Über die simultane Approximation von Irrationalzahlen.

Von

Ph. Furtwängler in Wien.

Die Theorie der Approximation einer einzelnen reellen Irrationalzahl ist durch den folgenden Doppelsatz zu einem gewissen Abschluß gekommen:

Satz 1a. *Ist α eine beliebige reelle Irrationalität und k eine Konstante, die nicht kleiner als $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ist, so hat die Ungleichung*

$$\left|\frac{x}{y} - \alpha\right| < \frac{k}{y^2}$$

stets unendlich viele Lösungen in (teilerfremden) ganzen rationalen Zahlen x, y.

Satz 1b. *Ist k eine positive Konstante, die kleiner als $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ist, so gibt es stets reelle Irrationalitäten α von solcher Beschaffenheit, daß die Ungleichung*

$$\left|\frac{x}{y} - \alpha\right| < \frac{k}{y^2}$$

nicht unendlich viele Lösungen in (teilerfremden) ganzen rationalen Zahlen x, y besitzt.

Für die simultane Approximation mehrerer rational unabhängiger Irrationalitäten ist ein abschließendes Resultat nicht bekannt. Untersuchungen, die in der Richtung des Satzes 1a liegen, lassen sich nach Methoden von Dirichlet und Minkowski durchführen; eine Erweiterung des Satzes 1b ist von Herrn O. Perron[1]) angegeben.

Im folgenden soll ein allgemeiner Satz über die gleichzeitige Approximation von $n-1$ rational unabhängigen reellen Irrationalitäten bewiesen werden, von dem der Satz 1b ein spezieller Fall ist und der wesentlich

[1]) Über Diophantische Approximationen, Math. Annalen **83** (1921), S. 77.

schärfere Resultate liefert als die Entwicklungen des Herrn Perron, wie später noch näher ausgeführt wird. Der Satz lautet:

Satz 2. *Ist k eine positive Konstante, die kleiner als*

$$\frac{1}{|D|^{\frac{1}{2(n-1)}}}$$

ist, wo D die absolut kleinste Diskriminante eines reellen Zahlkörpers n-ten Grades bedeutet, so gibt es stets $n-1$ reelle rational unabhängige Irrationalitäten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ von solcher Beschaffenheit, daß die $n-1$ Ungleichungen

$$\left|\alpha_i - \frac{x_i}{x_n}\right| < \frac{k}{|x_n|^{1+\frac{1}{n-1}}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

nicht unendlich viele Lösungen in (teilerfremden) ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ besitzen.

Da 5 die kleinste Diskriminante eines reellen quadratischen Zahlkörpers ist, geht offenbar Satz 1b aus Satz 2 für $n = 2$ hervor. Durch den Satz 2 scheint mir die Bedeutung der Konstanten $\frac{1}{\sqrt{5}}$ in Satz 1b vollständig aufgeklärt zu sein.

Die absolut kleinste Diskriminante eines (reellen) kubischen Körpers ist -23. Es folgt daher speziell aus Satz 2:

Satz 3. *Ist k eine positive Konstante, die kleiner ist als* $\frac{1}{\sqrt[4]{23}}$ (0,45663), *so gibt es stets zwei reelle rational unabhängige Irrationalitäten α_1, α_2 von solcher Beschaffenheit, daß die Ungleichungen:*

$$\left|\alpha_1 - \frac{x}{z}\right| < \frac{k}{|z|^{3/2}}, \qquad \left|\alpha_2 - \frac{y}{z}\right| < \frac{k}{|z|^{3/2}}$$

nicht unendlich viele Lösungen in ganzen teilerfremden Zahlen x, y, z haben.

Aus den Untersuchungen des Herrn Perron ergibt sich ein dem Satz 3 analoger Satz nur für $k < 0{,}04269$.

Die geometrischen Methoden von Minkowski haben ergeben, daß bei der simultanen Approximation von zwei Irrationalitäten der „Näherungskoeffizient“ $k = {}^2/_3$ allgemein zulässig ist. Es wird dies Resultat erhalten, indem als „Eichkörper“ bei der Approximation Oktaeder benutzt werden, die in bestimmter Weise zum Koordinatensystem orientiert sind. Beachtet man noch, was ebenfalls Minkowski festgestellt hat, daß gitterförmig angeordnete kongruente Oktaeder höchstens ${}^{18}/_{19}$ des Raumes ausfüllen können, so ergibt sich, daß $k = \sqrt{{}^8/_{19}}$ (0,64889) allgemein als Näherungskoeffizient zulässig ist. Ob er noch weiter auf $\frac{1}{\sqrt[4]{23}}$ hinabgedrückt werden kann, wie man in Analogie mit Satz 1a vermuten würde, habe ich bisher nicht festgestellt. Die Approximationsverfahren, die man im Anschluß an die Ideen von Minkowski entwickeln kann, sind zwar geometrisch einfach und durchsichtig, führen aber analytisch zu ziemlich schwerfälligen Algorithmen. Ein so einfaches Verfahren, wie die gewöhnliche Kettenbruchentwicklung für eine einzelne Irrationalität, das geometrisch durchsichtig und formal einfach ist, fehlt noch im Falle von mehreren Irrationalitäten.

§ 1.

Es sei k ein reeller algebraischer Zahlkörper n-ten Grades mit der Diskriminante D und es sei $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ eine Minimalbasis von k. Die konjugierten Körper zu k sollen mit $k'', \ldots, k^{(n)}$ bezeichnet werden, entsprechend die konjugierten Zahlen zu einer Zahl ω aus k mit $\omega'', \ldots, \omega^{(n)}$. Die adjungierte Determinante zu

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_n \\ \omega_1'' & \omega_2'' & \ldots & \omega_n'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_1^{(n)} & \omega_2^{(n)} & \ldots & \omega_n^{(n)} \end{vmatrix} \quad \text{sei} \quad \begin{vmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \ldots & \Omega_n \\ \Omega_1'' & \Omega_2'' & \ldots & \Omega_n'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Omega_1^{(n)} & \Omega_2^{(n)} & \ldots & \Omega_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Da Ω_i^2 eine Zahl aus k ist, würden mit ihr gleichzeitig die konjugierten Zahlen verschwinden, was zu $D = 0$ führen würde; es ist daher $\Omega_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Die Quotienten $\frac{\Omega_i}{\Omega_n}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ sind reell, denn sie sind die Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{gathered} \omega_1'' y_1 + \omega_2'' y_2 + \ldots + \omega_{n-1}'' y_{n-1} + \omega_n'' = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \omega_1^{(n)} y_1 + \omega_2^{(n)} y_2 + \ldots + \omega_{n-1}^{(n)} y_{n-1} + \omega_n^{(n)} = 0 \end{gathered}$$

und dies System geht bei Vertauschung von $+i$ mit $-i$ in sich über.

Es sollen jetzt die Quotienten $\frac{\Omega_i}{\Omega_n}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ simultan approximiert werden. Es sei

$$(1) \qquad \left| \frac{x_i}{x_n} - \frac{\Omega_i}{\Omega_n} \right| \leqq \frac{k}{|x_n|^{1+\frac{1}{n-1}}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Wir können dann setzen:

$$(2) \qquad \frac{x_i}{x_n} = \frac{\Omega_i}{\Omega_n} + \frac{k \varepsilon_i}{|x_n|^{1+\frac{1}{n-1}}}, \quad |\varepsilon_i| \leqq 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Aus den letzten Gleichungen folgt:

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \dots + \omega_n x_n &= \frac{\sqrt{D}}{\Omega_n} x_n + \frac{k(\varepsilon_1 \omega_1 + \dots + \varepsilon_{n-1}\omega_{n-1})}{|x_n|^{\frac{1}{n-1}}}\\
\omega_1'' x_1 + \omega_2'' x_2 + \dots + \omega_n'' x_n &= \frac{k(\varepsilon_1 \omega_1'' + \dots + \varepsilon_{n-1}\omega_{n-1}'')}{|x_n|^{\frac{1}{n-1}}}\\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\\
\omega_1^{(n)} x_1 + \omega_2^{(n)} x_2 + \dots + \omega_n^{(n)} x_n &= \frac{k(\varepsilon_1 \omega_1^{(n)} + \dots + \varepsilon_{n-1}\omega_{n-1}^{(n)})}{|x_n|^{\frac{1}{n-1}}}
\end{aligned}
$$

Es muß daher gelten:

$$
(4)\quad
\begin{aligned}
&|\operatorname{Norm}(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \dots + \omega_n x_n)|\\
&= k^{n-1}\left|\frac{\sqrt{D}}{\Omega_n}\prod_{i=2}^{n}(\varepsilon_1\omega_1^{(i)} + \dots + \varepsilon_{n-1}\omega_{n-1}^{(i)})\right| + \frac{k'}{|x_n|^{1+\frac{1}{n-1}}},
\end{aligned}
$$

wo k' eine Konstante bedeutet, die nach oben und unten geschränkt ist.

Sollen nun die Ungleichungen (1) unendlich viele Lösungen in ganzen (teilerfremden) Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ haben, so muß es unter diesen solche mit beliebig großem $|x_n|$ geben. Es ergibt sich dann aus (4), da die linke Seite nicht kleiner als 1 sein kann:

$$
(5)\quad k^{n-1} \geqq \frac{1}{\sqrt{|D|}}\cdot\left|\frac{\Omega_n}{\prod_{i=2}^{n}(\varepsilon_1\omega_1^{(i)} + \dots + \varepsilon_{n-1}\omega_{n-1}^{(i)})}\right|.
$$

Es ist jetzt zu untersuchen, wie man den Quotienten

$$
(6)\quad Q = \left|\frac{\Omega_n}{\prod_{i=2}^{n}(\varepsilon_1\omega_1^{(i)} + \dots + \varepsilon_{n-1}\omega_{n-1}^{(i)})}\right|
$$

durch geeignete Wahl der Minimalbasis $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, die noch freisteht, möglichst groß machen kann.

§ 2.

Es soll gezeigt werden, daß man durch geeignete Wahl der Minimalbasis den Quotienten Q größer als $1-\varepsilon$ machen kann, wenn ε eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet. Zu diesem Zweck wählen wir $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ so, daß sowohl in der Determinante Ω_n wie auch in dem Produkt $\prod_{i=2}^{n}(\varepsilon\omega_1^{(i)} + \dots + \varepsilon_{n-1}\omega_{n-1}^{(i)})$ der absolute Betrag *eines* Gliedes (und zwar in beiden Fällen desselben Gliedes) die absoluten Beträge aller anderen Glieder beliebig stark übertrifft.

Es sei *erstens* k'' reell. Wir wollen dann zeigen, daß man stets eine beliebige Basiszahl, etwa ω_1, durch $\tau_1 = \omega_1 + u_2\omega_2 + \dots + u_n\omega_n$ (u_i ganz rational) ersetzen kann, so daß

$$(7) \qquad |\tau_1''| > g\,|\tau_1^{(i)}| \qquad (i = 3, 4, \dots, n),$$

wo g eine beliebig große positive Zahl bedeutet. Wir lösen das Gleichungssystem:

$$(8) \qquad \begin{cases} \omega_1'' + \bar{u}_2\,\omega_2'' + \dots + \bar{u}_n\,\omega_n'' = g' \\ \omega_1''' + \bar{u}_2\,\omega_2''' + \dots + \bar{u}_n\,\omega_n''' = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \omega_1^{(n)} + \bar{u}_2\,\omega_2^{(n)} + \dots + \bar{u}_n\,\omega_n^{(n)} = 0 \end{cases}$$

wo $g' = (g+1)\,\vartheta$ und

$$\vartheta = \mathrm{Max}\,(|\omega_2^{(i)}| + \dots + |\omega_n^{(i)}|) \qquad (i = 2, 3, \dots, n)$$

ist. Das Gleichungssystem hat eine reelle Lösung. Setzt man dann $u_i = [\bar{u}_i]$, so wird

$$|\tau_1''| > g' - \vartheta = g\,\vartheta, \quad |\tau_1^{(i)}| < \vartheta \qquad (i = 3, 4, \dots, n)$$

und daher $|\tau_1''| > g\,|\tau_1^{(i)}|$ $(i = 3, 4, \dots, n)$.

Es seien *zweitens* k'' und k''' konjugiert komplex. Setzt man, wenn $\omega = \varrho + \sigma i$ ist, $\varrho = \Re(\omega)$ und $\sigma = \Im(\omega)$, so läßt sich zeigen, daß man stets eine beliebige Basiszahl, etwa ω_1, durch $\tau_1 = \omega_1 + u_2\omega_2 + \dots + u_n\omega_n$ so ersetzen kann, daß

$$(9) \qquad |\Re(\tau_1'')| > g\,|\Im(\tau_1'')|, \quad |\Re(\tau_1'')| > g\,|\tau_1^{(i)}| \qquad (i = 4, 5, \dots, n),$$

wo g eine beliebig große positive Zahl bedeutet. Wir lösen zu diesem Zweck die Gleichungen:

$$(10) \qquad \begin{cases} \Re(\omega_1'') + \bar{u}_2\,\Re(\omega_2'') + \dots + \bar{u}_n\,\Re(\omega_n'') = (g+1)\,\vartheta \\ \Im(\omega_1'') + \bar{u}_2\,\Im(\omega_2'') + \dots + \bar{u}_n\,\Im(\omega_n'') = 0 \\ \omega_1^{(i)} + \bar{u}_2\,\omega_2^{(i)} + \dots + \bar{u}_n\,\omega_n^{(i)} = 0 \quad (i = 4, 5, \dots, n) \end{cases}$$

wo ϑ dieselbe Bedeutung wie oben hat. Die Gleichungen haben stets eine reelle Lösung. Setzt man dann $u_i = [\bar{u}_i]$, so ergibt sich wie unter 1., daß die Bedingungen (9) erfüllt sind.

In ganz analoger Weise kann man offenbar eine beliebige Basiszahl, etwa ω_1, durch $\tau_1 = \omega_1 + u_2\omega_2 + \dots + u_n\omega_n$ so ersetzen, daß die Ungleichungen:

$$(11) \qquad |\Im(\tau_1'')| > g\,|\Re(\tau_1'')|, \quad |\Im(\tau_1'')| > g\,|\tau_1^{(i)}| \qquad (i = 4, 5, \dots, n)$$

gelten, wo g wieder eine beliebig große positive Zahl ist.

Es ist zu beachten, daß in allen diesen Fällen immer nur eine einzelne Basiszahl geändert wird, während alle übrigen unverändert bleiben.

Es mögen nun die Körper $k, k'', \ldots, k^{(r)}$ reell, ferner

$$k^{(r+1)}, k^{(r+2)}; \ldots; k^{(n-1)}, k^{(n)}$$

konjugiert komplex sein. Man kann dann auf Grund der vorstehenden Entwicklungen die Minimalbasis $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ so wählen, daß in der Determinante

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} \omega_1'' & \omega_2'' & \ldots & \omega_{n-1}'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_1^{(r)} & \omega_2^{(r)} & \ldots & \omega_{n-1}^{(r)} \\ \varrho_1^{(1)} & \varrho_2^{(1)} & \ldots & \varrho_{n-1}^{(1)} \\ \sigma_1^{(1)} & \sigma_2^{(1)} & \ldots & \sigma_{n-1}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varrho_1^{(s)} & \varrho_2^{(s)} & \ldots & \varrho_{n-1}^{(s)} \\ \sigma_1^{(s)} & \sigma_2^{(s)} & \ldots & \sigma_{n-1}^{(s)} \end{vmatrix}$$

der absolute Betrag eines Gliedes der Hauptdiagonale größer ist als das g-fache des absoluten Betrages eines anderen Gliedes in der gleichen Spalte. Dabei ist gesetzt:

$$\omega_i^{(r+2k-1)} = \varrho_i^{(k)} + i\,\sigma_i^{(k)}, \quad \omega_i^{(r+2k)} = \varrho_i^{(k)} - i\,\sigma_i^{(k)} \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, s \end{pmatrix}, r + 2s = n$$

und g bezeichnet eine beliebig große positive Zahl. Bezeichnet man das Produkt der Glieder der Hauptdiagonale in (12) mit P, so gilt:

$$(13) \qquad |\Omega_n| = 2^s |P| \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{g}\right)\right).$$

Für das Produkt

$$\prod_{i=2}^{n} (\varepsilon_1 \omega_1^{(i)} + \ldots + \varepsilon_{n-1} \omega_{n-1}^{(i)}) = \Pi$$

ergibt sich:

$$(14) \qquad |\Pi| \leqq \prod_{i=2}^{n} (|\omega_1^{(i)}| + \ldots + |\omega_{n-1}^{(i)}|) = 2^s |P| \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{g}\right)\right).$$

Aus den Beziehungen (13) und (14) folgt dann unsere Behauptung über den Quotienten Q. Damit ist aber Satz 2 vollständig bewiesen.

Für den vierten und die höheren Grade waren bisher die reellen Körper mit absolut kleinster Diskriminante nicht bekannt. Auf meine Veranlassung hat mein Schüler Herr J. Mayer die biquadratischen Körper untersucht und gefunden, daß der reelle biquadratische Körper mit absolut kleinster Diskriminante die Diskriminante -275 hat. Er kann durch die Zahl

$$x = \frac{-1 + \sqrt{3 + 2\sqrt{5}}}{2}$$

definiert werden, die der Gleichung

$$x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$$

genügt[2]). Man erhält daher für $n = 4$ den

Satz 4. *Ist k eine positive Konstante kleiner als $\frac{1}{\sqrt[6]{275}}$ (0,392), so gibt es stets drei reelle Irrationalitäten ω_i $(i = 1, 2, 3)$ von solcher Beschaffenheit, daß die Ungleichungen*

$$\left|\frac{x_i}{x_4} - \omega_i\right| < \frac{k}{|x_4|^{4/3}} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

nicht unendlich viele Lösungen in (teilerfremden) ganzen Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 haben.

Herr Perron (Satz 4) findet für k die Grenze 0,00383.

Da man in Satz 2 für D die Diskriminante eines beliebigen reellen Zahlkörpers n-ten Grades oder einer irreduziblen Gleichung n-ten Grades mit wenigstens einer reellen Wurzel nehmen kann, betrachten wir, um auch einen Satz über die Approximation einer beliebigen Anzahl von Irrationalitäten zu erhalten, den Körper $\sqrt[n]{2}$. Der absolute Betrag seiner Diskriminante ist $2^{n-1} n^n$, und es kann daher, wenn man $n - 1$ Irrationalitäten gleichzeitig approximiert, der Näherungskoeffizient k allgemein nicht kleiner als

$$\frac{1}{\sqrt{2n}\, n^{\frac{1}{2(n-1)}}}$$

und um so mehr als $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ gemacht werden. Wir haben deshalb

Satz 5. *Es gibt stets $n - 1$ reelle Irrationalitäten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ von solcher Art, daß die Ungleichungen*

$$\left|\frac{x_i}{x_n} - \alpha_i\right| \leqq \frac{k}{|x_n|^{1+\frac{1}{n-1}}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

nicht durch unendlich viele Systeme (teilerfremder) ganzer Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ befriedigt werden können, wenn

$$k < \frac{1}{\sqrt{2n} \cdot n^{\frac{1}{2(n-1)}}}$$

ist, und um so mehr, wenn $k < \frac{1}{2\sqrt{n}}$ ist.

Herr Perron findet für k die Grenze $\frac{1}{n-1}\left(\frac{\sqrt[n]{2}-1}{2}\right)^{n-1}$. Im Falle $n = 11$ ist dies angenähert $1{,}5 \cdot 10^{-16}$, während $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ den Wert 0,15 hat.

---

[2]) Es ergiebt sich also das bemerkenswerte Resultat, daß der reelle biquadratische Körper mit absolut kleinster Diskriminante ein Relativkörper des reellen quadratischen Körpers mit kleinster Diskriminante ist.

(Eingegangen am 4. 11. 1925.)