

# Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen.

## I. Teil. Funktionen einer Variablen.

Von

S. Bochner in Berlin.

### Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit<sup>1)</sup> beschäftigen wir uns mit einigen Fragen aus der Theorie der fastperiodischen Funktionen von H. Bohr, welche von diesem Verfasser nach Vorausschickung von drei C.-R.-Noten, Bohr [1, 2, 3], in drei Abhandlungen, Bohr [4, 5, 6], und einer kleinen Note, Bohr [7], entwickelt worden ist<sup>2)</sup>, und im vorliegenden ersten Teil werden wir es nur mit den fp. Funktionen (wir gebrauchen die Abkürzung „fp.“ für das Wort „fastperiodisch“) einer reellen Variablen aus Abh. I und II zu tun haben.

Für das Folgende brauchen wir nur die Einzelheiten aus Abh. I, Kap. I und einiges aus Abh. II vorauszusetzen, und werden das Wichtigste hiervon, mit verschiedenen Bemerkungen versehen, im § 1 resümieren; überdies werden wir den Fundamentalsatz heranziehen.

Den Beweis des Approximationssatzes, d. h. des Satzes, daß man jede fp. Funktion durch endliche trigonometrische Summen gleichmäßig approximieren kann, führen wir mit Hilfe einer Summation der Fourierreihe, welche darin besteht, daß — in Verallgemeinerung der Fejérschen Mittelwertbildung bei reinperiodischen Funktionen — aus der Fourierreihe formal trigonometrische Polynome gebildet werden, von denen mit Hilfe des Fundamentalsatzes gezeigt wird, daß sie gegen die durch die Fourierreihe dargestellte Funktion gleichmäßig konvergieren.

In Abh. II wurde beim Beweis des Approximationssatzes zuerst zu einer mit der gegebenen fp. Funktion eng zusammenhängenden Funktion

<sup>1)</sup> Eine Voranzeige erschien in einer C.-R.-Note, Bochner [1].

<sup>2)</sup> Wir werden die ersten zwei Abhandlungen, [4] und [5], in der angegebenen Reihenfolge als Abh. I und Abh. II zitieren.

unendlich vieler Variablen übergegangen (vgl. § 2, 7.) und dann von dieser Funktion die Approximierbarkeit durch trigonometrische Polynome nachgewiesen, wozu im Anhang II Fejéropolynome herangezogen wurden, während wir in § 2 zum Approximationssatz in einem Schritt, nämlich durch direkte Summation der fp. Funktion selbst gelangen werden<sup>3)</sup>.

Die §§ 2 und 3 enthalten das Summationsverfahren und einige Nebenergebnisse; und in den §§ 4 und 5 wird sich auf dem Wege über die Verschiebungsfunktion (§ 4, 1.) eine Auffassung der fp. Funktionen als „Normalfunktionen“ (§ 5, 1.) herausbilden, die wir auch im zweiten Teil dieser Arbeit, in welcher wir die Definition und die charakteristischen Eigenschaften der Fastperiodizität auf Funktionen mehrerer Variablen ausdehnen werden, vertreten werden.

### § 1.

#### Referat und Bemerkungen.

1. Definition. Eine (für  $-\infty < x < +\infty$  definierte und) stetige Funktion  $f(x) = u(x) + i v(x)$  soll fastperiodisch heißen, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Länge  $l = l(\varepsilon) > 0$  derart gibt, daß jedes Intervall  $\alpha < \tau < \beta$  der Länge  $\beta - \alpha = l$  mindestens eine Verschiebungszahl  $\tau = \tau(f, \varepsilon)$  enthält. Unter einer Verschiebungszahl  $\tau(f, \varepsilon)$  ist jede Zahl des Intervalls  $-\infty < \tau < +\infty$  zu verstehen, welche der Ungleichung

$$|f(x + \tau) - f(x)| \leq \varepsilon \quad (-\infty < x < +\infty)$$

genügt.

Bemerkung. Die Verschiebungszahlen liegen „relativ dicht auf der  $\tau$ -Achse“, d. h. für jedes  $\varepsilon_0$  ist die Gesamtheit der  $\tau(f, \varepsilon_0)$  auf der  $\tau$ -Achse in jedem Intervall einer angebbaren Länge  $l(\varepsilon_0)$  mit mindestens einer Zahl  $\tau(\varepsilon_0)$  vertreten.

Mit  $f(x)$  ist auch  $|f(x)|$  fastperiodisch.

2. Jede fp. Funktion ist beschränkt und gleichmäßig stetig.

Bemerkung. Die Bezeichnungen „beschränkt“, „gleichmäßig stetig“, „gleichmäßig konvergent“ usw. ohne Zusatz, beziehen sich immer auf das gesamte Definitionsgebiet der betrachteten Funktion (also in der Regel auf:  $-\infty < x < +\infty$ ).

3. Summe und Produkt von fp. Funktionen sind fp. Funktionen.

Bemerkung. Diese Erhaltungssätze beruhen darauf, daß zu zwei irgendwelchen fp. Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  relativ dicht gelegene

<sup>3)</sup> Es sei hier die Bemerkung gestattet, daß Verfasser das Summationsverfahren ohne Kenntnis der Abh. II — nur die Voranzeige in Bohr [2] war vorhanden — gefunden hat.

gemeinsame Verschiebungszahlen, d. h. Zahlen, die sowohl mit  $\tau(f, \varepsilon)$  als auch  $\tau(g, \varepsilon)$  zu bezeichnen sind, gehören.

Jedes Exponentialpolynom

$$\sum_{n=1}^N a_n e^{i\lambda_n x}$$

ist eine fp. Funktion.

Die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge von fp. Funktionen ist eine fp. Funktion.

Bemerkung. In einem Ausdruck der Form  $a e^{i\lambda x}$  ist immer  $\lambda$  als reell vorausgesetzt, hingegen  $a$  keiner Realitätsbedingung unterworfen.

4. Für jede fp. Funktion existiert der Mittelwert

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \left( = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(t) dt; \quad c \text{ reell} \right),$$

den wir mit  $M\{f(t)\}$  bezeichnen.

Bemerkung. Bei allen Mittelwertbildungen werden wir innerhalb der geschweiften Klammer  $\{ \}$  diejenige(n) Variable(n), über welche integriert werden soll, mit  $t$  (bzw.  $t_1, t_2, \dots$ ) bezeichnen, also z. B.

$$M\{H(t, x, \xi, c)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T H(t, x, \xi, c) dt.$$

5. Zu jeder fp. Funktion  $f(x)$  gibt es nur abzählbar viele Werte  $\lambda$ , für welche der Mittelwert

$$a(\lambda) = M\{f(t) e^{-i\lambda t}\}$$

von Null verschieden ist.

Mit den so herauspringenden Exponenten  $\lambda$ , die wir in irgendeiner Anordnung mit  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots$  bezeichnen (den Fourierexponenten) und den dazugehörigen Mittelwerten

$$A_{\Lambda_1} = a(\Lambda_1), \quad A_{\Lambda_2} = a(\Lambda_2), \quad A_{\Lambda_3} = a(\Lambda_3), \dots$$

(den Fourierkoeffizienten) bilden wir formal die zu  $f(x)$  gehörige Fourierreihe

$$f(x) \sim \sum A_{\Lambda_n} e^{i\Lambda_n x}.$$

Bemerkung. Abweichend von H. Bohr bezeichnen wir den zu  $\Lambda_n$  gehörigen Exponenten mit  $A_{\Lambda_n}$  und nicht mit  $A_n$ ; mit  $A_n$  ist ein zu  $\Lambda = n$  gehöriger Koeffizient gemeint. — Man kann in die Exponentenfolge zu denjenigen  $\Lambda_n$ , für welche  $A_{\Lambda_n} \neq 0$ , noch beliebig viele andere Exponenten  $\lambda$  in (höchstens) abzählbarer Anzahl hinzunehmen, wenn man ihnen die Fourierkoeffizienten  $A_{\lambda} = a(\lambda) = 0$  zuordnet. Derartige formalen Erweite-

rungen der Exponentenfolge werden wir als „Ergänzung“ bezeichnen, und die „unwesentlichen“ Terme von den „wesentlichen“ unterscheiden. Die Menge der wesentlichen Exponenten einer Funktion  $f(x)$  heiße ihre (charakteristische) Zahlenmenge  $L$  (bzw.  $L_0, L_v, \dots$ ).

6. Bei festgehaltenen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  fällt der Mittelwert

$$M\left\{ \left| f(t) - \sum_{v=1}^n a_v e^{i\lambda_v t} \right|^2 \right\}$$

am kleinsten aus für

$$a_v = a(\lambda_v) = A_{\lambda_v} \quad (v = 1, 2, \dots, n).$$

Es besteht die Besselsche Ungleichung

$$\sum |A_{\lambda_n}|^2 \leq M\{|f(t)|^2\}.$$

Bemerkung. Eine Folge von fp. Funktionen

$$(1) \quad \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$$

heiße im Mittel konvergent gegen  $f(x)$ , wenn die Limesgleichung

$$(2) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} M\{|\varphi_m(t) - f(t)|^2\} = 0$$

besteht. Auf Grund von 11. ergibt sich leicht, daß es zu einer Folge (1) nur eine einzige fp. Funktion  $f(x)$  geben kann, welche (2) befriedigt. Die Relation (2) zieht die (leicht verständliche) Limesgleichung

$$(3) \quad \lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} M\{|\varphi_m(t) - \varphi_n(t)|^2\} = 0$$

nach sich. Wenn eine Folge (1) der Limesgleichung (3) genügt, heiße sie im Mittel konvergent.

7. Eine Folge von fp. Funktionen

$$f_m(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_{\lambda_n}^{(m)} e^{i\lambda_n x}$$

konvergiere gleichmäßig gegen

$$f(x) \sim \sum A_{\lambda_n} e^{i\lambda_n x}$$

(die Exponentenfolgen sind beliebig „ergänzt“). Dann bestehen die Relationen

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_{\lambda_n}^{(m)} = A_{\lambda_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

8. Eine Menge  $A$  von fp. Funktionen  $\varphi(x)$  ist eine „ausgezeichnete Menge“, falls

a) die Funktionen „gleichartig gleichmäßig stetig“ sind, d. h. falls bei jedem  $\varepsilon$  für ein geeignetes  $\delta = \delta(\varepsilon)$  (das Stetigkeits- $\delta(\varepsilon)$ ) für alle Funktionen  $\varphi(x)$  und alle Punktepaare  $|x_1 - x_2| \leq \delta$  die Ungleichung

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq \varepsilon$$

besteht;

b) die Funktionen „gleichartig fastperiodisch“ sind, d. h. zu jedem  $\varepsilon$  relativ dicht gelegene gemeinsame Verschiebungszahlen  $\tau = \tau(\varepsilon)$  besitzen:

$$|\varphi(x) - \varphi(x + \tau)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } \varphi(x) \text{ aus } A.$$

Bemerkung. Wenn für zwei fp. Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  die Relation

$$\text{Ob. Gr. } |g(x + \tau) - g(x)| \leq \text{Ob. Gr. } |f(x + \tau) - f(x)| \quad (-\infty < \tau < +\infty) \\ -\infty < x < +\infty$$

besteht, nennen wir  $f(x)$  eine *Majorante* von  $g(x)$  und  $g(x)$  durch  $f(x)$  *majorisierbar*. Offenbar ist eine *majorisierbare Menge*, d. h. eine solche, zu der es eine gemeinsame (fp.) Majorante gibt, eine ausgezeichnete, weil die Stetigkeits- $\delta$  und die Verschiebungszahlen der Majorante gemeinsame Stetigkeits- $\delta$  und Verschiebungszahlen für die ganze Menge liefern.

9. Eine ausgezeichnete Folge von Funktionen

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots,$$

die im Mittel konvergent sind, ist gleichmäßig konvergent.

Insbesondere, damit die Folge  $\varphi_n(x)$  gegen die vorgegebene fp. Funktion  $f(x)$  gleichmäßig konvergiert, ist (notwendig und) hinreichend, daß sie gegen  $f(x)$  im Mittel konvergiert (vgl. 6. Bemerkung).

Erweitert man eine ausgezeichnete Menge  $A$  um ihre (durch gleichmäßige Approximation entstehenden) *Häufungsfunktionen*, so ist die so entstandene *abgeschlossene Hülle*  $H(A)$  wiederum eine ausgezeichnete Menge (und zwar mit denselben Stetigkeits- $\delta$  und Verschiebungszahlen).

10. Fundamentalsatz. Für eine fp. Funktion  $f(x) \sim \sum A_{A_n} e^{iA_n x}$  bestehen die Relationen

$$\sum |A_{A_n}|^2 = M\{|f(t)|^2\}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M\left\{|f(t) - \sum_{n=1}^N A_{A_n} e^{iA_n t}|^2\right\} = 0.$$

11. Es sei  $f(x)$  eine fp. Funktion. Aus  $M\{|f(t)|^2\} = 0$  folgt  $f(x) \equiv 0$ .

12. Aus 10. und 11. folgt der

Eindeutigkeitssatz. Eine fp. Funktion  $f(x)$  ohne wesentliche Terme,

$$f(x) \sim 0,$$

ist identisch Null,

$$f(x) \equiv 0.$$

13. Die fp. Funktion  $f(x)$  habe die wesentlichen Exponenten

$$A_1, A_2, A_3, \dots$$

Zu jedem  $N$  und  $\delta (< \pi)$  gibt es ein  $\varepsilon$ , so daß jede Verschiebungszahl  $\tau(f, \varepsilon)$  den Kongruenzungleichungen

$$(4) \quad |A_n \tau| \leq \delta \pmod{2\pi} \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$

genügen muß. Umgekehrt gibt es zu jedem  $\varepsilon$  ein  $N$  und  $\delta$ , so daß jede Zahl  $\tau$ , welche den Ungleichungen (4) genügt, eine Verschiebungszahl  $\tau(f, \varepsilon)$  ist (Abh. II, S. 105 und 115).

Bemerkung. Dieser „Zusammenhang“ ergibt sich auf Grund des Fundamentalsatzes.

14. Als *Zahlenmenge* bezeichnen wir eine endliche oder abzählbare Menge von untereinander verschiedenen reellen Zahlen. Eine Zahlenmenge  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$  heiße *reduziert*, wenn keine linearen Beziehungen

$$r_1 \alpha_1 + r_2 \alpha_2 + \dots + r_k \alpha_k = 0 \quad (|r_1| + |r_2| + \dots + |r_k| > 0)$$

mit rationalen  $r_v$  vorkommen.

15. Unter einer *Basis* einer Zahlenmenge  $Z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots)$  ist eine reduzierte Zahlenmenge  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$  zu verstehen, mit Hilfe welcher jede Zahl  $\zeta$  in der Gestalt

$$r_1 \alpha_1 + r_2 \alpha_2 + \dots + r_k \alpha_k$$

(eindeutig) dargestellt werden kann.

16. Von einer *Zerlegung* einer (beliebigen) Zahlenmenge  $Z$  (in linear unabhängige Bestandteile)

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots$$

sprechen wir dann, wenn keine lineare Gleichung

$$r_1 \zeta_1 + r_2 \zeta_2 + \dots + r_k \zeta_k = 0$$

mit Elementen  $\zeta$  aus verschiedenen  $Z_v$  vorkommen kann. — Jede Zusammenfassung solcher Teilmengen

$$Z'_v = \sum Z_{v_k}$$

$$Z = Z'_1 + Z'_2 + \dots$$

führt offenbar wieder zu einer Zerlegung.

17. Ein *Modul*  $M$  ist eine Zahlenmenge, die mit  $\alpha$  und  $\beta$  auch  $\alpha - \beta$  enthält; er heiße endlich, wenn er eine endliche Basis besitzt. Unter  $M(Z)$  verstehen wir den kleinsten Modul, der die (beliebige) Zahlenmenge  $Z$  enthält; demnach ist der Vereinigungsmodul  $M(M_1, M_2, \dots)$  der kleinste Modul, der alle Moduln  $M_v$  enthält.

Bemerkung. Aus 13. folgt durch dieselbe Schlußweise wie in Abh. II Seite 115 (d. h. unter Heranziehung des dortigen „Satzes B“ über diophantische Approximationen), daß falls  $g(x)$  durch  $f(x)$  majorisiert wird, der

Modul  $M_f = M(L_f)$  der Zahlenmenge  $L_f$  der Funktion  $f(x)$  den (entsprechenden) Modul  $M_g$  umfaßt, und allgemeiner, daß für eine Majorante  $f(x)$  der (beliebig vielen) Funktionen  $g(x), h(x), \dots$  der Modul  $M_f$  den Modul  $M(M_g, M_h, \dots)$  umfaßt.

18. Wenn ein Modul  $M$  eine solche Basis  $B = (\beta_1, \beta_2, \dots)$  besitzt, daß er sich als Vereinigungsmodul von eindimensionalen Moduln mit jeweils einem Element  $\beta_v$  als Basiselement auffassen läßt, dann nennen wir  $B$  eine echte Basis von  $M$ . Es gibt schon zweidimensionale Moduln, die keine echte Basis besitzen.

19. Bildet man mit einer reduzierten Zahlenmenge  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$  alle ganzzahligen Verbindungen

$$g_1 \alpha_1 + g_2 \alpha_2 + \dots + g_k \alpha_k,$$

so entsteht der ganze Modul  $G(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$  mit der ganzen Basis  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ . Ein rationalzahliger Modul  $R$  ist entweder ein  $G(\varrho)$  ( $\varrho$  rational) oder durch solche Moduln beliebig gut approximierbar

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} G(\varrho_n) \quad \varrho_n \rightarrow 0.$$

Daraus kann leicht gefolgert werden, daß jeder beliebige Modul durch ganze endliche Moduln approximiert werden kann.

## § 2.

### Ein Summationsverfahren.

1. Satz I. Approximationssatz. Jede fp. Funktion  $f(x)$  gestattet eine gleichmäßige Approximation durch Exponentialpolynome, d. h. endliche Summen der Gestalt

$$(1) \quad \sum_{n=1}^N a_n e^{i\lambda_n x},$$

sogar derart, daß die Exponenten  $\lambda_v$  ausschließlich der Folge der wesentlichen Exponenten von  $f(x)$  entnommen sind.

Beweis. Nach dem Fundamentalsatz liefern die Abschnitte der Fourierreihe Polynome,  $p_n(x)$ , welche im Mittel gegen  $f(x)$  konvergieren

$$(2) \quad M_{n \rightarrow \infty} \{ |p_n(t) - f(t)|^2 \} \rightarrow 0.$$

Aber schon bei reinperiodischen Funktionen sind die Abschnitte der Fourierreihe für gleichmäßige Konvergenz nicht ausreichend. Um zu Approximationspolynomen zu gelangen, genügt es (irgend)eine Folge von Polynomen zu haben, die im Mittel gegen  $f(x)$  konvergieren und eine ausgezeichnete Menge bilden (§ 1, 8. 9). Solche Folgen von Polynomen wollen wir aufweisen.

Nach Herrn Fejér erhält man für eine reinperiodische Funktion

$$(3) \quad f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \alpha e^{i n \alpha x}$$

Approximationspolynome, wenn man von den Partialsummen

$$s_n^\alpha(x) = \sum_{\nu=-n}^{+n} A_\nu \alpha e^{i \nu \alpha x}$$

die Mittelwerte bildet

$$S_n^\alpha(x) = \frac{s_0^\alpha + s_1^\alpha + \dots + s_{n-1}^\alpha}{n}$$

$$(4) \quad S_n^\alpha(x) = \sum_{\nu=-n}^{+n} \left(1 - \frac{|\nu|}{n}\right) A_\nu \alpha e^{i \nu \alpha x}.$$

Führt man den „Kern“

$$(5) \quad \Pi_n(t) = \frac{1}{n} \left(1 + \sum_{\nu=-1}^{+1} e^{-i \nu t} + \sum_{\nu=-2}^{+2} e^{-i \nu t} + \dots + \sum_{\nu=-n+1}^{n-1} e^{-i \nu t}\right)$$

$$(6) \quad \Pi_n(t) = \sum_{\nu=-n}^{+n} \left(1 - \frac{|\nu|}{n}\right) e^{-i \nu t}$$

ein, dann erhält man als unmittelbare Folge der Formel

$$A_\nu \alpha e^{i \nu \alpha x} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-i \nu \alpha (t-x)} dt = M\{f(t) e^{-i \nu \alpha (t-x)}\} \\ = M\{f(t+x) e^{-i \nu \alpha t}\}$$

die bekannte Darstellung

$$(7) \quad S_n^\alpha(x) = M\{f(x+t) \Pi_n(\alpha t)\}.$$

An  $\Pi_n(t) = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin n \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}\right)^2$  ist abzulesen, daß

$$(8) \quad \Pi_n(\alpha t) \geq 0$$

und an (6), daß

$$(9) \quad M\{\Pi_n(\alpha t)\} = 1,$$

weil ja  $\Pi_n(\alpha t)$  das konstante Glied 1 hat. Diese beiden Eigenschaften des Kernes sind bekanntlich die wahren Gründe für die Konvergenz der Folge (7).

Bildet man für eine beliebige fp. Funktion  $f(x) \sim \sum A_n \alpha e^{i A_n x}$  und beliebiges  $\alpha$  die Funktionen  $M\{f(x+t) \Pi_n(\alpha t)\}$ , so besteht auch dann die Identität

$$(10) \quad S_n^\alpha(x) = \sum_{\nu=-n}^{+n} \left(1 - \frac{|\nu|}{n}\right) A_\nu \alpha e^{i \nu \alpha x} = M\{f(x+t) \Pi_n(\alpha t)\},$$



andererseits hat die Fourierreihe von  $\Pi_{n_1}(\alpha_1 t) \dots \Pi_{n_k}(\alpha_k t)$  das konstante Glied 1, also

$$(19) \quad M\{\Pi_{n_1}(\alpha_1 t) \dots \Pi_{n_k}(\alpha_k t)\} = 1.$$

Ganz analog zu (14) erhält man daher die Relation

$$(20) \quad \text{Ob. Gr. } |S_{n_1, \dots, n_k}^{\alpha_1, \dots, \alpha_k}(x + \tau) - S_{n_1, \dots, n_k}^{\alpha_1, \dots, \alpha_k}(x)| \leq \text{Ob. Gr. } |f(x + \tau) - f(x)|,$$

$-\infty < x < +\infty$    $-\infty < x < +\infty$

welche besagt, daß die Gesamtheit aller möglichen Fejérrpolynome  $S_{n_1, \dots, n_k}^{\alpha_1, \dots, \alpha_k}$  (mit den beliebigen Basen  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ ) eine majorisierbare Menge bildet (mit  $f(x)$  als Majorante). Jede im Mittel konvergente Folge von Fejérrpolynomen einer und derselben Funktion  $f(x)$  ist also gleichmäßig konvergent, und jede gegen  $f(x)$  mittelkonvergente Folge konvergiert gleichmäßig gegen  $f(x)$ .

Daß man aber  $f(x)$  beliebig gut durch Fejérrpolynome im Mittel approximieren kann, ist leicht einzusehen. Man braucht nur nach Wahl einer Basis  $(\beta_1, \beta_2, \dots)$  für die Exponenten  $\Lambda_n$  für ein genügend großes  $k$ , genügend großes  $m$  und genügend große  $n_1, n_2, \dots, n_k$  die Polynome  $S_{n_1, n_2, \dots, n_k}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}$  für  $\alpha_\nu = \frac{\beta_\nu}{m!}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, k$ ) zu bilden (vgl. die explizit hingeschriebenen Polynome in 3), w. z. b. w.

2. Wir formulieren fürs weitere einen Hilfssatz

Satz II. *Es sei eine fp. Funktion*

$$(21) \quad f(x) \sim \sum A_{\Lambda_n} e^{i\Lambda_n x} \quad (\text{alle } A_{\Lambda_n} \neq 0)$$

und eine Folge von fp. Funktionen der Gestalt

$$(22) \quad p_m(x) \sim \sum p_{\Lambda_n}^{(m)} A_{\Lambda_n} e^{i\Lambda_n x} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

mit

$$(23) \quad |p_{\Lambda_n}^{(m)}| \leq 1 \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

gegeben.

Damit die Folge (22) mittelkonvergent ist (bzw. gegen  $f(x)$  im Mittel konvergiert), ist notwendig und hinreichend, daß für jedes  $n$  der Limes

$$(24) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} p_{\Lambda_n}^{(\mu)} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} p_{\Lambda_n}^{(\mu)} = 1$$

vorhanden ist.

Beweis. Für die Mittelkonvergenz ist das Vorhandensein des Limes

$$(25) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty, \nu \rightarrow \infty} M\{|p_\mu(t) - p_\nu(t)|^2\} = 0$$

bzw.

$$(25) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} M\{|p_\mu(t) - f(t)|^2\} = 0,$$

d. h. der Limites (vgl. Fundamentalsatz)

$$(26) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty, \nu \rightarrow \infty} \sum |p_{A_n}^{(\mu)} - p_{A_n}^{(\nu)}|^2 |A_{A_n}|^2 = 0,$$

bzw.

$$(26) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \sum |p_{A_n}^{(\mu)} - 1|^2 |A_{A_n}|^2 = 0$$

maßgebend. Wegen  $A_{A_n} \neq 0$ , (23), und  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^{\infty} |A_{A_n}|^2 = 0$  bedingen sich aber die Limites (24) und (26) gegenseitig.

3. Wir formulieren jetzt eine gewisse Verschärfung von Satz I.

Satz III. Summationssatz. *Es sei irgendeine Zahlenmenge*

$$(27) \quad L = (A_1, A_2, A_3, \dots)$$

gegeben. Man kann ein Schema rationaler Koeffizienten

$$(28) \quad r_{A_n}^{(m)} \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots)$$

angeben, in welchem bei festem  $m$  nur endlich viele von Null verschieden sind, so daß für jede fp. Funktion  $f(x)$  der Form

$$(29) \quad \sum A_{A_n} e^{i A_n x}$$

(deren wesentliche Exponenten also ausschließlich der Menge  $L$  entnommen sind) die mit ihren Fourierkoeffizienten gebildeten Exponentialpolynome

$$(30) \quad S_m(x) = \sum r_{A_n}^{(m)} A_{A_n} e^{i A_n x}$$

eine Folge von Fejéropolynomen bilden, die gleichmäßig gegen  $f(x)$  konvergieren.

Beweis. Nach Wahl einer Basis  $(\beta_1, \beta_2, \dots)$  für die Menge  $L$  kann man setzen

$$\begin{aligned} S_m(x) &= S_{\frac{\beta_1}{m!}, \dots, \frac{\beta_m}{m!}}^{(m!)} \\ &= \sum_{\nu_1 = -(m!)^2}^{+(m!)^2} \dots \sum_{\nu_m = -(m!)^2}^{+(m!)^2} \left(1 - \frac{|\nu_1|}{(m!)^2}\right) \dots \left(1 - \frac{|\nu_m|}{(m!)^2}\right) \cdot A_{\nu_1 \frac{\beta_1}{m!} + \dots + \nu_m \frac{\beta_m}{m!}} e^{i(\nu_1 \frac{\beta_1}{m!} + \dots + \nu_m \frac{\beta_m}{m!})x} \\ &= \sum p_{A_n}^{(m)} A_{A_n} e^{i A_n x}. \end{aligned}$$

Um der Mittelkonvergenz der so gewählten Fejéropolynome gegen  $f(x)$  sicher zu sein, genügt es nachzuweisen

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_{A_n}^{(m)} = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Jeder festgehaltene Exponent  $A_n$  ist durch endlich viele Elemente aus  $(\beta_1, \beta_2, \dots)$  darstellbar, läßt also eine Darstellung

$$A_n = \frac{\mu_1}{m_0!} \beta_1 + \frac{\mu_2}{m_0!} \beta_2 + \dots + \frac{\mu_{m_0}}{m_0!} \beta_{m_0}$$

mit ganzen Zahlen  $m_0$  und  $\mu$  zu. Jeder Zahl  $m > m_0$  entspricht eine Darstellung

$$A_n = \frac{v_1}{m!} \beta_1 + \frac{v_2}{m!} \beta_2 + \dots + \frac{v_m}{m!} \beta_m$$

mit  $v_k = \mu_k \frac{m!}{m_0!}$  ( $1 \leq k \leq m_0$ ),  $v_k = 0$  ( $k > m_0$ ). Aus

$$p_{A_n}^{(m)} = \left(1 - \frac{|v_1|}{(m!)^2}\right) \left(1 - \frac{|v_2|}{(m!)^2}\right) \dots \left(1 - \frac{|v_{m_0}|}{(m!)^2}\right)$$

folgt wegen  $\frac{v_k}{(m!)^2} = \frac{\mu_k}{m_0! m!}$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_{A_n}^{(m)} = 1.$$

4. Wir wollen jetzt kurz die Bedeutung des Fundamentalsatzes für unsere bisherigen Beweise besprechen. Die in § 1, 1.—9. resümierten Eigenschaften der fp. Funktionen sind vom Fundamentalsatz unabhängig. Es sei eine fp. Funktion  $f(x)$  gegeben. Für ihre Fourierreihe  $\sum A_{A_n} e^{i A_n x}$  können wir gemäß Satz III summatorische Polynome  $S_1(x), S_2(x), \dots$  angeben, von denen ohne Fundamentalsatz nachgewiesen werden kann, daß sie ausgezeichnet und mittelkonvergent sind (weil ja die Gültigkeit des Parsevalschen Satzes für Exponentialpolynome unmittelbar klar ist), also gleichmäßig gegen eine Funktion konvergiert, deren Fourierreihe mit der Reihe  $\sum A_{A_n} e^{i A_n x}$  übereinstimmt. Damit ist aber der Fundamentalsatz nicht umgangen, sondern nur auf den Eindeutigkeitssatz zurückgeführt, weil man von vornherein nicht zur Annahme berechtigt ist, daß die so erhaltene Limesfunktion mit der Ausgangsfunktion  $f(x)$  übereinstimmt. Wir bemerken noch, daß die Entwicklungen in § 5 vom Fundamentalsatz unabhängig sind.

5. Der folgende Satz wird (in unwesentlich geringerem Umfange) in Abh. II, S. 207 unter Hinzunahme einer einschränkenden Voraussetzung über die Fourierkoeffizienten bewiesen.

Satz IV. Satz über gleichartige Summation. *Es sei eine ausgezeichnete Menge  $A$  von Funktionen  $\varphi(x)$  gegeben, welche eine gemeinsame Exponentenfolge besitzen. Jede Folge von gleichzeitig approximierenden Fejérpolynomen*

$$(31) \quad S_1(x), S_2(x), S_3(x), \dots$$

der Gestalt (30) liefert eine gleichartig gleichmäßige Approximation der Funktionen  $\varphi(x)$ , d. h. zu jedem  $\varepsilon$  gibt es ein  $N(\varepsilon)$ , so daß

$$(32) \quad |\varphi(x) - S_n^{(\varphi)} x| \leq \varepsilon$$

für alle  $\varphi(x)$  und alle  $n \geq N(\varepsilon)$ .

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit<sup>4)</sup> können wir voraussetzen, daß die Menge  $A$  eine beschränkte (§ 5, 2.) ist.

Wir benutzen (vgl. § 5, 3.), daß jede solche ausgezeichnete Menge eine gleichmäßig konvergente Teilfolge enthält.

Wir behandeln zuerst den Fall einer abgeschlossenen (vgl. § 1, 9.) Menge  $A$ . Gesetzt, unser Satz (IV) wäre für die Menge  $A$  und die Folge (31) nicht richtig. Dann gäbe es eine Folge

$$(33) \quad \varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), \varphi^{(3)}(x), \dots,$$

eine Größe  $\varepsilon_0$  und Indizes

$$(34) \quad N_1 < N_2 < N_3 < \dots \rightarrow \infty,$$

derart, daß

$$(35) \quad \text{Ob. Gr. } |\varphi^{(k)} - S_{N_k}^{(k)}| \geq \varepsilon_0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

$-\infty < x < +\infty$

Wegen der eingangs erwähnten Auswählbarkeit können wir die Folge (33) als gleichmäßig konvergent annehmen. Die Limesfunktion  $\varphi(x) = \lim_{v \rightarrow \infty} \varphi^{(v)}(x)$  ist wegen der Abgeschlossenheit von  $A$  durch die Folge (31) approximierbar, also

$$(36) \quad |\varphi - S_N| \leq \frac{\varepsilon_0}{4} \text{ für } N \geq N_0.$$

Weiterhin genügt  $\varphi(x)$  einer Approximation

$$(37) \quad |\varphi - \varphi^{(k)}| \leq \frac{\varepsilon_0}{4} \text{ für } k \geq k_0.$$

Jedes Polynom  $S_N - S_N^{(k)}$  ist ein Fejéropolynom von  $\varphi - \varphi^{(k)}$ , daher

$$(38) \quad |S_N - S_N^{(k)}| \leq \frac{\varepsilon_0}{4}, \text{ für } k \geq k_0 \text{ und alle } N.$$

<sup>4)</sup> Denn für jede ausgezeichnete Menge ist der Ausdruck  $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|$  gleichartig beschränkt für alle Funktionen der Menge und alle Punkte  $x_1$  und  $x_2$  (etwa nach Satz XIX). Wenn man nun alle Funktionen der Menge derart „normiert“, daß die konstanten Glieder ihrer Fourierreihen verschwinden, dann ist die so entstandene (ausgezeichnete) Menge von selbst beschränkt, weil ja dann Realteil und Imaginärteil einer jeden Funktion sowohl positive als auch negative Werte annehmen muß. Und die Voraussetzung der gleichzeitigen Approximierbarkeit bleibt erhalten, wenn man auch die Polynome (31) in derselben Weise normiert.

Aus (36), (37) und (38) folgt

$$|\varphi^{(k)} - S_N^{(k)}| \leq \frac{3\varepsilon_0}{4} \quad (k \geq k_0, N \geq N_0),$$

was aber mit (34) und (35) in Widerspruch steht.

Der Fall einer nicht abgeschlossenen Menge  $A$  erledigt sich durch die Bemerkung, daß die Polynome (31) auch für die abgeschlossene Hülle  $H(A)$  gleichzeitige Approximation liefern. Wenn nämlich  $\varphi(x)$  durch Funktionen  $\varphi_\nu(x)$  aus  $A$  beliebig approximierbar ist, dann ist jeder wesentliche Exponent  $A_n$  der Funktion  $\varphi(x)$  auch für eine der Funktionen  $\varphi_\nu(x)$  wesentlich, also ist

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_{A_n}^N = 1,$$

woraus nach oft angewandter Schlußweise die gleichmäßige Konvergenz von  $S_N^{(\varphi)}(x)$  gegen  $\varphi(x)$  folgt.

6. Der vorausgehende Satz legt die Frage nahe, ob nicht jede ausgezeichnete Menge eine *gemeinsame* Exponentenfolge haben muß. Diese Frage ist zu bejahen.

Satz V. *Jede ausgezeichnete Menge besitzt eine gemeinsame Exponentenfolge und daher eine gemeinsame gleichartig approximierende Folge von Polynomen.*

Den Beweis bringen wir in § 4, 9.

7. Zum Schluß wollen wir zeigen, wie man *auf Grund* des Approximationssatzes für die (beliebige) fp. Funktion  $f(x) \sim \sum A_{A_n} e^{iA_n x}$  die in Abh. II, Seite 125 ff. betrachtete zur (beliebigen) Basis  $(\beta_1, \beta_2, \dots)$  gehörige mehrvariablige grenzperiodische Funktion

$$(39) \quad F(x_1, x_2, \dots) \sim \sum A_{A_n} e^{i(r_{n,1}\beta_1 x_1 + r_{n,2}\beta_2 x_2 + \dots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n})} \\ = \sum B_n(x_1, x_2, \dots)$$

mit der Grenzperiode  $(\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \dots)$ , welche der Relation

$$(40) \quad f(x) = F(x, x, \dots)$$

genügt, erhalten kann.

Man approximiere die Funktion  $f(x)$  durch eine Folge von zur Basis  $(\beta_1, \beta_2, \dots)$  gehörenden Fejéropolynomen

$$f_\nu(x) = \sum p_n^{(\nu)} A_{A_n} e^{iA_n x} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots).$$

Die entsprechenden durch die Formeln (39) und (40) gelieferten „räumlichen“ Exponentialpolynome

$$F_\nu(x_1, x_2, \dots) \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

sind nunmehr im Raume  $(x_1, x_2, \dots)$  gleichmäßig konvergent; das folgt daraus, daß für jedes *Polynom*

$$(41) \quad F_\mu(x_1, x_2, \dots) - F_\nu(x_1, x_2, \dots)$$

die obere Grenze der absoluten Beträge nicht größer ist als die obere Grenze der absoluten Beträge von  $f_\mu(x) - f_\nu(x)$ , weil auf Grund des Kroneckerschen Satzes die Menge der Funktionswerte  $f_\mu(x) - f_\nu(x)$  in der Wertemenge von (41) überall dicht liegt (Abh. II, S. 136).

Die Limesfunktion  $F(x_1, x_2, \dots)$  ist offenbar grenzperiodisch mit der Grenzperiode  $(\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \dots)$  und erfüllt die Relation (40).

### § 3.

#### Einige Nebenergebnisse.

Wir erinnern an § 1, 14.—19.

1. Unter einer zur Menge  $Z$  gehörigen *Unterfunktion*  $f_Z(x)$  von  $f(x)$  verstehen wir diejenige fp. Funktion, sofern sie existiert, deren Fourierterme aus genau denjenigen Termen von  $f(x)$  bestehen, deren Exponenten in  $Z$  enthalten sind. Eine Unterfunktion von  $f(x)$ , die sich durch irgendeine Folge aus der Gesamtheit aller (d. h. zu *allen* Basen von  $f(x)$  gehörigen) Fejéropolynome von  $f(x)$  approximieren läßt, nennen wir eine *Partialfunktion* von  $f(x)$ . Eine fp. Funktion, für welche der Modul  $M(L)$  eine endliche ganze Basis hat, heiße eine *Bohlsche Funktion* (vgl. Abh. II, S. 124).

Aus dem Beweisgang zu Satz I entnimmt man sehr leicht den

Satz VI. *Es sei eine fp. Funktion  $f(x)$  gegeben. Zu jedem beliebigen Modul  $M$  gehört eine mit  $f_M$  zu bezeichnende Partialfunktion von  $f(x)$ . Eine Folge von Partialfunktionen, die im Mittel gegen  $f(x)$  konvergiert, konvergiert gleichmäßig gegen  $f(x)$ . Man kann  $f(x)$  durch Bohlsche Funktionen approximieren, deren Basen in  $M(L)$  enthalten sind.*

2. Satz VII (von H. Bohr [7]). *Falls die Fourierrexponten  $\Lambda_n$  der Funktion  $f(x) \sim \sum A_{\Lambda_n} e^{i\Lambda_n x}$  eine reduzierte Zahlenmenge bilden, so konvergiert die Reihe  $\sum |A_{\Lambda_n}|$  und ihr Wert stimmt mit der oberen Grenze*

$$\Gamma = \text{Ob. Gr. } |f(x)| \\ -\infty < x < +\infty$$

überein.

Beweis. Man bilde die Ausdrücke

$$\Pi_2(\Lambda_\nu t) = \frac{1}{2} e^{-i\Lambda_\nu t} + 1 + \frac{1}{2} e^{i\Lambda_\nu t} \\ \Psi_k(t) = \Pi_2(\Lambda_1 t) \Pi_2(\Lambda_2 t) \dots \Pi_2(\Lambda_k t).$$

Auf Grund der Reduziertheit findet man sofort

$$\frac{1}{2} s_k(x) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^k A_{A_\nu} e^{i A_\nu x} = M\{f(x+t) \Psi_k(t)\}$$

und daraus

$$\left| \frac{1}{2} s_k(x) \right| \leq \Gamma \cdot M\{\Psi_k(t)\} = \Gamma.$$

Auf Grund des Kroneckerschen Satzes kann man durch passende Wahl von  $x$  die Terme  $A_{A_\nu} e^{i A_\nu x}$  in  $s_k(x)$  zugleich beliebig nahe an  $|A_{A_\nu}|$  heranzubringen, woraus dann folgt

$$\sum_{\nu=1}^k |A_{A_\nu}| \leq 2\Gamma,$$

also ist  $\sum |A_{A_n}|$  konvergent<sup>5)</sup>. Die Gleichheit  $\sum |A_{A_n}| = \Gamma$  ergibt sich leicht durch nochmalige Anwendung des Kroneckerschen Satzes auf die nunmehr als gleichmäßig konvergent erkannte Reihe  $\sum A_{A_n} e^{i A_n x}$ .

Satz VIII (Verallgemeinerung des voraufgehenden). *Es sei eine fp. Funktion und irgendeine Zerlegung (§ 1, 16.) ihrer Menge  $L$  gegeben*

$$L = L_1 + L_2 + \dots$$

*Jeder Zahlenmenge  $L_\nu$  entspricht dann eine Partialfunktion  $f_{L_\nu}$ , und die Summe*

$$(1) \quad f(x) = \sum f_{L_\nu}(x)$$

*ist absolut und gleichmäßig konvergent. — Es gibt sogar eine von  $x$  unabhängige Konstante  $K$ , so daß*

$$(2) \quad \sum |f_{L_\nu}(x)| \leq K.$$

Beweis. Daß jeder Zahlenmenge  $L_\nu$  eine Partialfunktion entspricht, folgt daraus, daß  $L_\nu$  der Durchschnitt von  $L$  mit einem Modul, nämlich dem Modul  $M(L_\nu)$  ist; desgleichen ist jede Summe  $f_{L_1} + f_{L_2} + \dots + f_{L_k}$  eine Partialfunktion. Da aber die letzteren Funktionen, wie leicht zu sehen, im Mittel gegen  $f(x)$  konvergieren, konvergieren sie gleichmäßig. Da nun die Reihe (1) in jeder Anordnung der Terme konvergiert, konvergiert sie absolut. — Den Nachweis der Schranke  $K$  deuten wir nur

<sup>5)</sup> Diese Beweisvariante stammt von Herrn H. Bohr. Der Beweis des Verfassers war wie der zu Satz VIII. — Bemerkenswert ist, wie wenig bei diesem Beweis zum Nachweis von  $\sum |A_{A_n}| \leq \Gamma$  die Fastperiodizität von  $f(x)$  herangezogen wird. Es genügt vorauszusetzen, daß  $|f(x)| \leq \Gamma$ , und daß für die (beliebig gegebene) reduzierte Zahlenmenge  $(A_1, A_2, \dots)$  für alle Zahlen  $A$  aus dem ganzen Modul  $G(A_1, A_2, \dots)$  die Mittelwerte  $A_A = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t) e^{-iAt} dt$  existieren und für  $A \neq A_1, A_2, \dots$  verschwinden.

an. Wegen der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der Mengen  $L_\nu$  durchlaufen die einzelnen Summanden  $f_{L_\nu}$  auf Grund des Kroneckerschen Satzes ihre Wertemengen unabhängig voneinander. Präziser: macht man die (unwesentliche) Annahme, daß  $f(x)$  reell und ohne konstantes Glied ist und bezeichnet man obere und untere Grenze von  $f(x)$  bzw.  $f_{L_\nu}(x)$  mit  $M$  und  $-m$ , bzw.  $M_\nu$  und  $-m_\nu$ , dann ist

$$\sum |f_{L_\nu}(x)| \leq \sum M_\nu + \sum m_\nu = M + m = K.$$

Aus der Approximierbarkeit durch Fejérrpolynome, nämlich aus der Fejérsummierbarkeit im Punkte  $x = 0$ , ist evident der (vgl. Bohr [7])

Satz IX. Für eine Fourierreihe  $\sum A_{A_n} e^{i A_n x}$  mit nur positiven Koeffizienten  $A_{A_n}$  ist  $\sum A_{A_n}$  konvergent.

3. Wir knüpfen an 1. an. In § 2, 1. haben wir gesehen, daß sich  $f(x)$  durch solche Fejérrpolynome  $S_{n_1, \dots, n_k}^{\alpha_1, \dots, \alpha_k}$  beliebig gut approximieren läßt, in denen jedes  $\alpha_\nu$  ein rationales Multiplum des Elementes  $\beta_\nu$  aus einer festgewählten Basis  $(\beta_1, \beta_2, \dots)$  von  $f(x)$  ist. Bei einer Partialfunktion der Gestalt  $f_M$  kann dies aber unmöglich werden, wenn  $M$  ein Modul ohne echte Basis ist; es gibt (nachweislich) Partialfunktionen  $f_M$ , bei denen man es zulassen muß, daß in den Approximationspolynomen  $S_{n_1, n_2, \dots, n_k}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}$  die Elemente  $\alpha_\nu$  lineare Verbindungen aus mehreren  $\beta_\nu$  sind, wie man auch die Basis  $(\beta_1, \beta_2, \dots)$  gewählt haben mag. — In dieser Richtung liegt noch der folgende

Satz X. Jede Partialfunktion  $f_U(x)$  von  $f(x)$  gehört zu einem Modul, d. h. ist ein  $f_M$ , mit einem passenden Modul  $M$ .

Beweis. Es genügt nachzuweisen: wenn die Exponenten  $A_1, A_2, \dots, A_k$  wesentlich in  $f_U$  vorkommen, so kommt der Exponent

$$A = g_1 A_1 + g_2 A_2 + \dots + g_k A_k$$

(mit beliebigen ganzen Zahlen  $g_\nu$ ) entweder wesentlich in  $f_U$  oder gar nicht in  $f(x)$  vor. Nun, wenn die Exponenten  $A_1, A_2, \dots, A_k$  wesentlich in  $f_U$  vorkommen, so müssen sie für  $n \geq n_0$  wesentlich in den Approximationspolynomen  $S_n$  vorkommen. In einem beliebigen der Polynome  $S_n$  mögen  $\sigma$  Basiselemente ( $\sigma$  ist mit  $n$  variabel) vorkommen, und die Fejérrkoeffizienten  $p_\varrho$  der Terme  $A_{A_\varrho} e^{i A_\varrho x}$  ( $\varrho = 1, 2, \dots, k$ ) die Gestalt

$$p_\varrho = \left(1 - \frac{|v_1^{(\varrho)}|}{n_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{|v_2^{(\varrho)}|}{n_2}\right) \dots \left(1 - \frac{|v_\sigma^{(\varrho)}|}{n_\sigma}\right) \quad (\varrho = 1, 2, \dots, k)$$

haben. Dann hat, für genügend großes  $n$  der Fejérrkoeffizient  $p$  von  $A_A e^{i A x}$  im selben Polynom  $S_n$  die Gestalt

$$p = \left(1 - \frac{|g_1 v_1^{(1)} + g_2 v_1^{(2)} + \dots + g_k v_1^{(k)}|}{n_1}\right) \dots \left(1 - \frac{|g_1 v_\sigma^{(1)} + g_2 v_\sigma^{(2)} + \dots + g_k v_\sigma^{(k)}|}{n_\sigma}\right).$$

Da die Zahlen  $k, g_1, g_2, \dots, g_k$  feste Zahlen sind, so muß bei wachsendem  $n$  mit den Koeffizienten  $p_e$  auch  $p$  gegen 1 konvergieren<sup>6)</sup>, was eigentlich zu beweisen war.

## § 4.

## Verschiebungsfunktionen.

1. Definition. Es sei irgendeine beschränkte Funktion  $f(x)$  im Intervall  $-\infty < x < +\infty$  gegeben. Unter der Verschiebungsfunktion  $v_f(\tau)$  von  $f(x)$  verstehen wir eine in  $-\infty < \tau < +\infty$  definierte reelle Funktion, welche in jedem Punkte  $\tau$  durch den Grenzwert

$$(1) \quad v_f(\tau) = \text{Ob. Gr.}_{-\infty < x < +\infty} |f(x + \tau) - f(x)|$$

gegeben ist.

Wir werden es im wesentlichen nur mit Verschiebungsfunktionen von fp. Funktionen zu tun haben (die gelegentlich schon in Abh. I, vgl. S. 87, genannt werden), und sie dann immer mit dem Buchstaben  $e$ , also  $e_f(\tau)$ , bezeichnen. Der Wert  $e_f(\tau)$  gibt für jedes  $\tau$  das kleinste  $\varepsilon$ , zu welchem  $\tau$  als Verschiebungszahl gehört.

Die Verschiebungsfunktion  $v_f(\tau)$  einer beliebigen Funktion  $f(x)$  erfüllt die Bedingungen

- a)  $v(\tau) \geq 0, \quad v(0) = 0,$
- b)  $v(\tau) = v(-\tau),$
- c)  $v(\tau_1 + \tau_2) \leq v(\tau_1) + v(\tau_2);$

die letzte folgt aus

$$\begin{aligned} \text{Ob. Gr.}_{-\infty < x < +\infty} |f(x + \tau_1 + \tau_2) - f(x)| &\leq \text{Ob. Gr.}_{-\infty < x < +\infty} |f(x + \tau_1 + \tau_2) - f(x + \tau_1)| \\ &\quad + \text{Ob. Gr.}_{-\infty < x < +\infty} |f(x + \tau_1) - f(x)|. \end{aligned}$$

Aus den Eigenschaften a), b), c) folgt

$$c^*) \quad |v(\tau_1 + \tau_2) - v(\tau_2)| \leq v(\tau_1).$$

Denn ersetzt man in

$$c) \quad v(\tau_1 + \tau_2) - v(\tau_2) \leq v(\tau_1)$$

<sup>6)</sup> Etwa nach dem Hilfssatz: Aus den Voraussetzungen

$$0 \leq a_s \leq \varepsilon \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq b_s \leq \eta \leq \frac{1}{2} \quad (s = 1, 2, \dots, \sigma)$$

$$\prod_{s=1}^{\sigma} (1 - a_s) \geq 1 - \varepsilon, \quad \prod_{s=1}^{\sigma} (1 - b_s) \geq 1 - \eta,$$

folgt

$$\prod_{s=1}^{\sigma} (1 - a_s - b_s) \geq 1 - \varepsilon - \eta.$$

den Buchstaben  $\tau_2$  durch  $-\tau_1 - \tau_2$  und berücksichtigt b), so erhält man

$$-v(\tau_1) \leq v(\tau_1 + \tau_2) - v(\tau_2).$$

Umgekehrt folgt aus c\*) die Bed. c). Die Eigenschaften a) b) c\*), demnach auch a) b) c), sind aber für eine Verschiebungsfunktion nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend. Denn besitzt eine Funktion  $h(\tau)$  diese Eigenschaften, dann ist

$$v_h(\tau) = \text{Ob. Gr. } |h(x + \tau) - h(x)| \leq h(\tau), \\ -\infty < x < +\infty$$

und da für  $x = 0$  das Gleichheitszeichen steht,

$$v_h(\tau) = h(\tau),$$

d. h. die Funktion  $h(\tau)$  ist eine Verschiebungsfunktion, nämlich von der Funktion  $h(x)$ . — Zugleich erkennen wir, daß eine Funktion  $v(\tau)$  dann und nur dann eine Verschiebungsfunktion, d. h. ein  $v_f(\tau)$  ist, wenn sie die Verschiebungsfunktion von sich selbst ist:

$$\text{Ob. Gr. } |v(x + \tau) - v(x)| = v(\tau). \\ -\infty < x < +\infty$$

An der Relation

$$\text{Ob. Gr. } |v_f(x + \tau) - v_f(x)| = \text{Ob. Gr. } |f(x + \tau) - f(x)|' \\ -\infty < x < +\infty$$

ist unmittelbar abzulesen, daß die Funktionen  $v_f(x)$  und  $f(x)$  zugleich gleichmäßig stetig (mit denselben Stetigkeits- $\delta$ ) sind, und daß zu jedem  $\varepsilon$  jede Verschiebungszahl  $\tau(f, \varepsilon)$  ein  $\tau(v_f, \varepsilon)$  ist und umgekehrt. Demnach ist die Verschiebungsfunktion  $v_f(\tau)$  dann und nur dann fastperiodisch, wenn  $f(x)$  fastperiodisch ist, d. h. wenn sie ein  $e_f(\tau)$  ist. — Aus

$$|e_f(x + \tau) - e_f(x)| \leq e_f(\tau)$$

ist weiterhin zu ersehen: damit die Funktion  $f(x)$  fastperiodisch ist, ist hinreichend, daß ihre Verschiebungsfunktion für den Punkt  $\tau = 0$  stetig ist und daß für jedes  $\varepsilon$  diejenigen Punkte  $\tau$ , für welche

$$e_f(\tau) \leq \varepsilon$$

ist, relativ dicht auf der  $\tau$ -Achse liegen (§ 1, 1.) Wir haben also den

**Satz XI.** *Damit eine Funktion  $e(\tau)$  eine (fp.) Verschiebungsfunktion ist, ist notwendig und hinreichend, daß sie die nachfolgenden Bedingungen a) b) c) d) oder a) b) c) d\*) erfüllt. — Die Verschiebungsfunktion von  $e(\tau)$  ist wiederum  $e(\tau)$ .*

a)  $e(\tau) \geq 0, \quad e(0) = 0,$

b)  $e(\tau) = e(-\tau),$

c)  $e(\tau_1 + \tau_2) \leq e(\tau_1) + e(\tau_2)$  bzw.  $|e(\tau_1 + \tau_2) - e(\tau_2)| \leq e(\tau_1).$

d)  $e(\tau)$  ist fastperiodisch.

d\*)  $e(\tau)$  ist stetig im Punkte  $\tau = 0$ , und für jedes  $\varepsilon$  liegen die Punkte  $\tau$ , für welche  $e(\tau) \leq \varepsilon$ , relativ dicht auf der  $\tau$ -Achse  $-\infty < \tau < +\infty$ .

2. Daß eine fp. Funktion und ihre Verschiebungsfunktion nicht nur denselben „Verschiebungs“- , sondern auch den gleichen Stetigkeitscharakter haben, liegt daran, daß die gleichmäßige Stetigkeit eine Verschiebbarkeit mit „unendlich kleinen“ Verschiebungszahlen ist. Aus

$$|e(x + \tau) - e(x)| \leq e(\tau)$$

ist zu ersehen, daß die Funktion  $e(\tau)$  gewissermaßen im Mittelpunkt  $\tau = 0$  am steilsten ist. Für genügend kleine  $\varepsilon$  erscheint das beste Stetigkeits- $\delta(\varepsilon)$  als das kleinste positive  $\tau$  für welches  $e(\tau) = \varepsilon$ .

3. Zwei verschiedene fp. Funktionen können dieselbe Verschiebungsfunktion haben, z. B.  $f(x)$  und  $f(x + k)$ , wenn  $k$  irgendeine reelle Zahl bedeutet,  $f(x)$  und  $\pm f(x) + a$  usw. Zwei solche Funktionen nennen wir *ähnlich*. Es können übrigens auch wesentlich verschiedene Funktionen ähnlich sein.

Satz XII. Die Limesfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge von fp. Verschiebungsfunktionen ist wieder eine fp. Verschiebungsfunktion.

Beweis. Man verifiziert sofort die Bedingungen a) b) c) d).

Satz XIII. Die Verschiebungsfunktionen

$$e_{f_1}(\tau), e_{f_2}(\tau), \dots$$

einer gleichmäßig konvergenten Folge von Funktionen

$$f_1(x), f_2(x), \dots \rightarrow f(x)$$

konvergieren gleichmäßig gegen die Verschiebungsfunktion  $e_f(\tau)$ .

Beweis. Aus

$$|f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

folgt

$$\left| |f_m(x + \tau) - f_m(x)| - |f(x + \tau) - f(x)| \right| \leq 2\varepsilon,$$

und daraus durch eine leichte Überlegung

$$|e_{f_m}(\tau) - e_f(\tau)| \leq 2\varepsilon.$$

5. Satz XIV. Die lineare Verbindung

$$(2) \quad a e_1(\tau) + b e_2(\tau) \quad (a > 0, b > 0)$$

zweier Verschiebungsfunktionen  $e_1(\tau)$  und  $e_2(\tau)$  ist wieder eine Verschiebungsfunktion.

Beweis. Es ist klar, daß a), b) c) erfüllt sind, und nach § 1, 3. ist (2) wieder fastperiodisch, also auch d) erfüllt.

Für die Funktionen  $e^{i\lambda x}$ ,  $\cos \lambda x$ ,  $\sin \lambda x$  ist die Verschiebungsfunktion  $= |1 - e^{i\lambda\tau}| = 2 \left| \sin \lambda \frac{\tau}{2} \right|$ . Demnach ist jede Summe  $\sum |a_n| |1 - e^{i\lambda_n \tau}|$  mit konvergenter Summe  $\sum |a_n|$  eine Verschiebungsfunktion. Für reduzierte  $\lambda_n$  ist  $\sum |a_n| |1 - e^{i\lambda_n \tau}|$  die Verschiebungsfunktion von  $f(x) = \sum a_n e^{i\lambda_n x}$ , wie man durch Anwendung des Satzes VII auf

$$f(x) - f(x + \tau) = \sum a_n (1 - e^{i\lambda_n \tau}) e^{i\lambda_n x}$$

erhält. Bei Gelegenheit bemerken wir, daß ein Exponentialpolynom nie eine Verschiebungsfunktion sein kann.

6. Satz XV. Die mit zwei Verschiebungsfunktionen  $e_1(\tau)$  und  $e_2(\tau)$  gebildete Funktion

$$e(\tau) = \text{Max}(e_1(\tau), e_2(\tau)),$$

die also in jedem Punkte  $\tau$  dem größeren der Werte  $e_1(\tau)$  und  $e_2(\tau)$  gleicht, ist eine Verschiebungsfunktion.

Beweis. Offenbar ist a) und b) erfüllt. Bedingung c) ergibt sich folgendermaßen. Aus

$$e_1(\tau_1 + \tau_2) \leq e_1(\tau_1) + e_1(\tau_2)$$

$$e_2(\tau_1 + \tau_2) \leq e_2(\tau_1) + e_2(\tau_2)$$

folgt

$$e_1(\tau_1 + \tau_2) \leq e(\tau_1) + e(\tau_2)$$

$$e_2(\tau_1 + \tau_2) \leq e(\tau_1) + e(\tau_2),$$

also auch

$$e(\tau_1 + \tau_2) \leq e(\tau_1) + e(\tau_2).$$

Die Bedingung d) ergibt sich daraus, daß für irgend zwei reelle fp. Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  die Funktion

$$\text{Max}(f(x), g(x)) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$$

nach § 1, 1. und 3. gleichfalls fastperiodisch ist.

Wir nannten in § 1, 8. die fp. Funktion  $f(x)$  eine Majorante von  $g(x)$ , wenn

$$e_f(\tau) \geq e_g(\tau) \quad (-\infty < \tau < +\infty)$$

bestand. In Abh. I wird bewiesen (vgl. § 1, 3.), daß je zwei fp. Funktionen relativ dicht gelegene gemeinsame Verschiebungszahlen haben, woraus dann folgt, daß die Summe zweier fp. Funktionen wieder fastperiodisch ist. Durch Anwendung dieses Satzes auf Verschiebungsfunktionen haben wir ihn dahin verschärfen können, daß es zu je zwei Funktionen sogar eine gemeinsame Majorante gibt, was offenbar viel mehr aussagt. Die Existenz einer Majorante wird schon durch Satz XIV sichergestellt, aber Satz XV besagt schärfer, daß es sogar die von vornherein denkbar „kleinste“ Majorante gibt.

Satz XVI. Die mit (beliebigen) Verschiebungsfunktionen

$$e_1(\tau), e_2(\tau), \dots, e_n(\tau)$$

gebildete Funktion

$$e(\tau) = \text{Max}(e_1(\tau), e_2(\tau), \dots, e_n(\tau))$$

ist wiederum eine Verschiebungsfunktion. Demnach besitzen fp. Funktionen in jeder endlichen Anzahl eine (sogar „kleinste“) Majorante, und um so mehr relativ dicht gelegene gemeinsame Verschiebungszahlen.

Beweis. Daß  $e(\tau)$  eine Verschiebungsfunktion ist, ergibt sich durch  $(n-1)$ -malige Anwendung des Satzes XV, unter Berücksichtigung von

$$\text{Max}(a, b, c) = \text{Max}(\text{Max}(a, b), c).$$

Unter der Majorante (von fp. Funktionen) schlechthin werden wir in der Regel die kleinste (Verschiebungs-)Majorante verstehen.

7. Satz XVII. Ähnliche Funktionen haben denselben Modul (also speziell jeweils  $f(x)$  und  $e_f(x)$ ).

Beweis. Von zwei ähnlichen Funktionen  $g(x)$  und  $h(x)$  ist die eine Majorante der andern, also nach § 1, 17.,  $M_g \leq M_h$  und  $M_h \leq M_g$ .

Satz XVIII. Es seien fp. Funktionen  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  und ihre Verschiebungsfunktionen  $e_1(\tau), e_2(\tau), \dots, e_n(\tau)$  und ihre Moduln  $M_1, M_2, \dots, M_n$  gegeben.

Der Modul  $M^*$  der Majorante  $e(\tau)$  der Funktionen  $e_\nu(\tau)$  stimmt genau mit dem Vereinigungsmodul  $\bar{M} = M(M_1, M_2, \dots, M_n)$  überein.

Es sei irgendeine Funktion  $F(u_1, u_2, \dots, u_n)$  gegeben, welche in einem Teile des  $n$ -dimensionalen Raumes

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (u_\nu = v_\nu + i w_\nu)$$

definiert und gleichmäßig stetig ist. Die Punktmenge

$$u_\nu = f_\nu(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots, n)$$

möge ganz in  $U$  gelegen sein. Dann ist die Funktion

$$F(x) = F(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

eine fp. Funktion der Variablen  $x$  und ihr Modul  $M_F$  ist im Modul  $M^* (= \bar{M})$  enthalten.

Beweis. Weil  $e(\tau)$  Majorante zu  $e_1(\tau), e_2(\tau), \dots, e_n(\tau)$  ist, ist  $\bar{M} \leq M^*$ ; und weil  $e_1(\tau) + e_2(\tau) + \dots + e_n(\tau)$  Majorante zu  $e(\tau)$  und aus Gründen der formalen Addition der Fourierreihen der Modul von  $e_1(\tau) + \dots + e_n(\tau)$  in  $\bar{M}$  enthalten ist, ist  $M^* \leq \bar{M}$ , also  $M^* = \bar{M}$ .

Offenbar ist  $F(x)$  gleichmäßig stetig. Bezüglich der Fastperiodizität können wir bei gegebenem  $\varepsilon$  ein  $\eta > 0$  derart bestimmen, daß

$$|F(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots, u_n^{(1)}) - F(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \dots, u_n^{(2)})| \leq \varepsilon$$

für

$$|u_v^{(1)} - u_v^{(2)}| \leq \eta \quad (v = 1, 2, \dots, n),$$

d. h. daß

$$|F(x+t) - F(x)| \leq \varepsilon,$$

wenn

$$|f_v(x+\tau) - f_v(x)| \leq \eta \quad (v = 1, 2, \dots, n),$$

also wenn  $\tau$  eine zu  $\eta$  gehörige Verschiebungszahl von  $e(\tau)$  ist. Hieraus folgt aber sowohl, daß  $F(x)$  fastperiodisch ist, als auch (nach § 1, 13. unter Benutzung der Schlußweise in Abh. II, S. 115), daß  $M_F$  in  $M^* (= \bar{M})$  enthalten ist.

8. Die folgenden zwei Sätze werden wir in einem beweisen.

Satz XIX. *Jede ausgezeichnete Menge von Funktionen ist eine majorisierbare Menge, und umgekehrt ist jede majorisierbare Menge eine ausgezeichnete (§ 1, 8.).*

Satz XX. *Jede majorisierbare Menge*

$$(3) \quad e_i(\tau) \quad (i \text{ durchläuft eine Indexmenge } D)$$

*besitzt auch die kleinstmögliche Majorante. Dies ist die Funktion*

$$(4) \quad e(\tau) = \text{Ob. Gr. } (e_i(\tau)),$$

*die also in jedem Punkte  $\tau$  als die obere Grenze aller Werte  $e_i(\tau)$  definiert ist.*

Beweis. Es sei eine ausgezeichnete Menge gegeben. Die Menge ihrer Verschiebungsfunktionen ist auch ausgezeichnet (mit denselben Stetigkeits- $\delta$  und Verschiebungszahlen). Es liege nun eine ausgezeichnete Menge der Gestalt (3) vor. Wenn wir zeigen, daß die Funktion (4) eine fp. Funktion ist, werden wir beide Sätze bewiesen haben. Die durch (4) definierte Funktion ist jedenfalls überall endlich, wie sich aus der gleichartigen Stetigkeit in Verbindung mit  $e_i(0) = 0$  ergibt. Von dieser Funktion werden wir a) b) c) d\*) nachweisen. Bed. a) b) sind unmittelbar verifizierbar. Aus

$$e_i(\tau_1 + \tau_2) \leq e_i(\tau_1) + e_i(\tau_2)$$

folgt

$$e_i(\tau_1 + \tau_2) \leq e(\tau_1) + e(\tau_2),$$

also

$$e(\tau_1 + \tau_2) \leq e(\tau_1) + e(\tau_2),$$

d. h. Bed. c) ist richtig. Aus der gleichartigen Stetigkeit der  $e_i(\tau)$  folgt die Stetigkeit von  $e(\tau)$  im Punkte  $\tau = 0$ , und für jede der zu  $\varepsilon$  gehörigen relativ dichten gemeinsamen Verschiebungszahlen  $\tau$  ist  $e(\tau) \leq \varepsilon$ . Also ist d\*) erfüllt.

9. Jetzt ist es sehr leicht, zu Satz V den Beweis nachzutragen, daß jede ausgezeichnete Menge eine gemeinsame Exponentenfolge besitzt. Das folgt einfach daraus, daß die Funktionen eine Majorante haben, und alle ihre Exponenten im Modul dieser Majorante enthalten sind (§ 1, 17. Bemerkung).

Wir können die Aussage noch präzisieren.

Satz XXI. *Es sei eine ausgezeichnete Menge*

$$e_i(\tau) \quad (i \text{ durchläuft eine Indexmenge } D)$$

von Verschiebungsfunktionen gegeben, ihre Moduln seien  $M_i$  und die (kleinste) Majorante der Menge und ihr Modul seien  $e(\tau)$  und  $M^*$ . Der Vereinigungsmodul  $M(M_i)$  aller Moduln  $M_i$  genügt der Gleichung

$$M(M_i) = M^*.$$

Beweis. Aus § 1, 17. ist zu ersehen, daß die Bildung des Vereinigungsmoduls auch für nicht abzählbare Mengen  $D$  sinnvoll ist und daß die Ungleichung

$$M(M_i) \leq M^*$$

besteht. Bleibt nur noch zu beweisen

$$M(M_i) \geq M^*.$$

Wir wählen eine überall auf der  $\tau$ -Achse dicht liegende abzählbare Punktmenge  $\tau_v$  und eine Folge von Funktionen

$$e_1(\tau), e_2(\tau), e_3(\tau), \dots,$$

deren obere Grenze in jedem der Punkte  $\tau_v$  mit  $e(\tau_v)$  übereinstimmt. Die Funktionen

$$(5) \quad \eta_\sigma(\tau) = \text{Max}(e_1(\tau), e_2(\tau), \dots, e_\sigma(\tau)) \quad (\sigma = 1, 2, 3, \dots)$$

bilden dann eine (endliche oder unendliche) Folge von monoton wachsenden Funktionen, die alle von  $e(\tau)$  majorisiert werden, also

$$\eta_\sigma(\tau) \rightarrow \eta(\tau) \leq e(\tau),$$

und in den Punkten  $\tau_v$  gegen  $e(\tau)$  konvergieren,  $\eta(\tau_v) = e(\tau_v)$ . Da die  $\eta_\sigma(\tau)$  (wie leicht beweisbar) gleichartig gleichmäßig stetig sind und in überall dicht liegenden Punkten konvergieren, konvergieren sie gleichmäßig in jedem endlichen Intervall; also ist  $\eta(\tau)$  stetig und mit  $e(\tau)$  identisch. Der Modul einer jeden Funktion  $\eta_\sigma(\tau)$  ist wegen (5) in  $M(M_i)$  enthalten, also wegen des Korollars zu dem (später folgenden) Satz XXIII und § 1, 7 ist es auch der Modul  $M^*$  der Limesfunktion  $\eta(\tau) = e(\tau)$ ; d. h.

$$M^* \leq M(M_i).$$

## § 5.

## Normalfunktionen und Normalklassen.

Wir werden jetzt die fp. Funktionen von einer neuen Seite kennen lernen.

1. Definition. Eine (für  $-\infty < x < +\infty$  definierte und) stetige Funktion  $f(x)$  soll eine Normalfunktion heißen, wenn aus jeder Folge  $f(x + k_v)$ , ( $v = 1, 2, 3, \dots$ ), mit irgendwelchen reellen Zahlen  $k_v$  eine gleichmäßig konvergente Teilfolge ausgewählt werden kann.

Unter einer Normalklasse verstehen wir eine Menge von Normalfunktionen  $\varphi(x)$ , die in jeder unendlichen Teilfolge  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$  eine gleichmäßig konvergierende Unterfolge enthält.

Von einer (beliebigen) Funktion  $\varphi(x)$  bzw. von einer Menge von (beliebigen) Funktionen sagen wir, daß sie die Normaleigenschaft besitze, wenn aus jeder Teilmenge der Menge  $\varphi(x + k)$  bzw. der gegebenen Funktionenmenge eine gleichmäßig konvergente Unterfolge ausgewählt werden kann.

2. Unter einer beschränkten ausgezeichneten Menge sei irgendeine ausgezeichnete Menge von gleichartig beschränkten Funktionen verstanden.

Satz XXII. Jede fp. Funktion ist eine Normalfunktion und umgekehrt ist jede Normalfunktion eine fp. Funktion.

Jede beschränkte ausgezeichnete Menge ist eine Normalklasse und umgekehrt ist jede Normalklasse eine beschränkte ausgezeichnete Menge.

Zuerst werden wir in 3., bei gleichzeitiger Formulierung einiger Nebenergebnisse zeigen, daß jede beschränkte ausgezeichnete Menge die Normaleigenschaft besitzt. Daraus folgt, daß jede fp. Funktion  $f(x)$  eine Normalfunktion ist, weil doch die Menge  $f(x + k)$ , wo  $k$  alle reellen Zahlen durchläuft, gleichartig beschränkt und die Funktion  $e_r(\tau)$  zur gemeinsamen Majorante hat. Damit ist dann auch bewiesen, daß jede beschränkte ausgezeichnete Menge eine Normalklasse ist. In 4. wird bewiesen, daß jede Normalfunktion fastperiodisch ist; und endlich in 5., daß jede Menge von fp. Funktionen, die die Normaleigenschaft besitzt, eine beschränkte ausgezeichnete Menge bildet.

3. Es liege eine beschränkte ausgezeichnete Folge

$$f_1(x), f_2(x), \dots$$

vor. Wegen der gleichartigen Beschränktheit und Stetigkeit kann man bekanntlich eine Teilfolge so auswählen, daß sie auf jedem endlichen Teilintervall von  $-\infty < x < +\infty$  gleichmäßig konvergiert. Diese Teilfolge ist dann aber schlechthin gleichmäßig konvergent, wie der folgende Satz lehrt.

Satz XXIII. *Jede ausgezeichnete Folge von Funktionen  $f_1(x), f_2(x), \dots$ , die in jedem endlichen Intervall gleichmäßig konvergieren, ist schlechthin gleichmäßig konvergent.*

Beweis. Bei vorgegebenem  $\varepsilon$  bestimmen wir für die Majorante der Folge die Länge  $l = l\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$  derart, daß jedes Intervall dieser Länge eine Verschiebungszahl  $\tau\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$  der Majorante enthält. Weiterhin bestimmen wir  $N$  so groß, daß in  $0 \leq x \leq l$  für je zwei Indizes  $m \geq N, n \geq N$  die Ungleichung

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

besteht. Dann ist überall in  $-\infty < x < +\infty$

$$(1) \quad |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Denn zu jedem  $x$  kann man eine Verschiebungszahl  $\tau\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$  der Majorante so angeben, daß  $\xi = x - \tau\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$  ins Intervall  $0 \leq x \leq l$  hineinfällt. Dann ist

$$|f_m(x) - f_m(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

$$|f_n(x) - f_n(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

$$|f_m(\xi) - f_n(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

und daraus folgt (1).

Korollar zu Satz XXIII. *Jede majorisierbare Folge von monoton wachsenden Verschiebungsfunktionen ist gleichmäßig konvergent*, weil wegen der gleichartigen Beschränktheit und Stetigkeit die Folge auf jedem endlichen Intervall gleichmäßig konvergiert.

Satz XXIV. *Es sei irgendeine fp. Funktion  $f(x)$  und irgendeine Folge reeller Zahlen  $c_1, c_2, \dots$  gegeben. Man kann dann aus dieser Folge eine Teilfolge  $c'_1, c'_2, c'_3, \dots$  so auswählen, daß zu jedem  $\varepsilon$  ein  $N$  gehört, so daß für je zwei Indizes  $m \geq N, n \geq N$  die Differenz  $c'_m - c'_n$  eine zu  $\varepsilon$  gehörige Verschiebungszahl von  $f(x)$  ist,*

$$e_f(c'_m - c'_n) \leq \varepsilon \quad m \geq N(\varepsilon), \quad n \geq N(\varepsilon).$$

Beweis. Man wähle aus der Folge

$$f(x + c_1), f(x + c_2), f(x + c_3), \dots$$

irgendeine gleichmäßig konvergente Teilfolge

$$(2) \quad f(x + c'_1), f(x + c'_2), f(x + c'_3), \dots$$

aus. Die Zahlen  $c'_1, c'_2, c'_3, \dots$  der Folge (2) genügen unserem Satze.

4. Es liege eine Normalfunktion  $f(x)$  vor, wir werden zeigen, daß sie fastperiodisch ist. Aus der Auswählbarkeit folgt leicht, daß  $f(x)$  beschränkt und gleichmäßig stetig ist. Die „Verschiebungsfunktion“  $v_f(\tau)$ ,

$$v_f(\tau) = \text{Ob. Gr.}_{-\infty < x < +\infty} |f(x + \tau) - f(x)|$$

ist stetig, genügt den Bedingungen a) b) c) und besitzt, wie aus

$$|v_f(\tau + k_\mu) - v_f(\tau + k_\nu)| \leq v_f(k_\mu - k_\nu) = \text{Ob. Gr.}_{-\infty < x < +\infty} |f(x + k_\mu) - f(x + k_\nu)|$$

folgt, zugleich mit  $f(x)$  die Normaleigenschaft. Dann müssen aber bei jedem  $\varepsilon > 0$  die Punkte  $\tau$ , für welche

$$v_f(\tau) \leq \varepsilon,$$

relativ dicht liegen. Sonst gäbe es eine Konstante  $a > 0$  und eine Folge von Intervallen

$$(3) \quad \alpha_\nu < \tau < \beta_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots),$$

$$(4) \quad \beta_\nu - \alpha_\nu \rightarrow \infty,$$

so daß in allen Intervallen (3) die Ungleichung

$$v_f(\tau) \geq a$$

bestünde. Jede Funktion

$$(5) \quad v_\nu(\tau) = v_f\left(\tau - \frac{\beta_\nu + \alpha_\nu}{2}\right)$$

wäre daher im Intervall

$$-\frac{\beta_\nu - \alpha_\nu}{2} < \tau < \frac{\beta_\nu - \alpha_\nu}{2}$$

größer als  $a$ . Eine Teilfolge von (5) konvergiert gleichmäßig. Die Limesfunktion muß wegen (4) überall  $\geq a$  sein, was aber damit nicht zu vereinbaren ist, daß jede der Funktionen  $v_\nu(\tau)$  einmal den Wert 0 annimmt.

5. Es liege eine Normalklasse vor (von der wir nunmehr wissen, daß sie aus fp. Funktionen besteht). Wir werden zeigen, daß sie eine beschränkte ausgezeichnete Menge ist. Die gleichartige Beschränktheit folgt sofort aus der Auswählbarkeit. Da nach Satz XIII die Verschiebungsfunktionen einer Normalklasse wieder eine Normalklasse bilden, nehmen wir an, daß eine Normalklasse von Verschiebungsfunktionen

$$e_i(\tau) \quad (i \text{ durchläuft eine Indexmenge } D)$$

vorliegt. Wir haben nachzuweisen, daß die (überall endliche) Funktion

$$O(\tau) = \text{Ob. Gr.}_{i \in D} (e_i(\tau))$$

eine Verschiebungsfunktion ist. Aus der Auswählbarkeit kann leicht gefolgert werden, daß diese Funktion in jedem Punkte  $\tau$  stetig ist. Wenn

wir nun nachweisen, daß die Funktion  $O(\tau)$  in einer überall dicht liegenden Punktmenge mit einer Verschiebungsfunktion übereinstimmt, sind wir fertig.

Wir wählen, wie im Beweis zu Satz XXI aus der Menge  $e_i(\tau)$  eine Folge

$$e_1(\tau), e_2(\tau), e_3(\tau), \dots,$$

deren „obere Grenze“  $e(\tau)$

$$e(\tau) = \text{Ob. Gr. } (e_\nu(\tau))_{\nu=1,2,3,\dots}$$

in überall dicht liegenden Punkten mit  $O(\tau)$  übereinstimmt. Die Funktion  $e(\tau)$  ist offenbar der Limes der monoton wachsenden Funktionen

$$(6) \quad \eta_\nu(\tau) = \text{Max}(e_1(\tau), e_2(\tau), \dots, e_\nu(\tau)) \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots).$$

Wenn wir nachgewiesen haben werden, daß diese Funktionen gleichmäßig konvergieren, dann sind wir mit dem Beweis zu Ende.

Wäre nun die Folge  $\eta_\nu(\tau)$  nicht gleichmäßig konvergent, dann gäbe es eine Zahl  $a > 0$ , eine Folge von Punkten  $\tau_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) und dazugehörigen Indexpaaren  $(\mu_k, \nu_k)$  der Anordnung

$$\mu_1 < \nu_1 < \mu_2 < \nu_2 < \dots < \mu_k < \nu_k < \mu_{k+1} < \nu_{k+1} < \dots,$$

so daß

$$\eta_{\nu_k}(\tau_k) - \eta_{\mu_k}(\tau_k) > a \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

wäre. Gehen wir auf die Definition (6) der Funktionen  $\eta_\sigma(\tau)$  zurück, dann könnte man auf die Existenz von Indizes  $\chi_k$ , der Größe

$$(7) \quad \mu_k < \chi_k \leq \nu_k$$

schließen, so daß

$$e_{\chi_k}(\tau_k) - e_\sigma(\tau_k) > a, \quad \text{für } \sigma \leq \mu_k,$$

insbesondere also (vgl. (7))

$$(8) \quad e_{\chi_k}(\tau_k) - e_{\chi_k-n}(\tau_k) > a, \quad \text{für } n \leq k \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Aus der Folge  $e_{\chi_k}(\tau)$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) ließe sich nun nach Voraussetzung eine gleichmäßig konvergente Teilfolge  $e'_k(\tau)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) auswählen. Wegen (8) gäbe es dann aber eine Folge von Punkten  $\tau'_k$ , so daß

$$e'_k(\tau'_k) - e'_{k-1}(\tau'_k) > a \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

gälte, was aber der gleichmäßigen Konvergenz der Folge  $e'_k(\tau)$  widerspräche.

6. Wir schließen mit einer Bemerkung. Daß die Summe zweier Normalfunktionen wieder eine Normalfunktion ist, ist nahezu evident. In den Punkten 1.—4. des vorliegenden Paragraphen haben wir von § 4 nur den Satz XI benutzt. Also liefern die Entwicklungen des gegenwärtigen Paragraphen einen neuen Beweis für die Grundtatsache, daß die Summe zweier fp. Funktionen wieder fastperiodisch ist.

## Verzeichnis der zitierten Literatur.

- S. Bochner, [1] Sur les fonctions presque périodiques de Bohr. Comptes rendus **180** (1925), p. 1156.
- H. Bohr, [1] Sur les fonctions presque périodiques. Comptes rendus **177** (1923), p. 737.
- [2] Sur l'approximation des fonctions presque périodiques par des sommes trigonométriques. Comptes rendus **177** (1923), p. 1090.
- [3] Sur les fonctions presque périodiques d'une variable complexe. Comptes rendus **180** (1925), p. 645.
- [4] Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen I. Acta Math. **45** (1924), S. 29—127.
- [5] Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen II. Acta Math. **46** (1925), S. 101—214.
- [6] Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen III. Acta Math. (im Druck).
- [7] Einige Sätze über Fourierreihen fastperiodischer Funktionen. Math. Zeitschrift **23** (1925), S. 38—44.

(Eingegangen am 20. 9. 1925.)