Über das Gesetz der großen Zahlen.

Von

A. Khintchine in Moskau.

§ 1.

Problemstellung.

Man denke sich eine unbegrenzte Reihe von Versuchen angestellt, die sich alle auf das Eintreten eines Ereignisses E beziehen und voneinander unabhängig gedacht sein mögen. Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von E im n-ten Versuch sei mit p_n bezeichnet. E sei unter den n ersten Versuchen $m(n)$-mal eingetreten; man setze

$$\mu(n) = m(n) - \sum_{i=1}^{n} p_i .$$

Der berühmte, von Poisson aufgestellte und von Tchebycheff zuerst streng bewiesene Satz, den man gewöhnlich als das *Gesetz der großen Zahlen* bezeichnet, lautet: *Sind die Zahlen* $\varepsilon > 0$ *und* $\eta > 0$ *beliebig vorgegeben, so kann man für ein genügend großes* n *die Relation*

$$|\mu(n)| < \varepsilon n \tag{1}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit $> 1 - \eta$ *behaupten.*

Auch die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Relation (1) für *alle* $n > N$ erfüllt wird, strebt bei unendlicher Zunahme von N gegen 1; diese wichtige Tatsache ist, wie mir scheint, nicht genügend hervorgehoben worden; sie bildet keine direkte Folgerung des Poissonschen Theorems und kann auch nicht durch seinen üblichen, von Tchebycheff herrührenden Beweis festgestellt werden; meines Wissens ist in der Literatur überhaupt kein allgemeiner Beweis dieses Satzes angeführt worden. Wichtige Spezialfälle hat Herr Borel in seinen bekannten Untersuchungen über die Verteilung der Ziffern in systematischen Entwicklungen der Zahlen[1]) bewiesen; und

[1]) Vgl. z. B. die Note V seiner Leçons sur la théorie des fonctions, 2. Auflage, 1914.

die von ihm benutzte sinnreiche Methode reicht auch vollständig aus, um den Satz allgemein zu beweisen.

Ferner ist der Satz von anderen Autoren[2]), wieder in Spezialfällen, noch weiter verschärft worden: die Ungleichung (1) wurde durch schärfere Ungleichungen ersetzt, und die Behauptung blieb erhalten.

Die Aufgabe, *eine exakte obere Grenze für die Größenordnung der Funktion $\mu(n)$ aufzusuchen*, habe ich vor kurzem für den Bernoullischen Fall ($p_1 = p_2 = \ldots = p$) exakt formuliert und auch die Lösung derselben für diesen Fall gegeben[3]). Vorliegende Abhandlung enthält die Lösung desselben Problems für eine viel umfassendere Klasse von Fällen.

Die nachfolgende Definition der exakten oberen Grenze für $\mu(n)$ ist, soviel ich sehe, die natürlichste und, streng genommen, auch die einzig mögliche.

Definition. Als eine *exakte obere Grenze* der Abweichung $\mu(n)$ bezeichnen wir im folgenden eine positive Funktion $\chi(n)$, wenn sie folgender Bedingung Genüge leistet.

Für jedes Paar positiver Zahlen δ und η gibt es eine solche ganze positive Zahl $n_0 = n_0(\delta, \eta)$, daß mit einer Wahrscheinlichkeit $> 1 - \eta$ zweierlei behauptet werden darf, nämlich:

1. *Für alle $n > n_0$ ist $\frac{|\mu(n)|}{\chi(n)} < 1 + \delta$;*
2. *Für wenigstens ein $n > n_0$ ist $\frac{|\mu(n)|}{\chi(n)} > 1 - \delta$.*

Dabei kann n_0 beliebig groß gewählt werden.

Man ersieht leicht, daß, wenn eine dieser Forderung genügende Funktion $\chi(n)$ gefunden ist, auch jede Funktion der Form $\chi(n) + o(\chi(n))$ eine Lösung des Problems liefert. Die Existenz einer Lösung $\chi(n)$ kann natürlich nicht a priori behauptet werden.

In meinen bei [3]) zitierten Arbeiten habe ich gezeigt, daß im Bernoullischen Falle die Funktion

$$\chi(n) = \sqrt{2\,p(1-p)\,n \lg\lg n}$$

die gesuchte Lösung liefert[4]). Es lag die Vermutung nahe, daß man in einer Reihe allgemeinerer Fälle

$$\chi(n) = \sqrt{2 \sum_{i=1}^{n} p_i(1 - p_i) \lg\lg n} \tag{2}$$

[2]) Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre 1914, S. 421; Hardy und Littlewood, Some problems of diophantine approximation, Acta Mathematica **37** (1914), S. 185; Khintchine, Über dyadische Brüche, Math. Zeitschr. **18** (1923), S. 109.

[3]) Comptes Rendus **178** (1924), S. 617–618; Fundamenta Mathematicae **6** (1924), S. 9–20.

[4]) Ich habe in jenen Arbeiten für die beiden Zahlen δ und η einen einzigen Buchstaben ε geschrieben, da mir die gegenseitige Unabhängigkeit dieser Zahlen

setzen können wird. Das Ziel der vorliegenden Abhandlung ist, die Bestätigung dieser Vermutung für eine sehr umfassende Klasse von Fällen zu erbringen. Es gilt nämlich der

Satz. *Die durch* (2) *definierte Funktion* $\chi(n)$ *liefert eine exakte obere Grenze der Abweichung* $\mu(n)$, *sobald alle Größen* p_i *und* $1-p_i$ *oberhalb einer positiven Schranke* a *bleiben.*

Dem Beweise dieser Behauptung sind die beiden folgenden Paragraphen gewidmet. Hier möchte ich noch bemerken, daß die Lösung

$$\chi(n) = \sqrt{2 \sum_{i=1}^{n} p_i q_i \lg \lg \sum_{i=1}^{n} p_i q_i},$$

die unter den Voraussetzungen unseres Satzes mit der Lösung (2) asymptotisch zusammenfällt, aller Wahrscheinlichkeit nach für noch allgemeinere Fälle Geltung behält.

§ 2.

Aufstellung der Hilfssätze.

Im folgenden sollen $L_1, L_2, \ldots$ absolute positive Konstanten bedeuten; $L_1(x, y, \ldots)$, $L_2(x, y, \ldots)$ sollen positive Größen sein, die nur von $x, y, \ldots$ abhängen.

Es sei $\psi(n)$ eine positive Funktion des Argumentes n, und man setze

$$q_i = 1 - p_i, \qquad \nu = \nu(n) = \sqrt{2 \sum_{i=1}^{n} p_i q_i \psi(n)}.$$

$P(n, \nu)$ bedeute die Wahrscheinlichkeit der Relation

$$|\mu(n)| > \nu,$$

und die Voraussetzung des Satzes in § 1 sei dauernd erfüllt gedacht.

Hilfssatz 1. *Es ist für* $n > L_3(a)$ *und jedes ganze positive*

$$k \leqq \frac{\lg n}{\lg \lg n}, \tag{3}$$

$$P(n, \nu) < L_6 \left(\frac{k}{e \psi(n)} \right)^k.$$

---

außer Zweifel schien. Dieser Umstand hat Herrn Borel (vgl. seine Bemerkungen zu meiner Note) die Veranlassung gegeben, das von mir gelöste Problem als ein in gewissem Sinne willkürliches zu betrachten und nach der Funktion zu fragen, die in den Ausdruck für $\chi(n)$ an Stelle von $\lg \lg n$ tritt, wenn δ und η statt der Relation $\delta = \eta$ durch eine andere einfache Relation $\delta = \varphi(\eta)$ verbunden werden. Indem ich natürlich für dieses ärgerliche Mißverständnis mich allein verantwortlich fühle, muß ich hervorheben, daß die beiden Zahlen δ und η (also die beiden ε in meiner früheren Bezeichnung) vollständig unabhängig voneinander oder auch irgendwie verbunden gedacht sein können, ohne daß dadurch der Wortlaut der Behauptung irgendwie geändert wird, so daß letztere eine in diesem Sinne vollständig allgemeine Geltung hat.

Beweis[5]). Wir beginnen mit der Betrachtung des Ausdrucks

$$C = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i q_i\right)^k = \sum_{\mu, \nu, \ldots, \omega} \frac{k!}{\mu!\, \nu! \ldots \omega!} H_{\mu, \nu, \ldots, \omega}, \tag{4}$$

wo die Summation über das durch

$$0 < \mu \leqq \nu \leqq \ldots \leqq \omega, \qquad \mu + \nu + \ldots + \omega = k$$

bestimmte Gebiet zu erstrecken ist und $H_{\mu, \nu, \ldots, \omega}$ die symmetrische Funktion der Produkte $p_i q_i$ bedeutet, deren allgemeines Glied durch

$$(p_{i_1} q_{i_1})^{\mu} (p_{i_2} q_{i_2})^{\nu} \ldots (p_{i_s} q_{i_s})^{\omega}$$

gegeben ist, wobei $i_1, i_2, \ldots, i_s$ voneinander verschiedene Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, n$ bedeuten.

Offenbar ist

$$H_{\mu, \nu, \ldots, \omega} < \left(\sum_{i=1}^{n} (p_i q_i)^{\mu}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (p_i q_i)^{\nu}\right) \ldots \left(\sum_{i=1}^{n} (p_i q_i)^{\omega}\right).$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{H_{\mu, \nu, \ldots, \omega}}{C} < \frac{\sum_{i=1}^{n} (p_i q_i)^{\mu}}{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i q_i\right)^{\mu}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} (p_i q_i)^{\nu}}{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i q_i\right)^{\nu}} \ldots \frac{\sum_{i=1}^{n} (p_i q_i)^{\omega}}{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i q_i\right)^{\omega}}$$

$$< \frac{n}{a^{2\mu} \cdot n^{\mu}} \cdot \frac{n}{a^{2\nu} \cdot n^{\nu}} \ldots \frac{n}{a^{2\omega} \cdot n^{\omega}} = \frac{a^{-2k}}{n^{\mu - 1 + \nu - 1 + \ldots + \omega - 1}}.$$

Ist wenigstens eine der Zahlen $\mu, \nu, \ldots, \omega$ größer als 1, so findet man daher

$$\frac{H_{\mu, \nu, \ldots, \omega}}{C} < \frac{a^{-2k}}{n}.$$

Die Anzahl der Glieder rechts in (4) ist offenbar gleich der Anzahl der Zerlegungen der Zahl k in positive Summanden, wenn zwei Zerlegungen, die sich nur in der Ordnung der Summanden unterscheiden, als identisch aufgefaßt werden. Diese Anzahl ist jedenfalls kleiner als 2^k, wie eine rohe Abschätzung leicht ergibt. Da ferner $k!$ eine obere Grenze für die rechts in (4) auftretenden Polynomialkoeffizienten ist, so erhält man

$$\left| \frac{C - k!\, H_{1, 1, \ldots, 1}}{C} \right| < 2^k k! \frac{a^{-2k}}{n} < \frac{L_1}{n} k \left(\frac{2k}{a^2 e}\right)^k = \frac{L_1}{n} e^{k \lg k + k \lg \left(\frac{2}{a^2 e}\right) + \lg k}$$

Wegen der getroffenen Voraussetzung (3) ergibt das für $n > L_1(a)$

$$\left| \frac{C - k!\, H_{1, 1, \ldots, 1}}{C} \right| < \frac{L_2}{\lg n}. \tag{5}$$

[5]) Die Bausteine dieses Beweises können in einer von Markoff ersonnenen Methode erblickt werden (vgl. sein Buch „Wahrscheinlichkeitsrechnung", 4. russische Auflage, 1924, insbes. S. 148—152). Ihre Verwendung mußte jedoch hier, dem gegenwärtigen Ziele entsprechend, wesentliche Modifikationen erfahren.

Andererseits betrachten wir jetzt die mathematische Erwartung B der Größe

$$\{\mu(n)\}^{2k}.$$

Bezeichnet man mit x_i eine Größe, deren Wert gleich 1 oder 0 ist, je nachdem das Ereignis E beim i-ten Versuche eintritt oder nicht, so ist offenbar

$$B = \sum_{x_l} \{(\sum_{i=1}^{n}(x_i - p_i))^{2k} \cdot \prod_{i=1}^{n}(x_i p_i + (1 - x_i)q_i)\}$$

$$= \sum_{x_l} \left\{ \sum_{\alpha,\beta,\ldots,\lambda} \frac{(2k)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!} S_{\alpha,\beta,\ldots,\lambda} \cdot \prod_{i=1}^{n}(x_i p_i + (1 - x_i)q_i) \right\}.$$

Dabei ist die äußere Summation über alle möglichen Wertsysteme der x_i zu erstrecken, während im letzten Ausdruck das Gebiet der inneren Summation durch

$$0 < \alpha \leqq \beta \leqq \ldots \leqq \lambda, \qquad \alpha + \beta + \ldots + \lambda = 2k$$

festgelegt wird; $S_{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}$ bedeutet die symmetrische Funktion der Differenzen $x_i - p_i$, deren allgemeines Glied durch

$$(x_{i_1} - p_{i_1})^{\alpha}(x_{i_2} - p_{i_2})^{\beta}\ldots(x_{i_s} - p_{i_s})^{\lambda}$$

gegeben ist, wobei $i_1, i_2, \ldots, i_s$ voneinander verschiedene Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, n$ bedeuten.

Indem man die Ordnung der Summation wechselt, erhält man

$$B = \sum_{\alpha,\beta,\ldots,\lambda} \frac{(2k)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!} G_{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}, \tag{6}$$

wo

$$G_{\alpha,\beta,\ldots,\lambda} = \sum_{x_l} \{S_{\alpha,\beta,\ldots,\lambda} \prod_{i=1}^{n}(x_i p_i + (1 - x_i)q_i)\}$$

die mathematische Erwartung der Funktion $S_{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}$ darstellt.

Unser Ziel ist zunächst, eine obere Abschätzung für B/C zu gewinnen. Zu dem Ende gehen wir von der leicht beweisbaren Identität

$$G_{2,2,\ldots,2} = H_{1,1,\ldots,1}$$

aus. Wegen (5) erhalten wir für $n > L_1(a)$

$$\left| \frac{G_{2,2,\ldots,2}}{C} - \frac{1}{k!} \right| < \frac{L_2}{\lg n} \cdot \frac{1}{k!},$$

also für $n > L_2(a)$

$$\frac{G_{2,2,\ldots,2}}{C} < \frac{2}{k!},$$

$$\frac{(2k)!\; G_{2,2,\ldots,2}}{2^{2k} C} < \frac{(2k)! \cdot 2}{2^{2k} k!} < L_3 \left(\frac{k}{e}\right)^k.$$

Betreffs der anderen Glieder der Summe (6) bemerken wir zunächst, daß ihre Anzahl ganz wie diejenige für (4) abgeschätzt werden kann und sich kleiner als 2^{2k} ergibt. Ist eine der Zahlen $\alpha, \beta, \ldots, \lambda = 1$, so verschwindet bekanntlich das betreffende $G_{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}$. Wir haben demnach nur noch diejenigen Glieder zu betrachten, in welchen wenigstens eine der Zahlen $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ größer als 2 ist.

Offenbar ist allgemein

$$G_{\alpha,\beta,\ldots,\lambda} \leqq \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_s} (p_{i_1} q_{i_1}^{\alpha} + q_{i_1} p_{i_1}^{\alpha})(p_{i_2} q_{i_2}^{\beta} + q_{i_2} p_{i_2}^{\beta}) \ldots (p_{i_s} q_{i_s}^{\lambda} + q_{i_s} p_{i_s}^{\lambda}),$$

wo die Summation über alle möglichen voneinander verschiedenen Zahlen $i_1, i_2, \ldots, i_s$ der Reihe $1, 2, \ldots, n$ zu erstrecken ist. Daraus folgt

$$G_{\alpha,\beta,\ldots,\lambda} < \left(\sum_{i=1}^{n} p_i q_i (p_i^{\alpha-1} + q_i^{\alpha-1})\right)\left(\sum_{i=1}^{n} p_i q_i (p_i^{\beta-1} + q_i^{\beta-1})\right) \ldots \left(\sum_{i=1}^{n} p_i q_i (p_i^{\lambda-1} + q_i^{\lambda-1})\right),$$

und weiter

$$\frac{G_{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}}{C} < \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \; _i(p_i^{\alpha-1} + q_i^{\alpha-1})}{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i q_i\right)^{\frac{\alpha}{2}}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i q_i (p_i^{\beta-1} + q_i^{\beta-1})}{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i q_i\right)^{\frac{\beta}{2}}} \cdots \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i q_i (p_i^{\lambda-1} + q_i^{\lambda-1})}{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i q_i\right)^{\frac{\lambda}{2}}}$$

$$< \frac{a^{-2k}}{n^{\frac{\alpha}{2}-1+\frac{\beta}{2}-1+\ldots+\frac{\lambda}{2}-1}};$$

ist wenigstens eine der Zahlen $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ größer als 2, so ergibt sich hieraus

$$\frac{G_{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}}{C} < \frac{a^{-2k}}{n};$$

denn im Falle, wo nur eine von den Zahlen $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ größer als 2 ist, muß sie wenigstens gleich 4 sein, da $\alpha + \beta + \ldots + \lambda = 2k$ eine gerade Zahl ist.

Somit findet man für $n > L_2(a)$

$$\frac{B}{2^k C} < L_3 \left(\frac{k}{e}\right)^k + 2^{2k} \frac{a^{-2k}}{n} (2k)!$$

$$< L_3 \left(\frac{k}{e}\right)^k + L_4 k \left(\frac{4k}{ae}\right)^{2k} \cdot \frac{1}{n}$$

$$< L_3 \left(\frac{k}{e}\right)^k \left\{1 + \frac{L_5}{n} e^{k \lg k + k\left(1 + 2\lg \frac{4}{ae}\right) + \lg k}\right\},$$

was wegen (3) für $n > L_3(a)$

$$\frac{B}{2^k C} < L_6 \left(\frac{k}{e}\right)^k$$

zur Folge hat. Daraus ergibt sich

$$\frac{B}{\nu^{2k}} = \frac{B}{2^k C(\psi(n))^k} < L_5 \left(\frac{k}{e\,\psi(n)}\right)^k.$$

Die linke Seite ist hier die mathematische Erwartung der Größe

$$\left(\frac{\mu(n)}{\nu}\right)^{2k}.$$

Nun ist bekanntlich die mathematische Erwartung eines jeden positiven Ausdrucks in allen Fällen größer als die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der betreffende Ausdruck größer als 1 wird (die Anwendung dieser Tatsache bildet eine der Hauptideen der Methoden von Tchebycheff und Borel). Folglich erhält man a fortiori für $n > L_3(a)$ und $k \leqq \frac{\lg n}{\lg\lg n}$

$$P(n, \nu) < L_6 \left(\frac{k}{e\,\psi(n)}\right)^k,$$

womit Hilfssatz 1 bewiesen ist.

Hilfssatz 2. *Für* $n > L_3(a)$ *und* $1 \leqq \psi(n) \leqq \frac{\lg n}{\lg\lg n}$ *ist*

$$P(n, \nu) < L_7\, e^{-\psi(n)}.$$

Beweis. Die Anwendung von Hilfssatz 1 mit $k = [\psi(n)]$ liefert

$$P(n, \nu) < L_6\, e^{-\psi(n)+1} = L_7\, e^{-\psi(n)},$$

w. z. b. w.

Hilfssatz 3. *Für* $n > L_4(a)$ *und* $\psi(n) \geqq \frac{\lg n}{\lg\lg n}$ *ist*

$$P(n, \nu) < L_7\, e^{-\frac{\lg \nu}{\lg\lg \nu}}.$$

Beweis. Die Anwendung von Hilfssatz 1 mit $k = \left[\frac{\lg n}{\lg\lg n}\right]$ liefert

$$P(n, \nu) < L_6\, e^{-\left[\frac{\lg n}{\lg\lg n}\right]} < L_7\, e^{-\frac{\lg n}{\lg\lg n}},$$

woraus a fortiori

$$P(n, \nu) < L_7\, e^{-\frac{\lg \nu}{\lg\lg \nu}}$$

folgt, denn für $\nu > n$ ist offenbar $P(n, \nu) = 0$.

Hilfssatz 4. *Für* $n > L_5(a)$ *und* $\psi(n) \geqq 1$ *ist*

$$P(n, \nu) < L_7 \left\{e^{-\psi(n)} + e^{-\frac{\lg \nu}{\lg\lg \nu}}\right\}.$$

Beweis folgt unmittelbar aus den Hilfssätzen 2 und 3.

Hilfssatz 5. *Für* $n > L_6(a)$ *und* $\psi(n) \geqq \frac{\lg n}{e \lg\lg n}$ *ist*

$$P(n, \nu) < L_6 \left(\frac{\lg n}{e\,\psi(n) \lg\lg n}\right)^{\frac{\lg \nu}{\lg\lg \nu} - 1}$$

Beweis. Die Anwendung von Hilfssatz 1 mit $k = \left[\frac{\lg n}{\lg\lg n}\right]$ liefert

$$P(n, \nu) < L_6 \left(\frac{\lg n}{e\,\psi(n)\lg\lg n}\right)^{\frac{\lg n}{\lg\lg n}-1} < L_6 \left(\frac{\lg n}{e\,\psi(n)\lg\lg n}\right)^{\frac{\lg \nu}{\lg\lg \nu}-1},$$

da wieder für $\nu > n$ $P(n, \nu) = 0$ ist.

Von hier an soll der Kürze halber für jedes ganze positive n dauernd

$$\chi(n) = \sqrt{2\left(\sum_{i=1}^{n} p_i q_i\right)\lg\lg n}$$

gesetzt werden.

Hilfssatz 6. *Bedeutet $A(n)$ die Wahrscheinlichkeit der Relation*

$$|\mu(n)| > (1+\varepsilon)\chi(n) \qquad (\varepsilon > 0),$$

so ist für $n > L_7(a)$

$$A(n) < \frac{L_7}{(\lg n)^{1+L_1(\varepsilon)}}.$$

Beweis folgt aus Hilfssatz 2 mit

$$\psi(n) = (1+\varepsilon)^2 \lg\lg n.$$

Hilfssatz 7. *Bezeichnet man mit $B(n_1, n_2)$ die Wahrscheinlichkeit der Relation*

$$\left|\frac{\mu(n_1)}{\chi(n_1)} - \frac{\mu(n_2)}{\chi(n_2)}\right| > \varepsilon, \tag{7}$$

so ist für $n_1 > L_7(a, \varepsilon)$, $n_1 < n_2 < 2n_1$,

$$B(n_1, n_2) < L_{11}\left\{e^{L_8(a,\varepsilon)\frac{n_1 \lg\lg n_1}{n_2 - n_1}} + e^{-L_{12}\frac{\lg n_1}{\lg\lg n_1}}\right\}.$$

Beweis. In der Reihe der Versuche von (n_1+1)-ten bis zum n_2-ten möge das Ereignis E $m(n_1, n_2)$-mal eintreten. Setzt man

$$\mu(n_1, n_2) = m(n_1, n_2) - \sum_{i=n_1+1}^{n_2} p_i,$$

so ist offenbar

$$\mu(n_2) = \mu(n_1) + \mu(n_1, n_2),$$

so daß statt (7) auch

$$\left|\mu(n_1)\left\{\frac{1}{\chi(n_1)} - \frac{1}{\chi(n_2)}\right\} - \frac{\mu(n_1, n_2)}{\chi(n_2)}\right| > \varepsilon$$

geschrieben werden kann. Daraus ersieht man, daß, wenn (7) erfüllt ist, notwendigerweise auch eine der beiden Relationen

$$\left|\mu(n_1)\left\{\frac{1}{\chi(n_1)} - \frac{1}{\chi(n_2)}\right\}\right| > \frac{\varepsilon}{2} \tag{8}$$

und

$$\left|\frac{\mu(n_1, n_2)}{\chi(n_2)}\right| > \frac{\varepsilon}{2} \tag{9}$$

erfüllt sein muß. Die Wahrscheinlichkeiten dieser Relationen seien mit $B_1(n_1, n_2)$ bzw. $B_2(n_1, n_2)$ bezeichnet, so daß also

$$B(n_1, n_2) \leqq B_1(n_1, n_2) + B_2(n_1, n_2) \tag{10}$$

ist.

Die Ungleichung (8) hat zur Folge

$$|\mu(n_1)| > \frac{\varepsilon}{2} \frac{\chi(n_1)\chi(n_2)}{\chi(n_2) - \chi(n_1)} > \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{2a^2 n_1 \lg\lg n_1}{\chi(n_2) - \chi(n_1)},$$

und da

$$\chi(n_2) - \chi(n_1) < \sqrt{2\lg\lg n_1}\left\{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_2} p_i q_i} - \sqrt{\sum_{i=1}^{n_1} p_i q_i}\right\}$$

$$= \sqrt{2\lg\lg n_1}\, \frac{\sum_{i=n_1+1}^{n_2} p_i q_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_2} p_i q_i} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n_1} p_i q_i}} < \sqrt{\lg\lg n_1}\, \frac{n_2 - n_1}{\sqrt{2a^2 n_1}}$$

ist, so erhält man weiter

$$|\mu(n_1)| > \frac{\varepsilon a^3 \sqrt{2}\, n_1 \sqrt{n_1 \lg\lg n_1}}{(n_2 - n_1)\sqrt{\lg\lg n_1}} = L_1(a, \varepsilon) \frac{n_1}{n_2 - n_1} \sqrt{n_1 \lg\lg n_1}.$$

Die Anwendung von Hilfssatz 4 mit $n = n_1$,

$$\nu = L_1(a, \varepsilon) \frac{n_1}{n_2 - n_1} \sqrt{n_1 \lg\lg n_1}, \qquad \psi(n) = \frac{L_2(a, \varepsilon)\, n_1^3 \lg\lg n_1}{(n_2 - n_1)^2 \cdot 2 \sum_{i=1}^{n_1} p_i q_i},$$

ist für $n_1 > L_3(a, \varepsilon)$ gestattet und ergibt wegen $n_2 - n_1 < n_1$

$$B_1(n_1, n_2) < L_7\left\{e^{-\frac{L_2(a,\varepsilon) n_1 \lg\lg n_1}{n_2 - n_1}} + e^{-\frac{L_9 \lg n_1}{\lg\lg n_1}}\right\}. \tag{11}$$

Andererseits folgt aus (9) a fortiori

$$|\mu(n_1, n_2)| > \frac{\varepsilon}{2} \chi(n_1);$$

die Anwendung von Hilfssatz 4 mit $n = n_2 - n_1$,

$$\nu = \frac{\varepsilon}{2} \chi(n_1), \qquad \psi(n) = \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n_1} p_i q_i\right) \lg\lg n_1}{\sum_{i=n_1+1}^{n_2} p_i q_i}$$

ergibt für $n_2 - n_1 > L_4(a, \varepsilon)$

$$B_2(n_1, n_2) < L_7\left\{e^{-L_5(a,\varepsilon)\frac{n_1 \lg\lg n_1}{n_2 - n_1}} + e^{-L_{10}\frac{\lg n_1}{\lg\lg n_1}}\right\}; \tag{12}$$

um diese Relation für alle $n_2 - n_1$ gültig zu machen, brauchen wir nur

$n_1 > L_6(a, \varepsilon)$ zu wählen; denn dann wird für $n = n_2 - n_1 \leqq L_4(a, \varepsilon)$ auch $n < r$, also $B_2(n_1, n_2) = 0$ sein.

Aus (10), (11) und (12) folgt, daß für $n_1 > L_7(a, \varepsilon)$ und $0 < n_2 - n_1 < n_1$

$$B(n_1, n_2) < L_{11}\left\{e^{-L_8(a,\varepsilon)\frac{n_1 \lg\lg n_1}{n_2 - n_1}} + e^{-L_{12}\frac{\lg n_1}{\lg\lg n_1}}\right\}$$

wird, womit Hilfssatz 7 bewiesen ist.

Hilfssatz 8. *Für* $n_1 > L_{16}(a, \varepsilon)$, $n_1 < n_2 < 2n_1$ *und*

$$\frac{n_2 - n_1}{n_1} \lg n_1 < L_{10}(a, \varepsilon) \tag{13}$$

ist

$$B(n_1, n_2) < L_{15}\left\{L_{17}(a, \varepsilon)\frac{n_2 - n_1}{n_1} \lg n_1\right\}^{L_{16}\frac{\lg n_1}{\lg\lg n_1}}.$$

Beweis. Wir behalten die Bezeichnung des voranstehenden Beweises bei.

Für die Abschätzung von $B_1(n_1, n_2)$ hatten wir

$$\psi(n) > L_9(a, \varepsilon)\frac{n_1}{n_2 - n_1} \lg\lg n_1,$$

was jetzt wegen (13) reichlich

$$\psi(n) > \frac{\lg n_1}{e \lg\lg n_1}$$

liefert.

Hilfssatz 5 ist also anwendbar und ergibt für $n_1 > L_{11}(a, \varepsilon)$

$$B_1(n_1, n_2) < L_6\left\{L_{12}(a, \varepsilon)\frac{n_2 - n_1}{n_1} \lg n_1\right\}^{L_{13}\frac{\lg n_1}{\lg\lg n_1}}.$$

Andererseits hatten wir für die Abschätzung von $B_2(n_1, n_2)$ $n = n_2 - n_1$ und

$$\psi(n) > L_{12}(a, \varepsilon)\frac{n_1}{n_2 - n_1} \lg\lg n_1,$$

was wegen (13) und $n_2 - n_1 < n_1$ wieder reichlich

$$\psi(n) > \frac{\lg n_1}{e \lg\lg n_1} > \frac{\lg(n_2 - n_1)}{e \lg\lg(n_2 - n_1)}$$

ergibt[6]). Hilfssatz 5 ist also wieder anwendbar und liefert für $n_1 > L_{13}(a, \varepsilon)$

$$B_2(n_1, n_2) < L_6\left\{L_{14}(a, \varepsilon)\frac{n_2 - n_1}{n_1} \lg n_1\right\}^{L_{14}\frac{\lg n_1}{\lg\lg n_1}}.$$

[6]) $n_2 - n_1$ dürfen wir auch hier größer als eine passend gewählte positive Konstante voraussetzen; denn für kleinere $n_2 - n_1$ verschwindet die Wahrscheinlichkeit $B_2(n_1, n_2)$, um deren Abschätzung es sich hier ja allein handelt.

Wegen (10) erhält man also für $n_1 > L_{16}(a, \varepsilon)$, $n_2 - n_1 < n_1$, und (13) vorausgesetzt,

$$B(n_1, n_2) < L_{15}\left\{L_{15}(a, \varepsilon)\frac{n_2 - n_1}{n_1}\lg n_1\right\}^{L_{16}\frac{\lg n_1}{\lg\lg n_1}},$$

womit Hilfssatz 8 bewiesen ist.

Hilfssatz 9. *Man setze wieder voraus, daß*

$$L_{16}(a, \varepsilon) < n_1 < n_2 < 2n_1$$

ist und (13) *erfüllt wird.* $C(n_1, n_2)$ *bedeute die Wahrscheinlichkeit dafür, daß für wenigstens ein* b, $n_1 < b \leqq n_2$

$$\left|\frac{\mu(b)}{\chi(b)} - \frac{\mu(n_1)}{\chi(n_1)}\right| > \varepsilon$$

ausfällt; dann ist

$$C(n_1, n_2) < (n_2 - n_1)\, L_{15}\left\{L_{15}(a, \varepsilon)\frac{n_2 - n_1}{n_1}\lg n_1\right\}^{L_{16}\frac{\lg n_1}{\lg\lg n_1}}.$$

Beweis. Folgt aus Hilfssatz 8 wegen

$$C(n_1, n_2) \leqq B(n_1, n_1 + 1) + B(n_1, n_1 + 2) + \ldots + B(n_1, n_2),$$

denn die Voraussetzungen von Hilfssatz 8 sind offenbar für jedes Paar (n_1, b) erfüllt.

Hilfssatz 10. *Bezeichnet man mit* $D(n)$ *die Wahrscheinlichkeit der Relation*

$$\mu(n) > (1 - \varepsilon)\chi(n),$$

so ist für $n > L_{17}(a, \varepsilon)$

$$D(n) > \frac{L_{17}}{(\lg n)^{1 - L_2(\varepsilon)}}.$$

Beweis. Am schnellsten überzeugt man sich von der Richtigkeit der Behauptung, indem man einen Satz von Liapounoff [7]) heranzieht, demzufolge die Wahrscheinlichkeit der Relation

$$\mu(n) > t\sqrt{2\sum_{i=1}^{n} p_i q_i}$$

für unendlich großes n dem Grenzwert

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_t^{+\infty} e^{-z^2}\, dz$$

gleichmäßig in t zustrebt, wobei das Fehlerglied von der Form

$$O\left(\frac{\lg n}{\sqrt{n}}\right)$$

[7]) Mém. de l'Acad. de St. Pétersb. (8) **12**, Nr. 5.

ist. Für $t=(1-\varepsilon)\sqrt{\lg\lg n}$ ergibt sich daraus

$$D(n)>\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{(1-\varepsilon)\sqrt{\lg\lg n}}^{+\infty}e^{-z^2}dz-\frac{L_8(a)\lg n}{\sqrt{n}}$$

$$>\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{(1-\varepsilon)\sqrt{\lg\lg n}}^{(1-\varepsilon)\sqrt{\lg\lg n}+1}e^{-z^2}dz-\frac{L_8(a)\lg n}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\left\{(1-\varepsilon)\sqrt{\lg\lg n}+1\right\}^2}-\frac{L_8(a)\lg n}{\sqrt{n}},$$

also für $n>L_{17}(a,\varepsilon)$

$$D(n)>\frac{L_{17}}{(\lg n)^{1-L_2(\varepsilon)}},$$

w. z. b. w.

§ 3.

Beweis des Hauptsatzes.

1.

Die positiven Zahlen $\eta<1$ und $\delta<1$ seien beliebig gegeben. Man setze

$$\varepsilon=\frac{\delta}{4},\qquad \alpha=\left[\frac{1}{L_{16}}\right]+2,\qquad \tau=\operatorname{Min}\left\{\frac{1}{2},\frac{L_8(a,\varepsilon)}{\alpha+4}\right\};$$

ferner setze man für jedes ganze positive m

$$n_{m,k}=\left[(1+\tau)^m\left(1+\frac{k\tau}{m^\alpha}\right)\right]+1\qquad(k=0,1,\ldots,m^\alpha).$$

Dann ergibt erstens Hilfssatz 6 mit $n=n_{m,0}$ für $m>L_{18}(a,\varepsilon)$

$$\text{(I)}\qquad A(n_{m,0})<\frac{L_7}{\{m\lg(1+\tau)\}^{1+L_1(\varepsilon)}}=\frac{L_{19}(a,\varepsilon)}{m^{1+L_1(\varepsilon)}}=u_m.$$

Ferner wollen wir Hilfssatz 7 mit $n_1=n_{m,0}$, $n_2=n_{m,k}$, $k=1,2,\ldots,m^\alpha$ anwenden; wegen

$$n_{m,k}-n_{m,0}<\frac{k\tau}{m^\alpha}(1+\tau)^m+1,\qquad \tau<1$$

sind seine Voraussetzungen für $m>L_{20}(a,\varepsilon)$ erfüllt, und wir erhalten

$$B(n_{m,0},n_{m,k})<L_{11}\left\{e^{-L_8(a,\varepsilon)\frac{(1+\tau)^m(\lg m+\lg\lg(1+\tau))}{\tau(1+\tau)^m+1}}+e^{-L_{12}\frac{m\lg(1+\tau)}{\lg m+\lg\lg(1+\tau)}}\right\}$$

$$<L_{11}\left\{e^{-L_8(a,\varepsilon)\frac{\lg m+\lg\lg(1+\tau)}{\tau+\frac{1}{(1+\tau)^m}}}+e^{-L_{12}\frac{m\lg(1+\tau)}{\lg m}}\right\}.$$

Wegen $\tau\leqq\frac{L_8(a,\varepsilon)}{\alpha+4}$ ist für $m>L_{21}(a,\varepsilon)$

$$\frac{L_8(a,\varepsilon)}{\tau+\frac{1}{(1+\varepsilon)^m}}>\alpha+3,\qquad(\alpha+3)(\lg m+\lg\lg(1+\tau))>(\alpha+2)\lg m$$

und folglich

$$B(n_{m,0}, n_{m,k}) < L_{11}\left\{\frac{1}{m^{\alpha+2}} + e^{-L_{12}\lg(1+\tau)\frac{m}{\lg m}}\right\}.$$

Daraus folgt weiter

$$\text{(II)} \qquad \sum_{k=1}^{m^\alpha} B(n_{m,0}, n_{m,k}) < L_{11}\left\{\frac{1}{m^2} + m^\alpha e^{-L_{12}\lg(1+\tau)\frac{m}{\lg m}}\right\} = v_m.$$

Endlich wollen wir Hilfssatz 9 anwenden; dabei setzen wir $n_1 = n_{m,k}$, $n_2 = n_{m,k+1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m^\alpha - 1$. Für $m > L_{22}(a, \varepsilon)$ sind dann die Bedingungen

$$L_{16}(a, \varepsilon) < n_1 < n_2 < 2n_1,$$

wie man leicht sieht, erfüllt. Ferner ist

$$n_2 - n_1 < \frac{(1+\tau)^m \tau}{m^\alpha} + 1,$$

also für $m > L_{23}(a, \varepsilon)$

$$\frac{n_2 - n_1}{n_1} \lg n_1 < \frac{(1+\tau)^m \tau + m^\alpha}{m^\alpha (1+\tau)^m} (m+1) \lg(1+\tau)$$

$$= \frac{m+1}{m^\alpha} \lg(1+\tau)\left\{\tau + \frac{m^\alpha}{(1+\tau)^m}\right\} < L_{10}(a, \varepsilon),$$

denn α ist größer als 1.

Die Bedingung (13) ist also auch erfüllt; damit haben wir die Anwendbarkeit von Hilfssatz 9 festgestellt.

Somit erhalten wir für $m > L_{24}(a, \varepsilon)$

$$C(n_{m,k}, n_{m,k+1})$$

$$< \left\{(1+\tau)^m \frac{\tau}{m^\alpha} + 1\right\} L_{15}\left\{\frac{L_{15}(a, \varepsilon)\{(1+\tau)^m \tau + m^\alpha\}(m+1)\lg(1+\tau)}{m^\alpha (1+\tau)^m}\right\}^{L_{16}\frac{m\lg(1+\tau)}{\lg m}}$$

$$< L_{15}\frac{(1+\tau)^m}{m^\alpha}\left\{\frac{L_{25}(a, \varepsilon)\, m}{m^\alpha}\right\}^{L_{16}\frac{m\lg(1+\tau)}{\lg m}}$$

$$< \frac{L_{15}}{m^\alpha} e^{m\lg(1+\tau)(1-(\alpha-1)L_{16}) + L_{26}(a,\varepsilon)\frac{m}{\lg m}}.$$

Nun ist nach der Definition von α

$$1 - (\alpha - 1) L_{16} < 0;$$

daher wird für $m > L_{27}(a, \varepsilon)$

$$C(n_{m,k}, n_{m,k+1}) < \frac{L_{15}}{m^\alpha} e^{-L_{28}(a,\varepsilon)\, m} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, m^\alpha - 1),$$

und folglich

$$\text{(III)} \qquad \sum_{k=0}^{m^\alpha - 1} C(n_{m,k}, n_{m,k+1}) < L_{15}\, e^{-L_{28}(a,\varepsilon)\, m} = w_m.$$

Wir bemerken zunächst, daß die Ausdrücke u_m, v_m, w_m allgemeine Glieder konvergenter Reihen in bezug auf m sind. Deshalb können wir die Zahl $m_1 = m_1(a, \delta, \eta)$ so groß wählen, daß erstens für $m \geqq m_1$ die Abschätzungen (I), (II) und (III) gültig werden und zweitens

$$\sum_{m=m_1}^{\infty} (u_m + v_m + w_m) < \frac{\eta}{2} \tag{14}$$

wird.

Dann ist erstens die Wahrscheinlichkeit dafür, daß für wenigstens ein $m \geqq m_1$ die Relation

$$\frac{|\mu(n_{m,0})|}{\chi(n_{m,0})} > 1 + \varepsilon \tag{A}$$

erfüllt wird, nicht größer als

$$\sum_{m=m_1}^{\infty} A(n_{m,0}) < \sum_{m=m_1}^{\infty} u_m.$$

Zweitens ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß für wenigstens ein Paar m, k $(m \geqq m_1, 1 \leqq k \leqq m^\alpha)$ die Relation

$$\left| \frac{\mu(n_{m,0})}{\chi(n_{m,0})} - \frac{\mu(n_{m,k})}{\chi(n_{m,k})} \right| > \varepsilon \tag{B}$$

besteht, nicht größer als

$$\sum_{m=m_1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m^\alpha} B(n_{m,0}, n_{m,k}) < \sum_{m=m_1}^{\infty} v_m.$$

Drittens ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß für wenigstens ein $n \geqq n_{m_1,0}$, wenn m und k durch

$$n_{m,k} \leqq n < n_{m,k+1} \tag{15}$$

bestimmt werden, die Relation

$$\left| \frac{\mu(n)}{\chi(n)} - \frac{\mu(n_{m,k})}{\chi(n_{m,k})} \right| > \varepsilon \tag{C}$$

besteht, nicht größer als

$$\sum_{m=m_1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m^\alpha - 1} C(n_{m,k}, n_{m,k+1}) < \sum_{m=m_1}^{\infty} w_m.$$

Deswegen liefert uns die Ungleichung (14) folgendes: Mit einer Wahrscheinlichkeit $> 1 - \frac{\eta}{2}$ dürfen wir behaupten, daß für kein $n \geqq n_{m_1,0}$, wenn m und k durch (15) bestimmt werden, irgendeine der Ungleichungen (A), (B), (C) bestehen wird.

Wir können demgemäß mit einer Wahrscheinlichkeit $> 1 - \frac{\eta}{2}$ *behaupten, daß für alle* $n \geqq n_{m_1,0}$

$$\left|\frac{\mu(n)}{\chi(n)}\right| \leqq \left|\frac{\mu(n)}{\chi(n)} - \frac{\mu(n_{m,k})}{\chi(n_{m,k})}\right| + \left|\frac{\mu(n_{m,k})}{\chi(n_{m,k})} - \frac{\mu(n_{m,0})}{\chi(n_{m,0})}\right| + \left|\frac{\mu(n_{m,0})}{\chi(n_{m,0})}\right| \leqq \varepsilon + \varepsilon + (1+\varepsilon) < 1 + \delta \tag{16}$$

ist.

2.

Es bedeute A eine große, nur von a, δ und η abhängende positive ganze Zahl, die später näher bestimmt werden soll. Wir wollen mit P_k die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Bestehen der Relationen

$$\left|\frac{\mu(A^k)}{\chi(A^k)}\right| > 1 - 2\varepsilon, \tag{17}$$

$$\left|\frac{\mu(A^i)}{\chi(A^i)}\right| \leqq 1 - 2\varepsilon \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, k-1 \tag{18}$$

bezeichnen; $\sum_{k=1}^{t} P_k$ ist dann genau die Wahrscheinlichkeit dafür, daß für wenigsten ein $k \leqq t$ (17) erfüllt ist.

Wir betrachten die Versuche der Nummern

$$A^{k-1}+1 \quad \text{bis} \quad A^k;$$

das Ereignis E möge dabei

$$M = m(A^k) - m(A^{k-1})$$

mal eintreten.

Die Wahrscheinlichkeit der Relation

$$\frac{M - \sum_{i=A^{k-1}+1}^{A^k} p_i}{\sqrt{2 \sum_{i=A^{k-1}+1}^{A^k} p_i q_i \lg\lg(A^k - A^{k-1})}} > 1 - \varepsilon \tag{19}$$

ist nach Hilfssatz 10 für genügend großes A größer als

$$\frac{L_{17}}{\{\lg(A^k - A^{k-1})\}^{1-L_2(\varepsilon)}}.$$

Nun mögen (19) für einen bestimmten Wert von k und (18) für jedes $i < k$ erfüllt sein; wir wollen zeigen, daß dann auch (17) notwendig erfüllt sein muß.

Zu dem Ende bemerken wir, daß

$$M - \sum_{i=A^{k-1}+1}^{A^k} p_i = \mu(A^k) - \mu(A^{k-1})$$

ist.

Aus (19) folgt daher

$$\mu(A^k) > \mu(A^{k-1}) + (1+\varepsilon)\sqrt{2\sum_{i=A^{k-1}+1}^{A^k} p_i q_i \lg\lg(A^k - A^{k-1})}$$

$$= \mu(A^{k-1}) + (1-\varepsilon)\sqrt{\frac{\sum_{i=A^{k-1}+1}^{A^k} p_i q_i}{\sum_{i=1}^{A^k} p_i q_i}}\sqrt{2\sum_{i=1}^{A^k} p_i q_i \lg\lg(A^k - A^{k-1})}.$$

Nun ist

$$\frac{\sum_{i=A^{k-1}+1}^{A^k} p_i q_i}{\sum_{i=1}^{A^k} p_i q_i} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{A^{k-1}} p_i q_i}{\sum_{i=1}^{A^k} p_i q_i} > 1 - \frac{A^{k-1}}{a^2 A^k} = 1 - \frac{1}{a^2 A}.$$

Folglich wird

$$\mu(A^k) > \mu(A^{k-1}) + (1-\varepsilon)\sqrt{1 - \frac{1}{a^2 A}}\,\chi(A^k)\sqrt{\frac{\lg\lg(A^k - A^{k-1})}{\lg\lg A^k}}.$$

Andererseits folgt aus (18)

$$\mu(A^{k-1}) > -(1-2\varepsilon)\chi(A^{k-1})$$

$$> -(1-2\varepsilon)\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{A^{k-1}} p_i q_i}{\sum_{i=1}^{A^k} p_i q_i}}\cdot\chi(A^k)$$

$$> -(1-2\varepsilon)\sqrt{\frac{1}{a^2 A}}\,\chi(A^k).$$

Demgemäß erhält man

$$\mu(A^k) > \chi(A^k)\left\{(1-\varepsilon)\sqrt{1 - \frac{1}{a^2 A}}\sqrt{\frac{\lg\lg(A^k - A^{k-1})}{\lg\lg A^k}} - (1-2\varepsilon)\frac{1}{a\sqrt{A}}\right\}.$$

Die Relation (17) folgt daraus a fortiori, wenn der Ausdruck in den geschweiften Klammern größer als $1-2\varepsilon$ ist; und das wird, wie eine leichte Rechnung zeigt, tatsächlich für jedes k der Fall sein, sobald nur A genügend groß gewählt ist.

Es ist also (17) eine Folge von (18) und (19); folglich ist P_k nicht kleiner als die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Bestehens von (18) und (19). Bezeichnet man mit π_k die Wahrscheinlichkeit der Relation (19) und bemerkt, daß diejenige der Gesamtheit der Relationen (18) gleich

$$1 - \sum_{i=1}^{k-1} P_i$$

ist und daß (18) und (19) die Ergebnisse zweier voneinander unabhängigen Versuchsreihen darstellen, so hat man folglich nach dem Multiplikationstheorem der Wahrscheinlichkeiten

$$P_k \geqq \pi_k \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} P_i\right). \tag{20}$$

Wegen

$$\pi_k > \frac{L_{17}}{\{\lg (A^k - A^{k-1})\}^{1-L_2(\varepsilon)}}$$

überzeugt man sich leicht, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \pi_k$$

divergiert. Da nun die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k$$

ihrer Definition gemäß konvergent sein muß, so folgt aus (20)

$$\lim_{k \to \infty} \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} P_i\right) = 0.$$

Deshalb kann K so gewählt werden, daß

$$\sum_{i=1}^{K} P_i > 1 - \frac{\eta}{2}$$

wird. Mit einer Wahrscheinlichkeit $> 1 - \frac{\eta}{2}$ können wir dann behaupten, daß für wenigstens ein k, $1 \leqq k \leqq K$, die Relation (17) erfüllt wird. Tragen wir noch Sorge dafür, daß $A > n_{m_1, 0}$ ist, und bemerken, daß $1 - 2\varepsilon > 1 - \delta$ sein muß, so können wir, das letzterhaltene Resultat mit demjenigen des ersten Abschnitts dieses Paragraphen vereinigend, das Gesamtergebnis folgenderweise aussprechen.

Sind δ und η feste positive Zahlen, so läßt sich eine ganze positive und zwar beliebig große Zahl A derart finden, daß mit einer Wahrscheinlichkeit $> 1 - \eta$ zweierlei behauptet werden darf, nämlich

1. *Es ist $|\mu(n)| < (1 + \delta)\chi(n)$ für alle $n \geqq A$;*
2. *Es ist $|\mu(n)| > (1 - \delta)\chi(n)$ für wenigstens ein $n \geqq A$.*

Damit ist aber unser Satz bewiesen.

Moskau, den 24. 3. 1925.

(Eingegangen am 2. 6. 1925.)