Über das Maß der Bestimmtheit des Wachstums einer ganzen transzendenten Funktion durch die absoluten Beträge der Koeffizienten ihrer Potenzreihe[1]).

Von

Heinrich Brinkmeier in Kiel.

Einleitung.

Wenn

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

eine ganze transzendente Funktion ist, also

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$$

ist, und wenn $M(r)$ das Maximum ihres absoluten Betrages auf dem Kreise mit dem Radius r um den Nullpunkt bezeichnet, also

$$M(r) = \operatorname*{Max}_{|z|=r} |f(z)|$$

ist, so ist bekanntlich die Wachstumsordnung μ der Funktion definiert als

$$\mu = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\lg \lg M(r)}{\lg r};$$

es ist also:

$$\text{(1a)} \qquad \begin{aligned} M(r) &\leqq e^{r^{\mu+\varepsilon_1}} \quad \text{für} \quad r \geqq \mathfrak{r}_1(\varepsilon_1), \\ M(r) &\geqq e^{r^{\mu-\varepsilon_1}} \quad \text{für} \quad r = r_1, r_2, \ldots \to \infty. \end{aligned}$$

[1]) Die vorliegende Arbeit ist ein Auszug aus einer Abhandlung, die im Juni 1924 der Philosophischen Fakultät der Universität zu Kiel als Inauguraldissertation zur Erlangung der Doktorwürde vorgelegen hat. Die Beantwortung der darin aufgeworfenen Frage wurde mir von Herrn Prof. Dr. Toeplitz gütigst überlassen, der mir auch wertvolle Hinweise zur Durchführung der Aufgabe gegeben hat. Ich benutze gern diese Gelegenheit, ihm hierfür meinen Dank auszusprechen.

Anderseits läßt sich auch eine Ordnung der Koeffizientenfolge definieren:

$$\gamma = \varliminf_{n=\infty} \frac{\lg |c_n|}{-n \cdot \lg n}; \tag{2}$$

es ist daher

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|c_n|} &\leqq \frac{1}{n^{\gamma-\varepsilon_2}} \quad \text{für} \quad n \geqq \mathfrak{n}_2(\varepsilon_2), \\ \sqrt[n]{|c_n|} &\geqq \frac{1}{n^{\gamma+\varepsilon_2}} \quad \text{für} \quad n = n_1, n_2, \ldots \to \infty. \end{aligned} \tag{2a}$$

H. Poincaré und J. Hadamard haben nun gezeigt [2]), daß

$$\mu = \frac{1}{\gamma} \tag{3}$$

ist. Da γ nur von den *Beträgen* der c_n abhängt, zeigt dieses Resultat implizite — was direkt wohl nicht leicht zu erkennen wäre —, daß auch μ nur von den Beträgen der c_n abhängt.

E. Lindelöf hat das Wachstum einer Funktion noch schärfer umgrenzt, als es durch die Ungleichungen (1a) geschieht, nämlich durch die Ungleichungen:

$$\begin{aligned} M(r) &\leqq e^{(1+\varepsilon_3)\mathsf{M}(r)} \quad \text{für} \quad r \geqq \mathfrak{r}_3(\varepsilon_3), \\ M(r) &\geqq e^{(1-\varepsilon_3)\mathsf{M}(r)} \quad \text{für} \quad r = r_1, r_2, \ldots \to \infty, \end{aligned} \tag{4}$$

wo

$$\mathsf{M}(r) = m r^{\mu} \cdot (\lg r)^{\mu_1} \cdot (\lg_2 r)^{\mu_2} \ldots (\lg_\varkappa r)^{\mu_\varkappa}, \text{ [3])}$$

und entsprechend die Abnahme der Koeffizienten durch die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|c_n|} &\leqq \frac{1+\varepsilon_4}{\Gamma(n)} \quad \text{für} \quad n \geqq \mathfrak{n}_4(\varepsilon_4), \\ \sqrt[n]{|c_n|} &\geqq \frac{1-\varepsilon_4}{\Gamma(n)} \quad \text{für} \quad n = n_1, n_2, \ldots \to \infty, \end{aligned} \tag{5}$$

wo

$$\Gamma(n) = c \cdot n^{\gamma} \cdot (\lg n)^{\gamma_1} \cdot (\lg_2 n)^{\gamma_2} \ldots (\lg_\varkappa n)^{\gamma_\varkappa}.$$

Lindelöf hat alsdann bewiesen, daß

$$\gamma = \frac{1}{\mu}, \quad \gamma_1 = -\frac{\mu_1}{\mu}, \quad \ldots, \quad \gamma_\varkappa = -\frac{\mu_\varkappa}{\mu}, \quad c = \left(\frac{\mu^{\mu_1 - 1}}{m \cdot e}\right)^{\frac{1}{\mu}} \tag{6}$$

ist. Auch hier erweist sich also, daß die genaueren Exponenten $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\varkappa$ und ebenso m nur von den *Beträgen* der c_n abhängen.

---

[2]) Eine ausführliche Darstellung dieser Theorie gibt u. a. die Arbeit von E. Lindelöf: Mémoire sur les fonctions entières de genre fini, Acta soc. scient. Fennicae **31** (1902), S. 1, wo auch die Originalarbeiten Poincarés und Hadamards angegeben sind. Vgl. auch Enz. d. math. Wiss. II 3, 1 Nr. 4 (Bieberbach), S. 425—445.

[3]) $\lg_\varkappa r$ bedeutet den $\varkappa$-fach genommenen Logarithmus von r.

Diese Tatsachen legen die Frage nahe, inwieweit man überhaupt $M(r)$ unter Festhaltung der Beträge der c_n durch Veränderung allein ihrer Arcus beeinflussen kann. Unter allen Funktionen, die sich nur in den Arcus der c_n unterscheiden, hat

$$\mathfrak{f}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|z^n$$

das größte Wachstum:

$$M(r)\leqq\mathfrak{M}(r)=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n. \tag{7}$$

In der vorliegenden Arbeit wird nun im § 1 *gezeigt, daß stets*

$$\frac{\mathfrak{M}(r)}{M(r)}\leqq r^{\frac{\mu}{2}+\varepsilon_5} \qquad \textit{für} \quad r\geqq\mathfrak{r}_5(\varepsilon_5) \tag{8}$$

gilt. Da

$$r^{-\frac{\mu}{2}}=e^{-\frac{\mu}{2}\lg r}$$

ist, so sieht man, daß dieser ganze Einfluß, der sich als additiver Logarithmus in den Exponenten stellt, winzig ist selbst neben den multiplikativen Logarithmen des Lindelöfschen Satzes.

Vor allem aber wird in dieser Arbeit im § 2 *dargetan, daß dieses Ergebnis keiner irgendwelchen weiteren Verschärfung fähig ist.* E. Landau hat in einer Arbeit (Bemerkungen zu einer Arbeit des Herrn Carlemann, Math. Zeitschr. 5, S. 147) sich die Aufgabe gestellt, ein *Polynom* $(k-1)$*-ten Grades* zu finden, bei dem $\frac{\mathfrak{M}(1)}{M(1)}$ der Grenze $\sqrt{k}$, die es nie übersteigen kann, möglichst nahe kommt. Er beweist mit elementaren Mitteln und sehr kurz die Ungleichung

$$\left|\sum_{n=1}^{k-1}\chi(n)z^n\right|\leqq 4\sqrt{k}\lg k \qquad \text{für} \quad |z|\leqq 1, \tag{9}$$

wo $\chi(n)$ irgendein eigentlicher Nicht-Hauptcharakter mod k ist, und hat damit ein Polynom konstruiert, bei dem $\mathfrak{M}(1)=k$, $M(1)\leqq 4\sqrt{k}\lg k$ ist, also $\frac{\mathfrak{M}(1)}{M(1)}\geqq\frac{\sqrt{k}}{4\lg k}$. Mit Hilfe dieser selben Ungleichung läßt sich für unseren ganz anderen Zweck eine ganze Funktion $F(z)$ der Wachstumsordnung μ herstellen, bei der

$$\frac{\mathfrak{M}(r)}{M(r)}>C\cdot r^{\frac{\mu}{2}} \qquad \text{für} \quad r=r_1, r_2, \ldots\to\infty \tag{10}$$

ist, wo C beliebig groß vorgegeben sein darf.

Wenn man die genaueren Exponenten heranzieht, durch die Lindelöf das Wachstum charakterisiert, so erhält man mit den gleichen Hilfsmitteln folgende Verschärfung der aufgeführten Ergebnisse. Es ist stets

$$(8a) \qquad \frac{\mathfrak{M}(r)}{M(r)} \leqq (1+\varepsilon_6)\left[e \cdot \mu \cdot \mathsf{M}(r)\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{für} \quad r \geqq \mathfrak{r}_6(\varepsilon_6),$$

und es lassen sich mit Hilfe der Landauschen Ungleichung (9) Funktionen konstruieren, für die

$$(10a) \qquad \frac{\mathfrak{M}(r)}{M(r)} > \frac{1-\varepsilon_6}{4\mu \lg r}\left[e \cdot \mu \cdot \mathsf{M}(r)\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{für} \quad r = r_1, r_2, \ldots \to \infty$$

ist.

Dieses letztere Ergebnis läßt sich noch weiter verschärfen.

Mit sehr schwierigen Betrachtungen hatten Hardy und Littlewood für die erwähnte Landausche Aufgabe eine noch schärfere Lösung gefunden, indem sie die Ungleichung, die Landau in derselben Arbeit erwähnt, bewiesen:

$$(11) \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} e^{k^2 \pi \xi i} z^k\right| < A\sqrt{n} \quad \text{für} \quad |z| \leqq 1,$$

wo $\xi = \sqrt{2}$ oder irgendeine sonstige feste reelle Irrationalzahl mit beschränkten Kettenbruchnennern ist. A ist eine nur von ξ abhängige, von n und z freie Konstante. Verwendet man diese Ungleichung statt der Landauschen, so erhält man

$$(10b) \qquad \frac{\mathfrak{M}(r)}{M(r)} > \frac{1-\varepsilon_6}{A}\left[e \cdot \mu \cdot \mathsf{M}(r)\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{für} \quad r = r_1, r_2, \ldots \to \infty.$$

Die Konstante $A = A(\xi)$ ist jedenfalls über $\sqrt{2}$ gelegen; ihr genauerer Mindestwert ergibt sich aus dem Hardyschen Zusammenhang.

Um die Resultate absolut in dieser schärferen Form zu erhalten, ist der Arbeit durchweg die Hardy-Littlewoodsche Ungleichung zugrunde gelegt. Die Verwendung der Landauschen würde gewisse Abänderungen notwendig machen.

Da die mit (8a) und (10b) gegebenen Verschärfungen in den hier vorzunehmenden Entwicklungen keinerlei neue Gedanken erfordern, werden die Beweise nur für (8) und (10) gegeben, wo sie weit durchsichtiger sind. Die wenigen für die Verschärfung notwendigen Modifikationen werden am Schlusse genau angegeben werden.

§ 1.

Satz. *Wenn für eine ganze transzendente Funktion*

$$(1a) \qquad M(r) \leqq e^{r^{\mu+\delta_1}} \quad \textit{für} \quad r \geqq \mathfrak{r}_1(\varepsilon_1)$$

ist, so ist

$$(8) \qquad M(r) \geqq \frac{\mathfrak{M}(r)}{r^{\frac{\mu}{2}+\varepsilon_5}} \quad \textit{für} \quad r \geqq \mathfrak{r}_5(\varepsilon_5).$$

Beweis. Wenn Überstreichen den Übergang zu den konjugiert komplexen Größen bedeutet, ist

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} \sum_{\alpha=0}^{\infty} c_\alpha r^\alpha e^{\alpha\varphi i} \cdot \sum_{\beta=0}^{\infty} \bar{c}_\beta r^\beta e^{-\beta\varphi i} d\varphi$$
$$= \sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty} c_\alpha \bar{c}_\beta r^{\alpha+\beta} \int_0^{2\pi} e^{(\alpha-\beta)\varphi i} d\varphi = 2\pi \sum_{\alpha=0}^{\infty} |c_\alpha|^2 r^{2\alpha}.$$

Da nach dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 d\varphi < [M(r)]^2$$

ist, so folgt

$$\sum_{\alpha=0}^{\nu} |c_\alpha|^2 r^{2\alpha} \leqq \sum_{\alpha=0}^{\infty} |c_\alpha|^2 r^{2\alpha} \leqq [M(r)]^2. \tag{12}$$

Ferner ist nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\sum_{\alpha=0}^{\nu} |c_\alpha| r^\alpha \leqq \sqrt{\sum_{\alpha=0}^{\nu} |c_\alpha|^2 r^{2\alpha}} \sqrt{\nu+1}. \tag{13}$$

Zerteilt man also $\mathfrak{M}(r)$, ähnlich wie es Lindelöf in seinem Beweise tut, folgendermaßen:

$$\mathfrak{M}(r) = \sum_{n=0}^{\nu} |c_n| r^n + \sum_{n=\nu+1}^{\infty} |c_n| r^n,$$

so folgt aus (12) und (13)

$$\mathfrak{M}(r) \leqq \sqrt{\nu+1}\, M(r) + \sum_{n=\nu+1}^{\infty} |c_n| r^n. \tag{14}$$

Bisher war der Index ν völlig willkürlich. Verfügt man über ihn jetzt so, daß

$$\sqrt[n]{|c_n|} \cdot r \leqq \vartheta < 1 \quad \text{für} \quad n \geqq \nu + 1, \tag{15}$$

was wegen $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{c_n} = 0$ bei gegebenem r gewiß möglich ist, so wird die zweite Summe auf der rechten Seite von (14) unter

$$\vartheta^{\nu+1} + \vartheta^{\nu+2} + \ldots = \frac{\vartheta^{\nu+1}}{1-\vartheta}$$

gelegen sein, also unter einer vorgebbaren Konstante K. Es bleibt nur die Frage, wie groß man bei vorgegebenem K und dadurch bestimmtem $\vartheta < 1$ den Index ν wählen muß, damit (15) gilt. Nun ist nach dem in (3) der Einleitung angegebenen Satze:

$$\sqrt[n]{|c_n|} \leqq \frac{1}{n^{\frac{1}{\mu} - \varepsilon_2}} \quad \text{für} \quad n \geqq \mathfrak{n}_2(\varepsilon_2). \tag{16}$$

Damit (15) gilt, genügt es also jedenfalls, ν so zu wählen, daß

$$\frac{r}{(\nu+1)^{\frac{1}{\mu}-\varepsilon_2}} \leqq \vartheta < 1 \quad \text{und} \quad \nu \geqq \mathfrak{n}_2(\varepsilon_2)$$

ist. Dazu muß

$$(\nu+1)^{\frac{1}{\mu}-\varepsilon_2} \geqq \frac{r}{\vartheta},$$

d. h.

$$(17) \qquad \nu+1 \geqq \left(\frac{r}{\vartheta}\right)^{\frac{\mu}{1-\mu\varepsilon_2}} \quad \text{und} \quad \nu \geqq \mathfrak{n}_2(\varepsilon_2)$$

sein. Wählt man ν gleich der kleinsten ganzen Zahl, die (17) genügt, so wird daher

$$(18) \qquad \mathfrak{n}_2(\varepsilon_2) < \nu+1 \leqq \left(\frac{r}{\vartheta}\right)^{\frac{\mu}{1-\mu\varepsilon_2}} + 1,$$

und daher wegen (14)

$$\mathfrak{M}(r) < \sqrt{\left(\frac{r}{\vartheta}\right)^{\frac{\mu}{1-\mu\varepsilon_2}} + 1} \cdot M(r) + K,$$

wo r gemäß (18) einen von ε_2 abhängenden Anfangswert $\mathfrak{r}_2(\varepsilon_2)$ überschritten haben muß. Dies gilt bei beliebig vorgegebenem ε_2. Es ist klar, daß man dieses so wählen kann, daß

$$(8) \qquad \mathfrak{M}(r) \leqq M(r) \cdot r^{\frac{\mu}{2}+\varepsilon_5} \quad \text{für} \quad r \geqq \mathfrak{r}_5(\varepsilon_5)$$

wird.

§ 2.

Von der folgenden Funktion mit der Wachstumsordnung μ

$$(19) \qquad F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{D\cdot b_\nu} \frac{e^{k^2 \pi \xi i}}{(b_\nu!)^{\frac{1}{\mu}} \cdot b_\nu^{\frac{k}{\mu}}} \cdot z^{b_\nu+k}$$

wird die Behauptung aufgestellt:

$$(10) \qquad \frac{\mathfrak{M}(r)}{M(r)} \geqq C \cdot r^{\frac{\mu}{2}} \quad \text{für} \quad r = r_1, r_2, \ldots \to \infty,$$

wo C beliebig groß vorgegeben sein darf. In (19) bedeutet μ irgendeine positive, D eine ganze positive Zahl. ξ ist die Irrationalzahl der Ungleichung (11). Die b_ν bilden eine monotone Folge von ganzen positiven

Zahlen. Damit in $F(z)$ keine Potenz von z mehrfach auftritt, muß diese Folge die Bedingung

$$b_{\nu-1} + D\, b_{\nu-1} < b_\nu \tag{20}$$

für jedes ν erfüllen; im Laufe des Beweises werden sich noch einige schärfere Anforderungen an die b_ν als notwendig herausstellen, deren Erfüllbarkeit klar sein wird, und am Schluß wird D in passender Größe gewählt werden müssen. Die Folge r_ν, für die die Behauptung (10) alsdann bewiesen werden wird, ist

$$r_1 = b_1^{\frac{1}{\mu}};\quad r_2 = b_2^{\frac{1}{\mu}},\ \ldots,\ r_\nu = b_\nu^{\frac{1}{\mu}},\ \ldots. \tag{21}$$

Für z wird also in (19) $r_\delta \cdot e^{\varphi i}$ eingesetzt, wo r_δ aus der Folge (21) herausgegriffen ist.

Zunächst wird für $\mathfrak{M}(r_\delta)$ eine *untere* Schranke gefunden:

$$\mathfrak{M}(r_\delta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{D b_\nu} \frac{r_\delta^{b_\nu} \cdot r_\delta^{k}}{(b_\nu!)^{\frac{1}{\mu}} \cdot b_\nu^{\frac{b}{\mu}}}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\delta-1} \sum_{k=1}^{D b_\nu} \frac{r_\delta^{b_\nu} \cdot r_\delta^{k}}{(b_\nu!)^{\frac{1}{\mu}} \cdot b_\nu^{\frac{k}{\mu}}} + \sum_{k=1}^{D b_\delta} \frac{r_\delta^{b_\delta} \cdot r_\delta^{k}}{(b_\delta!)^{\frac{1}{\mu}} \cdot b_d^{\frac{k}{\mu}}} + \sum_{\nu=\delta+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{D b_\nu} \frac{r_\delta^{b_\nu} \cdot r_\delta^{k}}{(b_\nu!)^{\frac{1}{\mu}} \cdot b_\nu^{\frac{k}{\mu}}}$$

$$> \sum_{k=1}^{D b_\delta} \frac{r_\delta^{b_\delta} \cdot r_\delta^{k}}{(b_\delta!)^{\frac{1}{\mu}} \cdot b_\delta^{\frac{k}{\mu}}} = \sum_{k=1}^{D b_\delta} \frac{r_\delta^{b_\delta}}{(b_\delta!)^{\frac{1}{\mu}}}.$$

$$\mathfrak{M}(r_\delta) > D\, b_\delta \frac{r_\delta^{b_\delta}}{(b_\delta!)^{\frac{1}{\mu}}}. \tag{22}$$

Sodann ergibt sich eine *obere* Schranke für $M(r_\delta)$ folgendermaßen. Die Funktion wird dazu in dieselben drei Teile zerlegt, wie bei der Bestimmung der unteren Schranke für $\mathfrak{M}(r_\delta)$.

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\delta-1} \sum_{k=1}^{D b_\nu} \frac{e^{k^2 \pi \xi i}\, z^{b_\nu + k}}{(b_\nu!)^{\frac{1}{\mu}} \cdot b_\nu^{\frac{k}{\mu}}} + \sum_{k=1}^{D b_\delta} \frac{e^{k^2 \pi \xi i}\, z^{b_\delta + k}}{(b_\delta!)^{\frac{1}{\mu}} \cdot b_\delta^{\frac{k}{\mu}}} + \sum_{\nu=\delta+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{D b_\nu} \frac{e^{k^2 \pi \xi i}\, z^{b_\nu + k}}{(b_\nu!)^{\frac{1}{\mu}} \cdot b_\nu^{\frac{k}{\mu}}}$$

Das Maximum des absoluten Betrages auf dem Kreise mit dem Radius r_δ um den Nullpunkt sei für den ersten Teil $M_1(r_\delta)$, für den zweiten Teil $M_2(r_\delta)$, für den dritten Teil $M_3(r_\delta)$. Dann gilt offenbar die Ungleichung

$$M(r_\delta) \leqq M_1(r_\delta) + M_2(r_\delta) + M_3(r_\delta). \tag{23}$$

Für die drei Teile der rechten Seite von (23) werden nun nacheinander obere Schranken gefunden.

I. $M_2(r_\delta)$ ist der wichtigste Teil.

$$M_2(r_\delta) = \frac{r_\delta^{b_\delta}}{(b_\delta!)^{\frac{1}{\mu}}} \cdot \operatorname*{Max}_{|z|=r_\delta} \left| \sum_{k=1}^{D b_\delta} e^{k^2 \pi \xi i} \frac{z^k}{r_\delta^k} \right|.$$

Setzt man hier $\frac{z}{r_\delta} = t$, so ist $|t| = 1$

$$M_2(r_\delta) = \frac{r_\delta^{b_\delta}}{(b_\delta!)^{\frac{1}{\mu}}} \cdot \operatorname*{Max}_{|t|=1} \left| \sum_{k=1}^{D b_\delta} e^{k^2 \pi \xi i} t^k \right|.$$

Nach (11) folgt daraus

(24) $$M_2(r_\delta) \leqq A \sqrt{D b_\delta} \frac{r_\delta^{b_\delta}}{(b_\delta!)^{\frac{1}{\mu}}}.$$

II. Da $r_\delta = b_\delta^{\frac{1}{\mu}}$ ist, hat man

$$M_3(r_\delta) \leqq \frac{r_\delta^{b_{\delta+1}+1}}{(b_{\delta+1}!)^{\frac{1}{\mu}} \cdot b_{\delta+1}^{\frac{1}{\mu}}} + \frac{r_\delta^{b_{\delta+1}+2}}{(b_{\delta+1}!)^{\frac{1}{\mu}} \cdot b_{\delta+1}^{\frac{2}{\mu}}} + \ldots$$

$$\leqq \frac{r_\delta^{b_\delta}}{(b_\delta!)^{\frac{1}{\mu}}} \frac{r_\delta}{r_{\delta+1}} + \frac{r_\delta^{b_\delta}}{(b_\delta!)^{\frac{1}{\mu}}} \cdot \left(\frac{r_\delta}{r_{\delta+1}}\right)^2 + \ldots.$$

Wegen (20) ist $\frac{r_\nu}{r_{\nu+1}} \leqq s < 1$, wo s für alle ν konstant gewählt werden kann. Setzt man außerdem

$$\frac{s}{1-s} = E,$$

so folgt

$$M_3(r_\delta) \leqq \frac{r_\delta^{b_\delta}}{(b_\delta!)^{\frac{1}{\mu}}} (s + s^2 + s^3 + \ldots)$$

(25) $$M_3(r_\delta) \leqq \frac{r_\delta^{b_\delta}}{(b_\delta!)^{\frac{1}{\mu}}} \cdot E.$$

III. Wenn die bisher den b_ν lediglich auferlegte Bedingung (20) verschärft wird zu der folgenden

(26) $$(b_{\nu-1} + D b_{\nu-1})^3 < b_\nu,$$

so ist die Anzahl aller Glieder des ersten Teiles kleiner als $\sqrt[3]{b_\delta}$. Wird außerdem noch verlangt, daß

$$b_1 > H \tag{27}$$

ist, wo H gleich einer festen ganzen Zahl oberhalb einer bestimmten Grenze, z. B. gleich 9 gesetzt werden kann, so ist der absolute Betrag jedes Gliedes des ersten Teiles für $|z| = r_\delta$ kleiner als der absolute Betrag jedes Gliedes des zweiten Teiles, der gleich

$$\frac{r_\delta^{b_\delta}}{(b_\delta!)^{\frac{1}{\mu}}}$$

ist[4]). Folglich ist

$$M_1(r_\delta) < \sqrt[3]{b_\delta}\,\frac{r_\delta^{b_\delta}}{(b_\delta!)^{\frac{1}{\mu}}}. \tag{28}$$

---

[4]) Zum Beweise für diese Behauptung sei aus den Gliedern des ersten Teils ein beliebiges herausgegriffen, dessen absoluter Betrag für $|z| = r_\delta$ gleich

$$\frac{r_\delta^{b_\lambda + k}}{(b_\lambda!)^{\frac{1}{\mu}} \cdot b_\lambda^{\frac{k}{\mu}}}$$

sei. Das Verhältnis w des absoluten Betrages dieses Gliedes zu dem absoluten Betrage eines Gliedes des zweiten Teiles ist

$$w = \frac{r_\delta^{b_\lambda + k} \cdot (b_\delta!)^{\frac{1}{\mu}}}{(b_\lambda!)^{\frac{1}{\mu}} \cdot b_\lambda^{\frac{k}{\mu}} \cdot r_\delta^{b_\delta}}.$$

Da $b_\lambda + k$ nach (25) kleiner als $\sqrt[3]{b_\delta}$ ist, hat man

$$w < \frac{r_\delta^{\sqrt[3]{b_\delta}}\,(b_\delta!)^{\frac{1}{\mu}}}{r_\delta^{b_\delta}} = \left(\frac{b_\delta^{\sqrt[3]{b_\delta}} \cdot b_\delta!}{b_\delta^{b_\delta}}\right)^{\frac{1}{\mu}}.$$

Aus der Stirlingschen Formel

$$p! \sim p^p \cdot e^{-p} \cdot \sqrt{2\pi p}$$

folgt weiter

$$\lg w < (\sqrt[3]{b_\delta}\lg b_\delta + b_\delta \log b_\delta - b_\delta + o(b_\delta) - b_\delta \lg b_\delta) \cdot \frac{1}{\mu}$$

$$\lg w < -\frac{1}{\mu} b_\delta + o(b_\delta)$$

$$\lg w < b_\delta\left(-\frac{1}{\mu} + \varepsilon(b_\delta)\right),$$

(Fortsetzung der Fußnote [4]) auf der nächsten Seite.)

Aus (23), (24), (25), (28) folgt

$$M(r_\delta) \leqq \frac{r_\delta^{b_\delta}}{(b_\delta!)^{\frac{1}{\mu}}}\left(A\sqrt{D\,b_\delta} + E + \sqrt[3]{b_\delta}\right). \tag{29}$$

Nach (22) folgt

$$\frac{\mathfrak{M}(r_\delta)}{M(r_\delta)} > \frac{\dfrac{r_\delta^{b_\delta}}{(b_\delta!)^{\frac{1}{\mu}}} D\cdot b_\delta}{\dfrac{r_\delta^{b_\delta}}{(b_\delta!)^{\frac{1}{\mu}}}\left(A\sqrt{D\,b_\delta}+E+\sqrt[3]{b_\delta}\right)}$$

$$> \sqrt{b_\delta}\,\frac{D}{A\sqrt{D}+\dfrac{E}{\sqrt{b_\delta}}+\dfrac{1}{\sqrt[6]{b_\delta}}}$$

$$> \sqrt{b_\delta}\,\frac{D}{A\sqrt{D}\,(1+\varepsilon_7(b_\delta))},$$

wo $\lim\limits_{b_\delta \to \infty} \varepsilon_7(b_\delta) = 0$. Es ist klar, daß man die ganze Zahl D so wählen kann, daß der letzte Bruch größer als eine vorbestimmte Konstante C wird. Setzt man dann noch $b_\delta = r_\delta^\mu$, so wird aus der letzten Ungleichung

$$\frac{\mathfrak{M}(r_\delta)}{M(r_\delta)} > C\cdot r_\delta^{\frac{\mu}{2}}.$$

Die Behauptung (10) ist damit für die ganze Folge (21) bewiesen und damit zugleich gezeigt worden, daß (8) sich nicht weiter verschärfen läßt.

Schlußbemerkung.

Will man in der gleichen Weise die schärferen Ungleichungen (9a) und (10b) beweisen, so muß man im § 1 für die Ungleichung (16) statt des durch die Gleichung (3) dargestellten Satzes, den durch die Gleichungen (6) dargestellten verschärften Satz Lindelöfs benutzen. Im § 2 hat man statt der Funktion (19) die Funktion

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{[g(b_\nu)]} \frac{e^{k^2 \pi \xi i}\, z^{b_\nu + k}}{(b_\nu!)^{\frac{1}{\mu}} \cdot b_\nu^{\frac{k}{\mu}}}$$

---

wo $$\lim_{b_\delta \to \infty} \varepsilon(b_\delta) = 0.$$

Wenn man also, wie es Bedingung (27) fordert, b_1 größer als eine bestimmte Zahl H nimmt, und somit jedes b_ν größer als H hat, wird $\varepsilon(b_\delta) < 1$, $\log w$ also negativ, w selbst ein echter Bruch. Die angemerkte Behauptung ist also richtig. Eine einfache Rechnung zeigt, daß man nicht nötig hat, H größer als 9 zu nehmen.

zu nehmen, wo

$$g(b_\nu) = \frac{m \cdot e}{\mu^{\mu_1 - 1}} b_\nu (\lg b_\nu)^{\mu_1} \ldots (\lg_\varkappa b_\nu)^{\mu_\varkappa}$$

ist, und wo $[g(b_\nu)]$ die größte ganze Zahl unter $g(b_\nu)$ bedeutet. Von dieser Funktion läßt sich dann zeigen, daß sie den Ungleichungen (4) und (10b) genügt. Für die Bedingung (26) ist zu setzen]

$$(b_{\nu-1} + g(b_{\nu-1}))^3 < b_\nu.$$

In (27) ist H mindestens so groß zu nehmen, daß $\lg_\varkappa b_1$ positiv ist. Im übrigen bleibt der Gang des Beweises genau der gleiche.

Kiel, 9. Juli 1925.

(Eingegangen am 14. 7. 1925.)

Bemerkung zu vorstehender Arbeit.

Für den Zweck dieser Arbeit genügt es, wie ich nachträglich bemerke, anstatt der schwierigen Überlegungen von Herrn Hardy die elementare Untersuchung des Herrn Szasz, Math. Zeitschr. **8**, S. 235 heranzuziehen.

Kiel, 6. Mai 1926.

Toeplitz.