispiel für den soeben behandelten Fall liefert die Besselsche Funktion

$$J(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

deren Laplacesche Transformierte von Lipschitz berechnet wurde. Man verifiziert leicht die Relation

$$\begin{aligned} \varphi_0(z) &= \int_0^{\infty} e^{-zx} J(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} \frac{1}{z^{2k+1}} \\ &= \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{1}{z^{2k}} = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}, \end{aligned}$$

mit deren Hilfe man die asymptotische Entwicklung der Besselschen Funktion ohne Mühe, wie folgt, auswerten kann: Die singulären Stellen der

Funktion  $\varphi_0(z)$  sind die Punkte  $z = \pm i$ , die algebraische Singularitäten  $(-\frac{1}{2})$ -ter Ordnung sind. Subtrahiert man daher von  $\varphi_0(z)$  den Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{z-i}} \frac{1}{\sqrt{2i}} \left[ 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \frac{1}{2^k} \left( \frac{z-i}{2i} \right)^k \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{z-i}} \frac{1}{\sqrt{2i\pi}} \sum_{k=0}^n \frac{i^k}{2^k} \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{k!} (z-i)^k,$$

in dem der Faktor von  $\frac{1}{\sqrt{z-i}}$  die  $n$ -te Teilsumme der Taylorschen Entwicklung der Funktion  $\frac{1}{\sqrt{z+i}}$  ist, so verschwindet die Differenz an der Stelle  $z = i$  von der  $(n + \frac{1}{2})$ -ten Ordnung, daher ist die  $n$ -te Ableitung dieser Differenz bei  $z = i$  stetig. Subtrahiert man in analoger Weise

$$\frac{1}{\sqrt{z+i}} \frac{1}{\sqrt{-2i\pi}} \sum_{k=0}^n \frac{(-i)^k}{2^k} \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{k!} (z+i)^k,$$

so findet dasselbe an der Stelle  $z = -i$  statt. Folglich gestattet die Laplacesche Transformierte  $\varphi_0(z)$  eine Zerlegung von der folgenden Form:

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2i\pi}} \sum_{k=0}^n \frac{i^k}{2^k} \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{k!} (z-i)^{k-\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{-2i\pi}} \sum_{k=0}^n \frac{(-i)^k}{2^k} \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{k!} (z+i)^{k-\frac{1}{2}} + \psi(z),$$

wobei die  $n$ -te Ableitung von  $\psi(z)$  überall, auch an den Stellen  $z = \pm i$ , stetig bleibt. Da im Unendlichen  $\varphi_0(z)$  regulär und gleich Null ist, so sind wiederum alle Bedingungen, die wir im vorangehenden Abschnitt für das Verhalten der Laplaceschen Transformaten im Unendlichen aufgestellt haben, erfüllt, und der Satz (S. 85) liefert das Resultat:

$$\lim_{x=\infty} x^n \left[ J(x) - \frac{1}{\sqrt{2i\pi}} \sum_{k=0}^n \frac{i^k}{2^k} \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{k!} \frac{e^{ix}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k)} x^{-k-\frac{1}{2}} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{-2i\pi}} \sum_{k=0}^n \frac{(-i)^k}{2^k} \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{k!} \frac{e^{-ix}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k)} x^{-k-\frac{1}{2}} \right] = 0,$$

oder, indem man  $e^{\frac{i\pi}{2}}$  an der Stelle von  $i$  schreibt, die Formel:

$$\lim_{x=\infty} x^n \left[ J(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+k)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k)} \frac{1}{2^k k!} \frac{\cos(x - \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2})}{x^k} \right] = 0,$$

und dies ist die bekannte asymptotische Darstellung der Besselschen Funktion, falls  $x$  längs der reellen Achse ins Unendliche rückt.

Will man noch eine Abschätzung für die Differenz

$$F_n(x) = J(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - k\right)} \frac{1}{2^k k!} \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}\right)}{x^k}$$

gewinnen, so setze man in der letzten Formel  $n+2$  an Stelle von  $n$ ; aus der so gewonnenen Gleichung

$$\lim_{x=\infty} x^{n+2} \left[ F_n(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=n+1, n+2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - k\right)} \frac{1}{2^k k!} \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}\right)}{x^k} \right] = 0$$

erhellt unmittelbar, daß

$$F_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{n+\frac{3}{2}}}\right)$$

ist.

Noch einfacher gestaltet sich die Rechnung, wenn die unabhängige Veränderliche längs eines Strahles, der den Winkel  $\theta$  mit der positiven reellen Achse bildet, ins Unendliche rückt:  $x = |x| e^{i\theta}$ . Man findet als Laplacesche Transformierte in diesem Falle die Funktion

$$\varphi_\theta(z) = e^{-i\theta} \varphi_0(e^{-i\theta} z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 + e^{2i\theta}}},$$

deren singuläre Stellen

$$z = \pm i e^{i\theta} = \mp \sin \theta \pm i \cos \theta$$

sind. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann  $0 < \theta < \pi$  angenommen werden; alsdann ist  $z_0 = -i e^{i\theta} = \sin \theta - i \cos \theta$  die „auschlaggebende“ singuläre Stelle, und eine leichte Rechnung zeigt, daß die Differenz

$$\frac{1}{\sqrt{z^2 + e^{2i\theta}}} = \frac{1}{\sqrt{-2i\pi e^{i\theta}}} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right)}{2^k k!} \frac{1}{(i e^{i\theta})^k} (z + i e^{i\theta})^{k-\frac{1}{2}}$$

an der Stelle  $z = z_0$  von der  $(n + \frac{1}{2})$ -ten Ordnung verschwindet. Da auf der Geraden  $\Re(z) = \Re(-i e^{i\theta}) = \sin \theta$  keine weiteren Singularitäten von  $\varphi_\theta(z)$  liegen, so folgt, daß auf dieser Geraden  $\varphi_\theta(z)$  in eine Summe von der Form

$$\varphi_\theta(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 + e^{2i\theta}}} = \frac{1}{\sqrt{-2i\pi e^{i\theta}}} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right)}{2^k k!} \frac{1}{(i e^{i\theta})^k} (z + i e^{i\theta})^{k-\frac{1}{2}} + \psi(z)$$

zerlegbar ist, wobei noch die  $n$ -te Ableitung von  $\psi(z)$  stetig bleibt. Unser Satz (S. 85) liefert unmittelbar den Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{-2i\pi}e^{i\theta}} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k\right)} \frac{1}{2^k k!} \frac{1}{(ie^{i\theta})^k} \frac{e^{-ie^{i\theta}|x|}}{|x|^{k+\frac{1}{2}}}$$

als asymptotische Annäherung der Besselschen Funktion, wenn die unabhängige Variable  $x$  längs des Strahles  $x = |x|e^{i\theta}$  ins Unendliche rückt. Führt man  $x$  an Stelle von  $|x|e^{i\theta}$  ein, so ergibt sich der bekannte Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k\right)} \frac{1}{2^k k!} \frac{e^{-i\left(x+k\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{x^k}$$

und eine einfache Betrachtung, die wörtlich wie in dem obigen Falle geführt werden kann, lehrt, daß der Fehler wiederum von der Ordnung  $x^{-(n+\frac{3}{2})}$  ist.

Die asymptotische Entwicklung der Besselschen Funktionen höherer Ordnung

$$J_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\lambda+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2k}$$

ist in derselben Weise durchführbar; man hat nur auf die von Heine<sup>23)</sup> herrührende Formel

$$\varphi_0(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} J_\lambda(x) dx = \frac{(\sqrt{1+z^2}-z)^\lambda}{\sqrt{1+z^2}}$$

Bezug zu nehmen, die die Laplacesche Transformierte dieser Funktionen angibt. Diese Funktion  $\varphi_0(z)$  ist wiederum regulär analytisch, mit Ausnahme der Stellen  $z = \pm i$ , wo sie algebraische Singularitäten aufweist. Durch Reihenentwicklungen in der Umgebung dieser singulären Stellen kann man wiederum eine endliche Summe von der Form

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^n (a_k(z-i)^{k-\frac{1}{2}} + \bar{a}_k(z+i)^{k-\frac{1}{2}})$$

bestimmen von der Beschaffenheit, daß die Differenz  $\varphi_0(z) - s_n(z)$  für  $z = \pm i$  von der  $(n + \frac{1}{2})$ -ten Ordnung verschwindet. Die Anwendung des Satzes (S. 85) liefert dann unmittelbar die bekannte asymptotische Entwicklung, und man sieht, daß ihre Berechnung nichts als die Bestimmung der Koeffizienten von gewissen Potenzentwicklungen elementarer Art erfordert.

<sup>23)</sup> Theorie der Kugelfunktionen 1, S. 243, 2. Aufl. Berlin 1878.

11. Wir wollen zweitens ein Beispiel behandeln, in dem die Laplace'sche Transformierte keine elementare Funktion ist, und betrachten zu diesem Zwecke die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^s k!},$$

in der  $s$  eine beliebige komplexe Größe (die nicht gleich einer positiven ganzen Zahl ist) sein kann. Die asymptotische Entwicklung dieser Funktion wurde von Herrn Hardy in Angriff genommen; in seiner in der Einleitung angeführten Abhandlung zeigt er, daß, falls  $x$  längs eines vom Nullpunkte ausgehenden Strahles ins Unendliche rückt, der im ersten oder vierten Quadranten liegt, die Formel

$$f(x) = \frac{e^x}{x^s} (1 + \varepsilon_x) \quad \left( -\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{\pi}{2} \right)$$

gilt, wobei  $\varepsilon_x$  gegen Null strebt, und entwickelt sodann die entsprechende Formel für den Fall, daß der fragliche Strahl im zweiten oder dritten Quadranten liegt. Wir werden mit Hilfe unserer Methode nicht nur die obige Formel von Herrn Hardy ableiten, sondern die volle asymptotische Entwicklung der Funktion  $f(x)$  gewinnen.

Als Laplace'sche Transformierte findet man nämlich im vorliegenden Falle

$$\varphi_0(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \frac{1}{z^{k+1}};$$

da diese Reihe für  $|z| > 1$  konvergiert, so handelt es sich bei der Bestimmung der fraglichen asymptotischen Entwicklung nur um die Diskussion der im Endlichen gelegenen Singularitäten der Funktion  $\varphi_0(z)$ . Die Funktion

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}$$

wurde in der Literatur vielfach untersucht; eine ausführliche Behandlung ihrer Singularitäten findet man in dem trefflichen Buche E. Lindelöfs: *Sur le calcul des résidus* (S. 138), wo gezeigt wird, daß die einzige im Endlichen gelegene singuläre Stelle dieser Funktion der Punkt  $z = 1$  ist; in der Umgebung dieser Stelle gestattet die betrachtete Funktion eine Zerlegung von der Form:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s} = \Gamma(1-s) \left( \log \frac{1}{z} \right)^{s-1} + \Psi(z),$$

wobei  $\Psi(z)$  an der Stelle  $z = 1$  regulär analytisch ist. Daher sind die

singulären Stellen unserer Funktion  $\varphi_0(z)$  die Punkte  $z=0$  und  $z=1$ , und in der Umgebung des letzteren gilt eine Darstellung

$$\varphi_0(z) = \frac{\Gamma(1-s)}{z} (\log z)^{s-1} + \psi(z),$$

wobei  $\psi(z)$  an der Stelle  $z=1$  regulär analytisch ist. Daraus erkennt man, daß, wenn  $x$  längs eines Strahles ins Unendliche rückt, der im ersten oder vierten Quadranten liegt, d. h. wenn

$$x = |x| e^{i\theta}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

ist, so ist — nach der in 9. angegebenen Konstruktion — die „ausschlaggebende“ Singularität der entsprechenden Laplaceschen Transformierten  $\varphi_\theta(z)$  diejenige, die aus der singulären Stelle  $z=1$  von  $\varphi_0(z)$  entspringt. Da  $\varphi_0(z)$  an dieser Stelle eine Singularität von der im § 2 behandelten Art besitzt, so liefern unsere dort entwickelten Formeln (S. 85) die volle asymptotische Entwicklung. Um dies ins Einzelne zu verfolgen, bemerken wir, daß die Laplacesche Transformierte

$$\varphi_\theta(z) = e^{-i\theta} \varphi_0(e^{-i\theta} z)$$

die beiden singulären Stellen  $z=0$  und  $z=e^{i\theta}$  besitzt, und in der Umgebung der letzteren eine Darstellung von der Form

$$\varphi_\theta(z) = \frac{\Gamma(1-s)}{z} (\log z - i\theta)^{s-1} + \psi_1(z)$$

gültig ist, wobei  $\psi_1(z)$  regulär analytisch an der Stelle  $z=e^{i\theta}$  ist. Daher ist die Funktion  $\varphi_\theta(z)$  für  $\Re(z) > \cos \theta$  regulär analytisch, erfüllt im Unendlichen — da sie dort ebenfalls regulär analytisch ist — samt ihren sämtlichen Ableitungen alle gestellten Forderungen, und besitzt an der Stelle  $z=e^{i\theta}$  eine Singularität von der beschriebenen Art.

Um daher die fragliche asymptotische Entwicklung zu gewinnen, entwickeln wir die Funktion

$$\frac{\Gamma(1-s)}{z} (\log z - i\theta)^{s-1}$$

in der Umgebung der Stelle  $z=e^{i\theta}$ ; eine leichte Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(1-s)}{z} (\log z - i\theta)^{s-1} \\ &= \frac{\Gamma(1-s)}{e^{is\theta}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-ik\theta} (z - e^{i\theta})^k \cdot \left[ (z - e^{i\theta}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} e^{-ik\theta} (z - e^{i\theta})^k \right]^{s-1} \\ &= \frac{\Gamma(1-s)}{e^{is\theta}} (z - e^{i\theta})^{s-1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-ik\theta} (z - e^{i\theta})^k, \end{aligned}$$

wobei man die Koeffizienten  $c_1, c_2, \dots, c_k, \dots$  durch Multiplikation der obigen Potenzreihen berechnen kann. In geschlossener Form erhält man für  $c_k$  den Ausdruck

$$c_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \left[ \frac{1}{z} \left( \frac{\log z}{z-1} \right)^{s-1} \right] \quad \text{für } z = 1.$$

Wenn nun  $\Re(s)$  zwischen den ganzen Zahlen  $g$  und  $g+1$  gelegen ist

$$g < \Re(s) < g+1,$$

so verschwindet die Differenz

$$\frac{\Gamma(1-s)}{z} (\log z - i\theta)^{s-1} - \frac{\Gamma(1-s)}{e^{is\theta}} (z - e^{i\theta})^{s-1} \sum_{k=0}^n c_k e^{-ik\theta} (z - e^{i\theta})^k$$

an der Stelle  $z = e^{i\theta}$  von der  $(n+s)$ -ten Ordnung, d. h. es ist — falls  $n$  so groß gewählt ist, daß  $n+g > 0$  ausfällt — die  $(n+g)$ -te Ableitung dieser Differenz an der betrachteten Stelle noch stetig. Unsere Funktion  $\varphi_\theta(z)$  gestattet daher in der Umgebung der Stelle  $z = e^{i\theta}$  (also insbesondere längs der Geraden  $\Re(z) = \cos \theta$ ) eine Zerlegung von der Form:

$$\varphi_\theta(z) = \frac{\Gamma(1-s)}{e^{is\theta}} \sum_{k=0}^n c_k e^{-ik\theta} (z - e^{i\theta})^{k+s-1} + \psi_2(z),$$

wobei noch die  $(n+g)$ -te Ableitung von  $\psi_2(z)$  eine stetige Funktion ist.

Unser Satz (S. 85) liefert daher die asymptotische Gleichung

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{n+g} e^{-|x| \cos \theta} \left[ f(|x| e^{i\theta}) - \frac{\Gamma(1-s)}{e^{is\theta}} \sum_{k=0}^n \frac{c_k e^{-ik\theta}}{\Gamma(1-k-s)} \frac{e^{e^{i\theta}|x|}}{|x|^{k+s}} \right] = 0,$$

d. h. es ist — wenn man  $x$  statt  $|x| e^{i\theta}$  einführt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{n+g} e^{-x} \left[ f(x) - \frac{\Gamma(1-s) e^x}{x^s} \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{\Gamma(1-k-s)} \frac{1}{x^k} \right] = 0.$$

Diese Beziehung gilt für solche Werte von  $x$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta = \arg x < \frac{\pi}{2}.$$

Für ganzzahlige Werte von  $s$  kann man ebenfalls die entsprechenden Formeln entwickeln, da das Verhalten der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^s}$  an der Stelle  $x = 1$  für diesen Fall bereits aus Resultaten von Kummer entnommen werden kann. Es würde auch keine Schwierigkeiten bieten, in analoger Weise das asymptotische Verhalten der allgemeineren Funktionen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k+a)^s k!},$$

mit denen sich Herr Hardy in der erwähnten Arbeit beschäftigt, zu bestimmen, da man — wie Herr Lindelöf in den letzten Zeilen seines erwähnten Werkes bemerkt — die Singularitäten der Funktion

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(k+a)^s}$$

mit analogen Mitteln diskutieren kann, wie im Falle  $a = 0$ .

Hingegen versagen unsere Entwicklungen, falls  $x$  längs eines im zweiten oder dritten Quadranten verlaufenden Strahles ins Unendliche rückt, da in diesem Falle die „auschlaggebende“ Singularität der Laplaceschen Transformierten die Stelle  $z = 0$  ist. Diese Singularität ist nicht mehr vom algebraischen Charakter und — obwohl sich aus den Lindelöf'schen Untersuchungen verschiedene Schlüsse auf das Verhalten von  $\varphi_0(z)$  in der Umgebung des Nullpunktes ergeben — so scheinen mir diese noch nicht auszureichen, um die volle asymptotische Entwicklung der obigen Funktion zu liefern.

#### § 4.

##### Beispiele und Anwendungen. (Bestimmte Integrale.)

12. Für das bekannte Laplacesche Problem der „Funktionen großer Zahlen“ gewinnt man mit unserer Methode recht durchsichtige Formeln. Hier handelt es sich bekanntlich um die Funktion

$$f(x) = \int_0^1 e^{x F(t)} G(t) dt,$$

wobei wir der Einfachheit halber die Strecke  $0 \leq t \leq 1$  als Integrationsintervall genommen haben. Die Laplacesche Transformierte ist in diesem Falle

$$(12) \quad \varphi(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} f(x) dx = \int_0^1 \frac{G(t)}{z - F(t)} dt.$$

Wir können annehmen — ohne die Allgemeinheit einzuschränken —, daß  $F(t)$  an der Stelle  $t = 0$  verschwindet, und daß für alle andern im Integrationsintervall gelegenen Werte von  $t$  diese Funktion einen negativen reellen Teil besitzt:

$$F(0) = 0, \quad \Re(F(t)) < 0 \quad \text{für} \quad 0 < t \leq 1,$$

da der allgemeine Fall auf diesen zurückführbar ist. Wir machen noch die Annahme, daß die Funktionen  $F(t)$  und  $G(t)$  im Integrationsintervall (einschließlich der Grenzen) reguläre analytische Funktionen sind, und können leicht erkennen, wo die singulären Stellen der Funktion  $\varphi(z)$

liegen. Für unsere Zwecke ist übrigens schon die triviale Bemerkung ausreichend, daß die Funktion  $\varphi(z)$  mit Ausnahme der Stelle  $z=0$  für alle Werte der unabhängigen Veränderlichen, deren reeller Teil größer oder gleich Null ist, regulär analytisch ist, da etwaige singuläre Stellen offenbar nur dort liegen können, wo der Nenner des Integranden von (12) verschwindet. Da ferner  $\varphi(z)$  für  $z=\infty$  regulär und gleich Null ist, so erkennt man — wie im vorangehenden Abschnitte —, daß für das asymptotische Verhalten von  $f(x)$  der Charakter der singulären Stelle  $z=0$  der Funktion  $\varphi(z)$  ausschlaggebend ist. Da das Integral

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{G(t)}{z-F(t)} dt$$

für jedes positive  $\varepsilon (< 1)$  eine bei  $z=0$  reguläre analytische Funktion darstellt, so kann man sich bei der Untersuchung des Verhaltens von  $\varphi(z)$  im Nullpunkt auf die Funktion

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{G(t)}{z-F(t)} dt$$

beschränken, wobei  $\varepsilon$  beliebig klein gewählt werden kann.

Um nun diese Untersuchung in voller Allgemeinheit durchzuführen, nehmen wir an, daß  $F(t)$  für  $t=0$  von der  $p$ -ten Ordnung verschwindet:

$$F(t) = t^p (\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \dots) \quad (\gamma_0 \neq 0),$$

und führen als neue Integrationsveränderliche

$$\tau = \sqrt[p]{F(t)} = t \sqrt[p]{\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \dots}$$

ein. Da sich aus diesem Zusammenhang  $t$  als eine für hinreichend kleine Werte von  $\tau$  konvergente Potenzreihe ergibt, so geht — für hinreichend kleine  $\varepsilon$  — das Integral

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{G(t)}{z-F(t)} dt$$

in einen Ausdruck von der Form:

$$\int_0^{\lambda} \frac{c_0 + c_1 \tau + c_2 \tau^2 + \dots + c_n \tau^n + \dots}{z - \tau^p} d\tau$$

über, wobei

$$c_0 + c_1 \tau + c_2 \tau^2 + \dots + c_n \tau^n + \dots = G(t) \frac{dt}{d\tau} = \frac{G(t)}{\frac{d}{dt} (\sqrt[p]{F(t)})}$$

gesetzt ist, und als Integrationsweg der Kurvenbogen zu nehmen ist, der vermöge der Abbildung  $\tau(t) = \tau$  der reellen Strecke  $0 \leq t \leq 1$  entspricht<sup>24</sup>). Der sog. Bürmannsche Lehrsatz<sup>25</sup>) liefert übrigens den folgenden expliziten Ausdruck für die Koeffizienten  $c_n$ :

$$(13) \quad c_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} \left[ G(t) \left( \frac{t}{\sqrt[p]{F(t)}} \right)^{n+1} \right]_{t=0}.$$

Wir zeigen zunächst, daß wenn  $\mathfrak{P}(\tau)$  irgendeine für die in Betracht kommenden Werte von  $\tau$  konvergente Potenzreihe bedeutet, das Integral

$$\int_0^\lambda \frac{\tau^{p(n+1)}}{z - \tau^p} \mathfrak{P}(\tau) d\tau \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

eine solche Funktion der komplexen Veränderlichen  $z$  darstellt, deren  $n$ -te Ableitung an der singulären Stelle  $z = 0$  noch stetig bleibt. Diese Behauptung ist mit der Tatsache identisch, daß die Funktion

$$\int_0^\lambda \left( \frac{\tau^p}{z - \tau^p} \right)^{n+1} \mathfrak{P}(\tau) d\tau$$

an der Stelle  $z = 0$  stetig ist. Die durch Produktintegration gewonnene Formel

$$\begin{aligned} & np \int_0^\lambda \left( \frac{\tau^p}{z - \tau^p} \right)^{n+1} \mathfrak{P}(\tau) d\tau \\ &= \frac{\lambda^{pn+1}}{(z - \lambda^p)^n} \mathfrak{P}(\tau) - \int_0^\lambda \left( \frac{\tau^p}{z - \tau^p} \right)^n ((pn + 1) \mathfrak{P}(\tau) + \tau \mathfrak{P}'(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

lehrt die Richtigkeit der Behauptung für jedes ganzzahlige  $n$ , falls sie für

<sup>24</sup>) Wir nehmen  $\varepsilon$  so klein, daß dieser Integrationsweg ein doppelpunktloser offener analytischer Kurvenzug ist.

<sup>25</sup>) Es kommt die folgende Form des fraglichen Satzes zur Anwendung: Die an der Stelle  $t = 0$  regulär analytische Funktion  $\omega(t)$  möge bei  $t = 0$  von der ersten Ordnung verschwinden; ist  $\Omega(t)$  eine beliebige bei  $t = 0$  reguläre Funktion, so gilt für hinreichend kleine  $|\omega(t)|$  die Darstellung

$$\frac{\Omega(t)}{\omega'(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\omega(t))^n,$$

wobei zur Abkürzung

$$c_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} \left[ \Omega(t) \left( \frac{t}{\omega(t)} \right)^{n+1} \right]_{t=0}$$

gesetzt ist. ( $\Omega(t) = G(t)$ ,  $\omega(t) = \sqrt[p]{F(t)} = \tau$ ).

$n = 0$  bewiesen werden kann; in diesem Falle aber erkennt man die Stetigkeit unmittelbar auf Grund der Relation:

$$\int_0^\lambda \frac{\tau^p}{z - \tau^p} \mathfrak{P}(\tau) d\tau = -\frac{1}{p} \lambda \mathfrak{P}(\lambda) \log(z - \lambda^p) + \frac{1}{p} \int_0^\lambda (\mathfrak{P}(\tau) + \tau \mathfrak{P}'(\tau)) \log(z - \tau^p) d\tau.$$

Wir schließen aus diesem Umstande, daß die Laplacesche Transformierte  $\varphi(z)$  die folgende Zerlegung gestattet:

$$(14) \quad \varphi(z) = \sum_{\nu=0}^{pn+p-1} c_\nu \int_0^\lambda \frac{\tau^\nu}{z - \tau^p} d\tau + \psi(z),$$

wobei  $\psi(z) = \int_0^\lambda \frac{\sum_{\nu=pn+p}^{\infty} c_\nu \tau^\nu}{z - \tau^p} d\tau$  eine solche Funktion bedeutet, deren  $n$ -te

Ableitung an der Stelle  $z = 0$  stetig ist, und es handelt sich nun darum, den singulären Charakter der Funktionen

$$J_\nu(z) = \int_0^\lambda \frac{\tau^\nu}{z - \tau^p} d\tau \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

an der Stelle  $z = 0$  zu untersuchen.

Für  $\nu = p - 1$  erhält man unmittelbar:

$$J_{p-1}(z) = \frac{1}{p} (\log z - \log(z - \lambda^p));$$

in Verbindung mit der Gleichung

$$\begin{aligned} J_{p-1+kp} &= z^k \int_0^\lambda \frac{\tau^{p-1}}{z - \tau^p} d\tau - \int_0^\lambda \tau^{p-1} \frac{z^k - \tau^{kp}}{z - \tau^p} d\tau \\ &= z^k J_{p-1}(z) - \left[ \frac{\lambda^p}{p} z^{k-1} + \frac{\lambda^{2p}}{2p} z^{k-2} + \frac{\lambda^{3p}}{3p} z^{k-3} + \dots + \frac{\lambda^{kp}}{kp} \right] \end{aligned}$$

erkennt man daraus sofort, daß die Differenz

$$J_{p-1+kp} - \frac{z^k}{p} \log z \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

in der Umgebung der Stelle  $z = 0$  eine reguläre analytische Funktion darstellt.

Ist aber

$$\nu \equiv (p - 1) \pmod{p},$$

so kann man, um die fragliche Singularität zu untersuchen, folgendermaßen verfahren: Man bestimme zunächst denjenigen Winkel

$$2(z+1)\frac{\pi}{p} < \theta \leq 2z\frac{\pi}{p},$$

in dem der Integrationsweg der Integrale  $J_\nu(z)$  (für hinreichend kleine  $\varepsilon$ ) verläuft<sup>26)</sup> und führe sodann eine neue Integrationsvariable  $\xi$  vermöge

$$\tau = \sqrt[p]{\xi}$$

ein, wobei derjenige Wert der Wurzel zu nehmen ist, dessen Argument in demselben Winkel liegt. Für  $J_\nu(z)$  ergibt sich sodann der Ausdruck:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{p} \int_0^{\lambda^p} \frac{\xi^{\frac{\nu+1}{p}-1}}{z-\xi} d\xi$$

und der Integrationsweg ist wiederum ein doppelpunktloser analytischer Kurvenzug, falls  $\varepsilon$  hinreichend klein gewählt war. Erstreckt man aber dieses Integral längs einer Schleife ( $C$ ), die vom Punkte  $\lambda^p$  ausgehend und den Nullpunkt einmal im positiven Sinne umkreisend den früheren Integrationsweg einschließt und zum Punkt  $\lambda^p$  zurückführt, so erhält man — nach einer häufig angewandten Schlußweise — falls  $z$  außerhalb dieser Schleife liegt:

$$u(z) = \frac{1}{p} \int_{(C)} \frac{\xi^{\frac{\nu+1}{p}-1}}{z-\xi} d\xi = \left( e^{\frac{2i\pi(\nu+1)}{p}} - 1 \right) J_\nu(z).$$

Nun stellt aber jenes Integral, falls  $z$  innerhalb jener Schleife ( $C$ ) liegt, eine daselbst reguläre analytische Funktion  $v(z)$  dar und die Differenz  $u(z) - v(z)$  ist leicht auszuwerten, wenn man eine Schleife ( $C'$ ) zur Hilfe heranzieht, die ähnlich wie ( $C$ ) gelegen, aber innerhalb ( $C$ ) verläuft. Es ergibt sich nämlich, falls  $z$  zwischen beiden Schleifen liegt:

$$v(z) - u(z) = \frac{1}{p} \int_{(C)} \frac{\xi^{\frac{\nu+1}{p}-1}}{z-\xi} d\xi - \frac{1}{p} \int_{(C')} \frac{\xi^{\frac{\nu+1}{p}-1}}{z-\xi} d\xi,$$

woraus man, in Anbetracht dessen, daß  $\xi^{\frac{\nu+1}{p}-1}$  in dem durch beide Schleifen begrenzten Gebiete regulär analytisch ist, die Relation

$$v(z) - u(z) = -\frac{2i\pi}{p} z^{\frac{\nu+1}{p}-1}$$

<sup>26)</sup> Man beachte, daß die Abbildungsfunktion

$$\tau = \sqrt[p]{F(t)}$$

und ihre Umkehrung in der Umgebung des Nullpunktes regulär analytisch ist.

entnimmt, d. h. es ist:

$$u(z) = \left( e^{\frac{2i\pi v+1}{p}} - 1 \right) J_\nu(z) = \frac{2i\pi}{p} z^{\frac{v+1}{p}-1} + v(z),$$

wo  $v(z)$  eine im Nullpunkte reguläre analytische Funktion bedeutet.

Zusammenfassend erhalten wir das folgende Resultat: Ist

$$v \equiv (p-1) \pmod{p},$$

so ist die Differenz

$$J_\nu(z) - \frac{2i\pi}{p} \frac{1}{e^{\frac{2i\pi v+1}{p}} - 1} z^{\frac{v+1}{p}-1} = J_\nu(z) - \frac{\pi}{p} \frac{e^{-i\pi \frac{v+1}{p}}}{\sin(v+1) \frac{\pi}{p}} z^{\frac{v+1}{p}-1}$$

eine in der Umgebung der Stelle  $z=0$  reguläre, analytische Funktion, wobei für die  $p$ -te Wurzel der oben festgesetzte Wert zu nehmen ist, ist aber

$$v \equiv (p-1) \pmod{p},$$

so ist

$$J_\nu(z) - \frac{1}{p} z^{\frac{v+1}{p}-1} \log z$$

an der Stelle  $z=0$  regulär analytisch. In Verbindung mit der Formel (14) ergibt sich hieraus, daß unsere Laplacesche Transformierte in die folgende Summe zerlegbar ist:

$$\varphi(z) = \frac{\pi}{p} \sum_{\substack{r=0 \\ r \equiv (p-1) \pmod{p}}}^{pn+p-1} c_r \frac{e^{-i\pi \frac{r+1}{p}}}{\sin(r+1) \frac{\pi}{p}} z^{\frac{r+1}{p}-1} + \frac{1}{p} \sum_{k=0}^n c_{kp+p-1} z^k \log z + \Psi(z),$$

wobei die erste Summe nur auf solche Werte von  $r$  zu erstrecken ist, die nicht kongruent  $(p-1)$  modulo  $p$  sind, und  $\Psi(z)$  eine solche Funktion bezeichnet, deren  $n$ -te Ableitung an der Stelle  $z=0$  stetig bleibt. Die Formeln, die wir im § 2 entwickelt haben, liefern daher die asymptotische Gleichung:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n \left[ f(x) - \frac{\pi}{p} \sum_{\substack{r=0 \\ r \equiv (p-1) \pmod{p}}}^{pn+p-1} c_r \frac{e^{-i\pi \frac{r+1}{p}}}{\sin(r+1) \frac{\pi}{p}} \frac{1}{\Gamma\left(1 - \frac{r+1}{p}\right)} \frac{1}{x^{\frac{r+1}{p}}} + \frac{1}{p} \sum_{k=0}^n (-1)^k c_{kp+p-1} \frac{k!}{x^{k+1}} \right] = 0,$$

wobei die auftretenden Koeffizienten  $c_n$  durch die Gleichung (13) in expliziter Form gegeben sind.

Es scheint mir, daß diese Lösung des Laplaceschen Problems der Funktionen großer Zahlen an Übersichtlichkeit und Einfachheit nichts zu wünschen übrig läßt; es sei noch bemerkt, daß in dem Falle, daß die oben mit  $G(t)$  bezeichnete Funktion an der Stelle  $t=0$  nicht regulär, sondern von der Form

$$G(t) = t^s g(t)$$

ist, wobei  $g(t)$  eine für  $t=0$  reguläre analytische Funktion bedeutet, nach demselben Verfahren ähnliche asymptotische Formeln erhältlich sind.

13. Wie in der Theorie der Fourierschen Reihen die Integrale

$$\int_0^{2\pi} F(t) \cos xt dt \quad \text{bzw.} \quad \int_0^{2\pi} F(t) \sin xt dt,$$

so spielen in der Theorie der Besselschen Reihen die Integrale

$$(15) \quad \int_0^1 F(t) J(xt) dt$$

eine wichtige Rolle und es ist daher des Interesses wert, ihr asymptotisches Verhalten zu studieren. Mit Hilfe der Formel von Lipschitz (S. 91) erhält man als Laplacesche Transformierte des obigen Ausdruckes die Funktion:

$$\int_0^1 \frac{F(t)}{\sqrt{z^2 + t^2}} dt,$$

die im Unendlichen wiederum regulär analytisch und gleich Null ist, so daß die im Endlichen gelegenen singulären Stellen dieser Funktion den asymptotischen Charakter des Ausdruckes (15) bestimmen. Wir beschränken uns auf den Fall, daß  $F(t)$  ein Polynom ist, d. h. wir wollen uns mit dem asymptotischen Verhalten der Ausdrücke

$$f_m(x) = \int_0^1 t^m J(xt) dt$$

beschäftigen, was — nach der vorangehenden Bemerkung — mit dem Studium der Singularitäten der Funktionen

$$\varphi_m(z) = \int_0^1 \frac{t^m}{\sqrt{z^2 + t^2}} dt$$

äquivalent ist. Nun kann man diese Integrale ohne Schwierigkeiten auswerten; es ergeben sich verschiedenartige Resultate, je nachdem  $m$  eine gerade oder ungerade Zahl ist. Für ein ungerades  $m$

$$m = 2k + 1$$

ergibt sich

$$\varphi_{2k+1}(z) = (a_0^{(2k+1)} z^{2k} + a_2^{(2k+1)} z^{2k-2} + a_4^{(2k+1)} z^{2k-4} + \dots + a_{2k}^{(2k+1)}) \sqrt{z^2 + 1} - a_0^{(2k+1)} z^{2k+1},$$

wobei zur Abkürzung:

$$a_{2k}^{(2k+1)} = \frac{1}{2k+1}, \quad a_{2k-2p}^{(2k+1)} = (-1)^p \frac{2k(2k-2)(2k-4)\dots(2k-2p+2)}{(2k+1)(2k-1)(2k-3)\dots(2k-2p+1)} \\ (p = 1, 2, \dots, k)$$

gesetzt ist. Ist aber  $m$  eine gerade Zahl

$$m = 2k,$$

so erhält man

$$\varphi_{2k}(z) = (a_2^{(2k)} z^{2k-2} + a_4^{(2k)} z^{2k-4} + a_6^{(2k)} z^{2k-6} + \dots + a_{2k}^{(2k)}) \sqrt{z^2 + 1} - a_2^{(2k)} z^{2k} (\log(1 + \sqrt{z^2 + 1}) - \log z),$$

wobei zur Abkürzung

$$a_{2k}^{(2k)} = \frac{1}{2k}; \quad a_{2k-2p}^{(2k)} = (-1)^p \frac{(2k-1)(2k-3)(2k-5)\dots(2k-2p+1)}{2k(2k-2)(2k-4)\dots(2k-2p)} \\ (p = 1, 2, \dots, k-1)$$

gesetzt ist<sup>27)</sup>.

Mit Hilfe dieser Formeln können wir die asymptotische Entwicklung der Ausdrücke  $f_m(x)$  auf Grund der im § 2 entwickelten Sätze sofort angeben. Man kann zunächst an der Hand dieser Formeln nochmals verifizieren, daß  $\varphi_m(z)$  im Unendlichen regulär analytisch ist, und man sieht, daß für ein ungerades  $m$  die Stellen  $z = \pm i$ , für ein gerades  $m$  aber  $z = \pm i$  und  $z = 0$  die singulären Stellen dieser Funktion sind. Ist  $m = 2k + 1$ , so entwickle man  $\varphi_{2k+1}(z)$  in der Umgebung der Stellen  $z = \pm i$ ; man erhält Potenzreihen von der Form:

$$\varphi_{2k+1}(z) = \sqrt{z-i} \sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v^{(2k+1)} (z-i)^v = \sqrt{z+i} \sum_{v=0}^{\infty} \bar{\alpha}_v^{(2k+1)} (z+i)^v,$$

deren Koeffizienten  $\alpha_v^{(2k+1)}$  bzw.  $\bar{\alpha}_v^{(2k+1)}$  sich als einfache Ausdrücke der  $a_0^{(2k+1)}$ ,  $a_2^{(2k+1)}$ , ...,  $a_{2k}^{(2k+1)}$  ergeben. Danach ist  $\varphi_{2k+1}(z)$  in die Summe

$$\varphi_{2k+1}(z) = \sqrt{z-i} \sum_{v=0}^n \alpha_v^{(2k+1)} (z-i)^v + \sqrt{z+i} \sum_{v=0}^n \bar{\alpha}_v^{(2k+1)} (z+i)^v + \psi(z)$$

<sup>27)</sup> Diese Formeln ergeben sich aus den beiden leicht verifizierbaren Relationen:

$$\int \frac{t^{2k+1}}{\sqrt{t^2+1}} dt = (a_0^{(2k+1)} + a_2^{(2k+1)} t^2 + \dots + a_{2k}^{(2k+1)} t^{2k}) \sqrt{t^2+1},$$

$$\int \frac{t^{2k}}{\sqrt{t^2+1}} dt = t(a_2^{(2k)} + a_4^{(2k)} t^2 + \dots + a_{2k}^{(2k)} t^{2k-2}) \sqrt{t^2+1} - a_2^{(2k)} \log(t + \sqrt{t^2+1}).$$

zerlegbar, in der  $\psi(z)$  eine solche Funktion bezeichnet, deren  $(n+1)$ -ter Differentialquotient an den Stellen  $z = \pm i$  stetig bleibt (an jeder anderen Stelle ist diese Funktion regulär analytisch). Wir erhalten folglich auf Grund der im § 2 gewonnenen Sätze für  $f_{2k+1}(x)$  die folgende Annäherung:

$$\sum_{v=0}^n \frac{\alpha_v^{(2k+1)} e^{ix} + \bar{\alpha}_v^{(2k+1)} e^{-ix}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-v\right)} \frac{1}{x^{v+\frac{3}{2}}}$$

und eine Überlegung, die wörtlich wie im Falle der Besselschen Funktion (S. 93) geführt werden kann, zeigt, daß der Fehler von der Ordnung  $\frac{1}{x^{n+2}}$  ist.

Ist aber  $m$  eine gerade Zahl:  $m = 2k$ , so hat  $\varphi_{2k}(z)$  außer  $z = \pm i$  noch  $z = 0$  als singuläre Stelle. Der Beitrag, den diese letzte Singularität in der asymptotischen Entwicklung von  $f_{2k}(x)$  liefert, ist nach dem Satz S. 18

$$-a_2^{(2k)} \frac{(2k)!}{x^{2k+1}}.$$

Um die volle asymptotische Entwicklung zu gewinnen, entwickle man in der Umgebung der Stellen  $z = \pm i$  den daselbst singulären Bestandteil von  $\varphi_{2k}(z)$ . Da

$$\log(1 + \sqrt{z^2 + 1}) = \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v-1} \frac{(\sqrt{z^2 + 1})^v}{v}$$

ist, so hat man zu diesem Ende nur die Funktion

$$\sqrt{z^2 + 1} \left[ (a_2^{(2k)} z^{2k-2} + a_4^{(2k)} z^{2k-4} + \dots + a_{2k}^{(2k)} - a_2^{(2k)}) \left( 1 + \frac{1+z^2}{3} + \frac{(1+z^2)^2}{5} + \dots \right) \right]$$

nach Potenzen von  $z - i$  bzw.  $z + i$  zu entwickeln; sind die so erhaltenen Reihen

$$\sqrt{z-i} \sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v^{(2k)} (z-i)^v \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{z+i} \sum_{v=0}^{\infty} \bar{\alpha}_v^{(2k)} (z+i)^v,$$

so lautet die asymptotische Näherung für  $f_{2k}(x)$  wie folgt:

$$-a_2^{(2k)} \frac{(2k)!}{x^{2k+1}} + \sum_{v=0}^n \frac{\alpha_v^{(2k)} e^{ix} + \bar{\alpha}_v^{(2k)} e^{-ix}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-v\right)} \frac{1}{x^{v+\frac{3}{2}}}$$

und der Fehler ist wiederum von der Ordnung  $\frac{1}{x^{n+2}}$ .

Ich habe mich, bei dieser ersten Anwendung des dargelegten Verfahrens, auf die in den letzten beiden Abschnitten behandelten Beispiele

beschränkt, da diese — wie mir scheint — geeignet sind, auf die Tragweite der Methode Licht zu werfen. Beispiele dieser Art könnte man in großer Menge angeben; es führen z. B. der Integralsinus und die verwandten Funktionen die Mittag-Lefflerschen  $E$ -Funktionen durch Laplace'sche Transformation auf elementare Funktionen, woraus man ihre asymptotischen Entwicklungen unmittelbar entnehmen kann. Die in der Theorie der Gammafunktionen auftretenden asymptotischen Entwicklungen sind Spezialfälle der in 12. behandelten Aufgabe. Ich glaube mich nicht mit diesen bekannten Aufgaben weiter beschäftigen zu sollen und werde in folgenden Arbeiten solche Anwendungen des dargelegten Verfahrens entwickeln, die zu wesentlich neuen Resultaten führen.

(Eingegangen am 6. 8. 1925.)

[Anmerkung während der Korrektur.] Herr Carathéodory macht mich in freundlicher Weise darauf aufmerksam, daß sich die letzte Formel auf S. 103, die bei der Behandlung des Laplaceschen Problems der Funktionen großer Zahlen mittels der dargelegten Methode resultiert, auf die folgende einfache Form bringen läßt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n \left[ f(x) - \frac{\pi}{p} \sum_{v=0}^{pn+p-1} e^{-i\pi \frac{v+1}{p}} \Gamma\left(\frac{v+1}{p}\right) c_v \frac{1}{x^{\frac{v+1}{p}}} \right] = 0.$$

Diese Formel wurde — wie ich aus derselben Mitteilung entnehme — von Herrn Woldemar Jacobi gefunden, und befindet sich in seiner (nicht gedruckten) Dissertation: „Über die näherungsweise Berechnung von Funktionen großer Zahlen“. Heidelberg 1922.

(29. 1. 1926.)