

Über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen.

Von

Stefan Kaczmarz in Lwów (Lemberg).

In seiner Arbeit „*Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen*“¹⁾ beweist H. Rademacher folgenden Satz:

Es sei:

1. $\{\varphi_n(x)\}$ ein normiertes Orthogonalsystem,
 2. die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergent,
 3. $\psi(n)$ eine monotone Folge von der Beschaffenheit, daß $\psi(n) \rightarrow +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \psi(n)$ konvergiert, und n_k eine Teilfolge der natürlichen Zahlen, so gewählt, daß $\psi(n_k) \geq k$ ist,
- dann konvergiert die Folge

$$s_{n_k}(x) = \sum_{j=1}^{n_k} a_j \varphi_j(x)$$

fast überall.

In dieser Note gebe ich einen kurzen Beweis dieses Satzes, einen verallgemeinerten Satz und eine Anwendung auf die (C1)-Summierbarkeit der Orthogonalreihen.

Beweis des Satzes von H. Rademacher.

Setzen wir $r_p = \sum_{j=p+1}^{\infty} a_j^2$ und bestimmen die Teilfolge n_k so, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} r_{n_k}$ konvergiert; dann konvergiert die Folge $s_{n_k}(x)$ fast überall. In der Tat: Bezeichnet man mit $f(x)$ diejenige Funktion, für welche $\int_a^b (f - s_p)^2 dx \rightarrow 0$ für $p \rightarrow \infty$, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b (f - s_{n_k})^2 dx,$$

¹⁾ Math. Ann. 87 (1922), S. 112.

weil $\int_a^b (f - s_{n_k})^2 dx = r_{n_k}$; daraus folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (f - s_{n_k})^2$ fast überall, es konvergiert also $s_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ fast überall. Es bleibt zu zeigen, daß die obige Folge n_k und die Rademachersche Folge identisch sind.

Es sei also n_k so gewählt, daß $\sum_{k=1}^{\infty} r_{n_k}$ konvergiert; dann ist

$$\sum_1^{\infty} r_{n_k} = \sum_{k=1}^{\infty} k (a_{n_{k+1}}^2 + a_{n_{k+2}}^2 + \dots + a_{n_{k+1}}^2);$$

setzen wir $\psi(n) = k$ für $n_k < n \leq n_{k+1}$, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \psi(n)$ konvergent und die Rademachersche Folge ist identisch mit der Folge n_k . Umgekehrt, es sei $\psi(n)$ eine monotone Folge, für welche $\psi(n) \rightarrow +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \psi(n)$ konvergiert. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_{n_k} = \sum_{k=1}^{\infty} k (a_{n_{k+1}}^2 + \dots + a_{n_{k+1}}^2) \leq \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \psi(j);$$

es konvergiert also $\sum r_{n_k}$.

Satz I. Die Folge $s_{n_k}(x)$ ist fast überall konvergent, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_{n_k}}{\sqrt{k}}$ konvergiert.

Beweis. Es ist

$$(f - s_{n_k})^2 - (f - s_{n_{k+1}})^2 = (s_{n_{k+1}} - s_{n_k}) (2f - s_{n_k} - s_{n_{k+1}}).$$

Nach der Schwarzschen Ungleichung ist

$$A_k = \int_a^b |(f - s_{n_k})^2 - (f - s_{n_{k+1}})^2| dx \leq \sqrt{(r_{n_k} - r_{n_{k+1}}) (r_{n_k} - r_{n_{k+1}} + 4r_{n_{k+1}})},$$

also

$$A_k \leq 2 \sqrt{(r_{n_k} - r_{n_{k+1}}) r_{n_k}}.$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{(r_{n_k} - r_{n_{k+1}}) r_{n_k}}$ konvergiert, es ist nämlich

$$\sum_1^{\infty} \sqrt{(r_{n_k} - r_{n_{k+1}}) r_{n_k}} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} (r_{n_k} - r_{n_{k+1}}) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_{n_k}}{\sqrt{k}}}.$$

Die zweite Reihe rechts konvergiert laut Voraussetzung, auf die erste Reihe wenden wir Abels Transformation an:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p \sqrt{k} (r_{n_k} - r_{n_{k+1}}) &= \sum_{k=1}^p r_{n_k} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) - \sqrt{p} \cdot r_{n_{p+1}} \\ &= \sum_1^p \frac{r_{n_k}}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} - \sqrt{p} r_{n_{p+1}}. \end{aligned}$$

Die Summe rechts konvergiert für $p \rightarrow \infty$, das zweite Glied $r_{np+1} \sqrt{p} \rightarrow 0$, weil

$$\frac{r_{nk}}{\sqrt{k}} - \frac{r_{n_{k+1}}}{\sqrt{k+1}} = \frac{r_{nk} - r_{n_{k+1}}}{\sqrt{k}} + r_{n_{k+1}} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) > 0,$$

es sind also die Glieder der konvergenten Reihe $\sum \frac{r_{nk}}{\sqrt{k}}$ monoton abnehmend, deshalb $k \cdot \frac{r_{nk}}{\sqrt{k}} = \sqrt{k} r_{nk} \rightarrow 0$.

Die Reihe $\sum_1^\infty A_k$ ist also konvergent. Daraus folgt, daß die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \{(f - s_{nk})^2 - (f - s_{n_{k+1}})^2\}$, also auch die Folge $(f - s_{nk})^2$ fast überall konvergiert. Da aber $\int_a^b (f - s_{nk})^2 dx \rightarrow 0$, konvergiert $(f - s_{nk}) \rightarrow 0$ fast überall.

Bemerkung. Ähnlich wie vorher kann man feststellen, daß die Bedingung „ $\sum \frac{r_{nk}}{\sqrt{k}}$ konvergiert“ äquivalent ist der Bedingung

$$\sqrt{k} \leq \psi(n_k).$$

Erweiterungen.

Es wäre interessant zu untersuchen, ob man den Satz I noch verschärfen kann. Die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^\infty \frac{r_{nk}}{k}$ genügt jedoch nicht zur Konvergenz der Folge $s_{nk}(x)$, wie im folgenden gezeigt wird. Nehmen wir eine Orthogonalreihe $\sum_n a_n \varphi_n(x)$, welche überall divergiert, während die Reihe $\sum_n a_n^2 \lg n$ konvergiert²⁾. Es ist nun $\sum \frac{r_k}{k}$ konvergent, weil

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{r_k}{k} = \sum_{n=1}^\infty a_n^2 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} \right) < \sum_1^\infty a_n^2 (1 + \lg(n-1)),$$

und die Folge $s_k(x)$ divergiert. Ob die Bedingung „ $\sum_{k=1}^\infty \frac{r_{nk}}{k^\alpha}$ konvergiert“, für $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, genügend ist, kann ich vor der Hand nicht entscheiden.

Mit Hilfe des Satzes I kann man einen neuen Beweis des folgenden Satzes führen:

Satz II. Wenn die Reihe $\sum_1^\infty a_n^2 \sqrt{\lg n}$ konvergiert, dann ist die Reihe $\sum_1^\infty a_n \varphi_n(x)$ fast überall (C1)-summierbar, d. h. $\frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n}$ konvergiert fast überall³⁾.

²⁾ Eine solche Reihe hat D. Menchoff Fund. Math. 4 (1923), S. 104 angegeben.

³⁾ Vgl. meine Note in Math. Zeitschr. 23 (1925), S. 266 u. 268.

Zu diesem Zwecke beweisen wir den folgenden

Satz III. *Damit die Orthogonalreihe $\sum_1^\infty a_n \varphi_n(x)$, für welche $\sum_1^\infty a_n^2$ konvergiert, fast überall (C1)-summierbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß die Teilfolge $s_{2^k}(x)$ fast überall konvergiere.*

Beweis. Die Notwendigkeit folgt aus einem Satze von A. Kolmogorow⁴⁾, der besagt, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\sigma_{2^k} - s_{2^k})^2, \quad \text{wo} \quad \sigma_p = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_p}{p}$$

fast überall konvergiert.

Jetzt nehmen wir an, daß $s_{2^k}(x)$ fast überall konvergiert.

Nach dem Satz von Kolmogorow konvergiert dann fast überall die Folge $\sigma_{2^k}(x)$. Nehmen wir die Differenz $\sigma_j - \sigma_{2^k}$, wenn $2^{k-1} < j < 2^k$. Es ist:

$$\begin{aligned} \sigma_j - \sigma_{2^k} &= (\sigma_j - \sigma_{j+1}) + (\sigma_{j+1} - \sigma_{j+2}) + \dots + (\sigma_{2^{k-1}} - \sigma_{2^k}), \\ \text{also} \quad |\sigma_j - \sigma_{2^k}| &\leq \sqrt{j} |\sigma_j - \sigma_{j+1}| \frac{1}{\sqrt{j}} + \sqrt{j+1} |\sigma_{j+1} - \sigma_{j+2}| \frac{1}{\sqrt{j+2}} + \dots \\ &\quad + \sqrt{2^k - 1} |\sigma_{2^{k-1}} - \sigma_{2^k}| \frac{1}{\sqrt{2^k - 1}} \end{aligned}$$

die Schwarzsche Ungleichung liefert

$$\begin{aligned} |\sigma_j - \sigma_{2^k}| &\leq \sqrt{\sum_{n=j}^{2^{k-1}} n (\sigma_n - \sigma_{n+1})^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=j}^{2^{k-1}} \frac{1}{n}} \\ &< \sqrt{\sum_{2^{k-1}}^{2^k-1} n (\sigma_n - \sigma_{n+1})^2} \sum_{2^{k-1}+1}^{2^k-1} \frac{1}{j}, \end{aligned}$$

da aber

$$\sum_{2^{k-1}+1}^{2^k-1} \frac{1}{j} < \lg(2^k - 1) - \lg 2^{k-1} < \lg 2,$$

und die Reihe $\sum_1^\infty n (\sigma_n - \sigma_{n+1})^2$ fast überall konvergiert⁵⁾, so konvergiert $\sigma_j - \sigma_{2^k} \rightarrow 0$. Die Reihe ist also fast überall (C1)-summierbar.

Beweis des Satzes II. Da $\sqrt{k} \leq \sqrt{\lg 2^k}$, so ist die Folge $s_{2^k}(x)$ nach dem Satz I (Bemerkung) fast überall konvergent. Aus dem Satz III folgt die (C1)-Summierbarkeit der Orthogonalreihe fast überall.

Auf Grund dieses Beweises erhält man aus jeder Verschärfung des Satzes I eine entsprechende Verschärfung des Satzes II.

⁴⁾ Fund. Math. 5 (1924), S. 96. — ⁵⁾ Siehe Anm. 3).