Zur Nullstellentheorie der Polynomideale.

Von

B. L. van der Waerden in Amsterdam.

Die exakte Begründung der Theorie der algebraischen Mannigfaltigkeiten in n-dimensionalen Räumen kann nur mit den Hilfsmitteln der Idealtheorie geschehen, weil schon die Definition einer algebraischen Mannigfaltigkeit unmittelbar auf Polynomideale führt. Eine Mannigfaltigkeit heißt ja algebraisch, wenn sie durch algebraische Gleichungen in den n Koordinaten bestimmt wird, und die linken Seiten aller Gleichungen, die aus diesen Gleichungen folgen, bilden ein Polynomideal (Def. § 1, 4).

Diese Begründung kann nun einfacher gestaltet werden als es bisher geschehen ist[1]), nämlich ohne Hilfe der Eliminationstheorie, ausschließlich auf dem Boden der Körpertheorie[2]) und der allgemeinen Idealtheorie in Ringbereichen[3]). Das zu zeigen ist das erste Ziel dieser Arbeit[4]). Die Eliminationstheorie hat in diesem Schema nur die Aufgabe, zu untersuchen, wie man (bei gegebener Idealbasis) in endlichvielen Schritten

[1]) Kronecker, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. Journ. f. Math. **92** (1882), S. 1–122; J. König, Einleitung in die Theorie der algebraischen Größen (Leipzig 1903); F. S. Macaulay, Modular Systems (Cambridge Tracts **19** (1916)) und die dort angegebene Literatur; K. Hentzelt, Zur Theorie der Polynomideale und Resultanten (bearbeitet von E. Noether), Math. Ann. **88** (1922), S. 53–79; E. Noether, Eliminationstheorie und allgemeine Idealtheorie, Math. Ann. **90** (1923), S. 229–261.

[2]) E. Steinitz, Algebraische Theorie der Körper, Journ. f. Math. **137** (1910), S. 167–309.

[3]) E. Noether, Idealtheorie in Ringbereichen, Math. Ann. **83** (1921), S. 24–66.

[4]) Wie Frl. Noether mir mitteilte, hat sie in ihren Vorlesungen Winter 1923/24 und Sommer 1924 schon im wesentlichen mit den gleichen Methoden die Theorie aufgebaut. Einem Vorlesungsheft aus dieser Zeit verdanke ich eine Anzahl Verbesserungen der Darstellung. Auch schulde ich Fräulein Noether Dank für viele nützliche Ratschläge bei der Abfassung der vorliegenden Arbeit.

die Nullstellenmannigfaltigkeiten eines Ideals und die Basis der zugehörigen Primideale und Primärideale finden kann[5]).

Das arithmetische Problem, dessen Diskussion die Lösung unserer geometrischen Probleme ergeben wird, lautet folgendermaßen. Sei P ein Körper, Ω ein Erweiterungskörper, der durch die Adjunktion endlichvieler Elemente $\xi_1, \ldots, \xi_n$ (unter denen sich überflüssige befinden dürfen, ja sogar Größen aus P) erzeugt wird. Läßt sich der Körper Ω durch algebraische Relationen zwischen den ξ_i charakterisieren? Wir werden zu dem Zweck die Gesamtheit der Polynome $f(x_1, \ldots, x_n)$ mit Koeffizienten aus P, für welche $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ ist, betrachten. Diese Gesamtheit ist, wie sich leicht zeigt, ein Primideal (Def. § 1, 12) im Polynombereich, und die Struktur des Körpers Ω ist durch das Primideal nach einer formalen Regel (§ 3, 2) eindeutig bestimmt. Umgekehrt läßt sich zu jedem vom Einheitsideal verschiedenen Primideal mittels dieser formalen Regel ein Körper Ω mit den oben angegebenen Eigenschaften bilden. Diese Reziprozität liefert die Eigenschaften der Primideale als einfache Folgen bekannter Körpereigenschaften (§ 3).

Diese arithmetischen Betrachtungen ergeben „geometrische“ Tatsachen, wenn unter „Punkt“ verstanden wird ein System von n Elementen aus dem Körper P, der dann als algebraisch-abgeschlossener Körper vorausgesetzt wird (etwa der Körper der komplexen Zahlen). Diejenigen Punkte, welche Nullstellen für alle Polynome des Primideals sind, bilden eine irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit. Die Körperelemente $\xi_1, \ldots, \xi_n$, als algebraische Funktionen einer Anzahl unabhängiger Elemente aufgefaßt, ergeben eine „Parameterdarstellung“ der Mannigfaltigkeit. Durch diese doppelte Erzeugungsweise ergeben sich ohne Schwierigkeit die (bekannten) Eigenschaften der irreduziblen Mannigfaltigkeiten (§ 4).

In § 5 wird der Zerlegungssatz der allgemeinen Idealtheorie herangezogen, mit dessen Hilfe auch die Nullstellen der Nichtprimideale der Untersuchung zugänglich werden. Es ergibt sich ohne weiteres die Zerlegung einer beliebigen algebraischen Mannigfaltigkeit in irreduzible; weiter der Dimensionsbegriff für beliebige Ideale und seine Eigenschaften, endlich der Hilbertsche Nullstellensatz und ein neuer Satz über Ideale von n-Dimensionen.

Sodann (§ 6) gestatten die entwickelten Methoden einen neuen Beweis einer von K. Hentzelt[6]) gefundenen n-dimensionalen Verallgemeinerung des M. Noetherschen „Fundamentalsatzes der Theorie der algebraischen

[5]) Grete Hermann, Die Frage der endlichvielen Schritte in der Theorie der Polynomideale, Math. Ann. **95** (1926), S. 736.

[6]) K. Hentzelts Dissertation ist nicht gedruckt. Sein Beweis findet sich aber bei Grete Hermann, a. a. O.

Funktionen". Der Beweis ist bedeutend einfacher als der Hentzeltsche, dafür aber nicht konstruktiv im Sinne der endlichvielen Schritte.

Die größere Einfachheit und zugleich größere Allgemeinheit der vorliegenden, stark an E. Noether (Math. Ann. **90**, s. o.) anlehnenden Theorie gegenüber den älteren Theorien konnte nur erreicht werden durch äußerste Arithmetisierung aller Begriffe und Operationen.

Ich konnte dabei anschließen an die Körpertheorie und an die allgemeine Idealtheorie, die in völlig arithmetisierter Gestalt schon vorliegen in den oben erwähnten Arbeiten von E. Steinitz und E. Noether (Math. Ann. **83**), und deren Grundbegriffe und Sätze, soweit sie hier nötig sind, in den §§ 1, 2 zusammengestellt sind. Nur ein Hilfssatz aus der Körpertheorie (§ 2, **7**), der von E. Noether in ihrer erwähnten Wintervorlesung gebracht wurde, ist noch nicht publiziert; mit wesentlichen Vereinfachungen wird hier der Noethersche Beweis wiedergegeben werden.

§ 1.

Ringe und Ideale.

1. Ein *Ring* ist eine Menge von Elementen $a, b, \ldots$, für welche eine reflexive, symmetrische und transitive Gleichheitsrelation definiert ist, ferner eine Addition, die eindeutig (im Sinne der Gleichheitsrelation), kommutativ, assoziativ und eindeutig umkehrbar ist, und eine eindeutige, assoziative und gegenüber der Addition distributive Multiplikation. Es folgt, daß ein Element 0 existiert, so daß $a + 0 = a$; weiter folgt $a \cdot 0 = 0$; $0 \cdot a = 0$. Der Ring heißt kommutativ, wenn die Multiplikation es ist. Der Ring hat keine Nullteiler, wenn aus $ab = 0$ und $a \neq 0$ folgt $b = 0$.

Sind diese beiden Eigenschaften erfüllt für einen Ring R, der ein von Null verschiedenes Element enthält, und hat außerdem die Gleichung $ax = b$ für $a \neq 0$ immer eine Lösung (und, da keine Nullteiler vorhanden sind, auch höchstens eine Lösung), so heißt der Ring ein *Körper*. Ein Körper enthält immer ein Einheitselement, das mit ε bezeichnet werden soll, mit der Eigenschaft $\varepsilon \cdot a = a$.

2. Aus einem kommutativen Ring R bildet man einen *Polynombereich* oder *Polynomring* $R[x_1, \ldots, x_n]$, indem man die Polynome $f(x_1, \ldots, x_n) = \Sigma a_{p_1, \ldots, p_n} x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n}$ als Elemente einführt (wo über endlichviele verschiedene Indizeskombinationen summiert wird, und wo die $a_{p_1, \ldots, p_n}$ Ringelemente sind), und für sie Addition und Multiplikation in der üblichen Weise definiert. Zwei Polynome heißen gleich, wenn die gleichnamigen Koeffizienten gleich sind. Ist $f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, und hat der Koeffizientenring R unendlich viele Elemente und keine Nullteiler, so ist es immer möglich, den „*Unbestimmten*" $x_1, \ldots, x_n$ spezielle Werte $a_1, \ldots, a_n$ aus R zu geben, so daß $f(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$.

3. Aus einem kommutativen Ring R ohne Nullteiler bildet man den *Quotientenkörper*, indem man die Quotienten $\frac{a}{b}$ (wo $b \neq 0$) rein formal als Elementenpaare definiert und dem Ring adjungiert. Gleichheit, Summe und Produkt werden definiert durch:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \text{wenn} \quad a\,d = b\,c \qquad\qquad \frac{a}{b} = c, \quad \text{wenn} \quad a = b\,c$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\,d + b\,c}{b\,d} \qquad\qquad \frac{a}{b} + c = \frac{a + b\,c}{b}$$

$$\frac{a}{b}\,\frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d} \qquad\qquad \frac{a}{b}\,c = \frac{a\,c}{b}.$$

Man zeigt leicht die Körpereigenschaften.

4. Ein *Ideal* in einem *kommutativen* Ring R ist eine Untermenge von R derart, daß mit a und b immer $a - b$ (und folglich auch 0, $-b$ und $a + b$), und mit a immer $r\,a$ in der Untermenge enthalten sind, wo r ein beliebiges Ringelement ist. Aus einer beliebigen Untermenge von R wird ein Ideal *erzeugt*, nämlich die Gesamtheit der Elemente die entstehen, indem man die Elemente der Untermenge zunächst mit beliebigen Ringelementen multipliziert, sodann die Elemente selbst und ihre Vielfachen in allen möglichen Weisen addiert und subtrahiert. Hat ein Ideal $\mathfrak{a}$ endlichviele Erzeugende $a_1, \ldots, a_r$, so bilden diese eine *Basis*, und man schreibt $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_r)$.

5. Ist R insbesondere ein Polynombereich mit Koeffizienten aus einem Körper, so gilt der *Hilbertsche Basissatz*: *Jedes Ideal hat eine Basis*[7]).

6. Man nennt zwei Ringelemente a, b *kongruent* nach einem Ideal $\mathfrak{c}$, und schreibt:

$$a \equiv b \mod \mathfrak{c}$$

oder kurz

$$a \equiv b\,(\mathfrak{c}),$$

wenn die Differenz $a - b$ dem Ideal angehört.

7. Sind die Glieder zweier Summen kongruent nach einem festen Ideal $\mathfrak{a}$, so sind die Summen es auch, und das gleiche gilt für Produkte. Weiter ist die Kongruenzrelation reflexiv, symmetrisch und transitiv. Faßt man also die Kongruenz als eine neue Gleichheitsdefinition in R auf, so bilden die Ringelemente gegenüber der neuen Gleichheitsdefinition wieder einen Ring, der der *Restklassenring* nach dem Ideal $\mathfrak{a}$ (in Zeichen $R/\mathfrak{a}$) genannt wird.

---

[7]) D. Hilbert, Über die Theorie der algebraischen Formen. Math. Ann. **36** (1890), S. 473–534. Die beiden Beweise, die Hilbert gibt, der erste für den Fall, daß der Koeffizientenbereich ein Zahlkörper ist, der zweite für den Fall von ganzzahligen Koeffizienten, gelten allgemeiner, nämlich der erste für jeden Körper mit unendlich vielen Elementen, der zweite u. a. für jeden Körper als Koeffizientenbereich.

8. Ist $b\,\varepsilon\,\mathfrak{a}$[8]), so ist $b \equiv 0\,(\mathfrak{a})$, und umgekehrt. Ist ein Ideal $\mathfrak{b}$ Untermenge von $\mathfrak{a}$, so schreibt man $\mathfrak{b} \equiv 0\,(\mathfrak{a})$, und nennt $\mathfrak{a}$ einen *Teiler* von $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$ ein *Vielfaches* von $\mathfrak{a}$.

9. Die *Summe* oder der *größte gemeinsame Teiler* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ zweier Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ist das Ideal aller Summen $a+b$, wo $a\,\varepsilon\,\mathfrak{a}$, $b\,\varepsilon\,\mathfrak{b}$. Ist $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_s)$, $\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_s)$, so ist $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s)$.

10. Das *Produkt* zweier Ideale ist das von allen Produkten $a\,b$, wo $a\,\varepsilon\,\mathfrak{a}$, $b\,\varepsilon\,\mathfrak{b}$, erzeugte Ideal. Die Multiplikation von Idealen ist kommutativ und assoziativ. Was eine Potenz eines Ideals ist, ist demnach klar. Ist $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_r)$, $\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_s)$, so ist $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = (a_1\,b_1, a_1\,b_2, \ldots, a_r\,b_s)$.

11. Der mengentheoretische Durchschnitt $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ zweier Ideale wird auch ihr *kleinstes gemeinsames Vielfaches* (K. G. V.) genannt.

12. Ein Ideal $\mathfrak{p}$ heißt *prim*, wenn es aus $a\,b \equiv 0\,(\mathfrak{p})$ und $a \not\equiv 0\,(\mathfrak{p})$ folgt $b \equiv 0\,(\mathfrak{p})$. Ist $\mathfrak{p}$ prim, so hat der Restklassenring $R/\mathfrak{p}$ keine Nullteiler. Sein Quotientenkörper heißt der *Restklassenkörper* von $\mathfrak{p}$.

13. Ein Ideal $\mathfrak{q}$ heißt *primär*, wenn aus $a\,b \equiv 0\,(\mathfrak{q})$ und: keine Potenz von a ist $\equiv 0\,(\mathfrak{q})$, folgt $b \equiv 0\,(\mathfrak{q})$. Zu jedem Primärideal $\mathfrak{q}$ gehört ein Primideal $\mathfrak{p}$, nämlich die Gesamtheit aller Ringelemente, von denen eine Potenz in $\mathfrak{q}$ vorkommt. Offenbar ist $\mathfrak{q} \equiv 0\,(\mathfrak{p})$. *Ist* $a\,b \equiv 0\,(\mathfrak{q})$ *und* $a \not\equiv 0\,(\mathfrak{p})$, *so folgt* $b \equiv 0\,(\mathfrak{q})$. Hat insbesondere $\mathfrak{p}$ eine Basis, so gibt es eine kleinste Zahl ϱ, der *Exponent* von $\mathfrak{q}$, so daß $\mathfrak{p}^{\varrho} \equiv 0\,(\mathfrak{q})$.

14. Ein Körper heißt *von der Charakteristik* p, wenn p die kleinste natürliche Zahl ist, für die $p\varepsilon = 0$[8a]), wo ε die Einheit ist, und *von der Charakteristik Null*, wenn eine solche Zahl nicht existiert. Im ersten Fall ist p eine Primzahl.

§ 2.

Einige Sätze aus der Körpertheorie.

1. Zwei Körper Ω, Ω' heißen *isomorph*, wenn eine eineindeutige Zuordnung ihrer Elemente existiert, so daß Summe oder Produkt in Ω wieder in Summe oder Produkt in Ω' übergehen. Die Zuordnung selbst heißt *Isomorphismus*. Ist $\Omega' = \Omega$, so hat man einen *Automorphismus* von Ω vor sich.

2. Hat ein Körper Ω einen Unterkörper P, so heißt Ω eine Erweiterung von P. Die Erweiterung heißt *algebraisch*, wenn jedes Element von Ω einer algebraischen Gleichung mit Koeffizienten aus P genügt; sonst *transzendent*. Die algebraische Gleichung läßt sich immer durch eine in P irreduzible ersetzen. Sind alle Elemente von Ω rational durch

---

[8]) ε heißt: ist Element von.

[8a]) Das Symbol $p\varepsilon$ ist dabei wie üblich definiert durch die Rekursionsformeln $1 \cdot \varepsilon = \varepsilon$; $(n+1)\,\varepsilon = n\varepsilon + \varepsilon$.

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ mit Koeffizienten aus P ausdrückbar, so schreibt man $\Omega = \mathsf{P}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

3. Es ist möglich, eine algebraische Erweiterung $\mathsf{P}(\alpha)$ eines Körpers P rein formal zu konstruieren, wenn die irreduzible Gleichung $f(z) = 0$ gegeben ist, der das zu adjungierende Element α genügen soll. Der Körper $\mathsf{P}(\alpha)$ muß nämlich immer isomorph dem Restklassenring des Polynombereichs $\mathsf{P}[z]$ nach dem Ideal $(f(z))$ sein, und das genügt um ihn formal zu bestimmen. Bezeichnet man mit $\mathsf{P}[\alpha]$ den Ring aller Elemente von $\mathsf{P}(\alpha)$, die sich als Polynome in α mit Koeffizienten aus P schreiben lassen, so folgt aus der genannten Isomorphie $\mathsf{P}[\alpha] = \mathsf{P}(\alpha)$. Durch Induktion folgt, wenn $\mathsf{P}(\alpha, \beta, \ldots, \delta)$ eine algebraische Erweiterung von P ist,

$$\mathsf{P}[a, \beta, \ldots, \delta] = \mathsf{P}(\alpha, \beta, \ldots, \delta).$$

4. Man kann durch fortgesetzte algebraische Erweiterung eines beliebigen Körpers P immer zu einem algebraisch-abgeschlossenen Körper Ω übergehen, d. h. zu einem solchen, in dem jedes Polynom $f(z)$ einer Unbestimmten z in Linearfaktoren zerfällt[9]). Ω ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

5. Zwei Elemente α, β einer algebraischen Erweiterung eines Körpers P heißen *konjugiert in bezug auf* P, wenn es einen Automorphismus des algebraisch-abgeschlossenen Umfassungskörpers gibt, der P elementweise invariant läßt, und α in β überführt. Dazu ist hinreichend, daß es einen Isomorphismus der beiden Unterkörper $\mathsf{P}(\alpha)$ und $\mathsf{P}(\beta)$ gibt, der P elementweise invariant läßt, und α in β überführt. Alle Wurzeln einer in P irreduziblen Gleichung $f(z) = 0$ sind konjugiert. Ist $f(z)$ ein Polynom aus $\mathsf{P}[z]$, und sind α und β konjugiert, so folgt aus $f(\alpha) = 0$ auch $f(\beta) = 0$.

6. Eine *rein transzendente* Erweiterung $\mathsf{P}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ eines Körpers P kommt zustande, indem man den Quotientenkörper des Polynomrings $\mathsf{P}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ bildet. Seine Elemente heißen *rationale Funktionen* von $\xi_1, \ldots, \xi_n$.[10]) *Algebraische Funktionen* sind die Elemente einer algebraischen Erweiterung Ω von $\mathsf{P}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Daß man hier wirklich von (mehrdeutigen) Funktionen reden kann, deren Existenzgebiet eine Untermenge der Menge aller Systeme von n Elementen des algebraisch-abgeschlossenen Erweiterungskörpers Γ von P ist, ergibt die folgende Betrachtung, die wir sogleich für ein System von Funktionen $\eta_1, \ldots, \eta_m$ anstellen.

---

[9]) Dieser Steinitzsche Satz leistet für die Algebra das gleiche wie der „Fundamentalsatz der Algebra", der nicht der Algebra, sondern der Analysis angehört. Der Beweis setzt den Zermeloschen Wohlordnungssatz voraus.

[10]) Allgemeiner kann man eine beliebige (endliche oder unendliche) Menge von Unbestimmten adjungieren, indem man aus dem Ring der Polynome in beliebig vielen dieser Unbestimmten den Quotientenkörper bildet.

Wir adjungieren sukzessive die Größen $\eta_1, \ldots, \eta_m$ aus Ω dem Körper $\mathsf{P}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Die jeweils irreduzible Gleichung für η_k mit Koeffizienten aus $\mathsf{P}(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_{k-1})$ laute:

(1) $$h_k(\eta_k) = \varepsilon\,\eta_k^{\varrho_k} + \alpha_{k,1}\,\eta_k^{\varrho_k-1} + \ldots + \alpha_{k,\varrho_k} = 0\,.$$

Die Koeffizienten $\alpha_{k,i}$ kann man schreiben als Quotienten von Polynomen in $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_{k-1}$; sogar kann man voraussetzen, daß die Nenner nur $\xi_1, \ldots, \xi_n$ enthalten (**3**). Diejenigen Elementsysteme $\xi_1', \ldots, \xi_n'$ aus Γ, für welche das Produkt sämtlicher Nennerpolynome von 0 verschieden ist, heißen *reguläre Argumentwerte* für das Funktionensystem $\eta_1, \ldots, \eta_m$. Da Γ, als algebraisch-abgeschlossener Körper, unendlich viele Elemente enthält, so gibt es immer reguläre Argumentwerte (§ 1, 2). Jedes Elementsystem $\eta_1', \ldots, \eta_m'$, das sich aus den Gleichungen (1) für reguläre Argumentwerte ergibt, heißt ein zugehöriges *Funktionswertsystem.*

7. Mit den Bezeichnungen der vorigen Nummer gilt der Satz:

Ist f ein Polynom aus $\mathsf{P}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$, und ist

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m) = 0, \text{ so ist } f(\xi_1', \ldots, \xi_n', \eta_1', \ldots, \eta_m') = 0$$

für alle regulären Argumentwerte $\xi_1', \ldots, \xi_n'$ und zugehörigen Funktionswerten $\eta_1', \ldots, \eta_m'$, und umgekehrt.

Beweis. Der erste Teil des Satzes ergibt sich durch vollständige Induktion, indem wir ihn als bewiesen annehmen für Polynome aus $\mathsf{P}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{k-1}]$, und beweisen für Polynome aus

$$\mathsf{P}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k].$$

Für Polynome aus $\mathsf{P}[x_1, \ldots, x_n]$ ist der Satz trivial.

Es habe $h_k(\eta_k)$ die Bedeutung (1). Dann ist die Voraussetzung

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1; \ldots, \eta_k) = 0$$

nach **3.** äquivalent mit

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_{k-1}, z) \equiv 0 \quad (h_k(z)).$$

Diese Gleichung besagt, daß die Division der linken Seite durch $h_k(z)$ ohne Rest aufgeht. Nun sind die Koeffizienten von $h_k(z)$ Quotienten von Polynomen in $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_{k-1}$, wo die Nenner nur $\xi_1, \ldots, \xi_n$ enthalten, und für alle regulären Argumentwerte $\xi_1', \ldots, \xi_n'$ von Null verschieden sind. Außerdem ist der erste Koeffizient die Einheit ε. Führt man die Division wirklich aus, so kommen im Nenner des Quotienten niemals andere Polynome vor als die, welche in $h_k(z)$ schon im Nenner standen. Also wird:

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_{k-1}, z) - a_k(z)\,h_k(z) = 0,$$

wo sowohl $a_k(z)$ wie $h_k(z)$ im Nenner nur solche Polynome $q(\xi_2, \ldots, \xi_n)$ haben, für die $q(\xi_1', \ldots, \xi_n') \neq 0$ ist. Multipliziert man die Gleichung mit dem Hauptnenner $n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ des zweiten Gliedes, so sind die Koeffizienten der Potenzen von z Polynome in $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_{k-1}$. Da für diese nach Voraussetzung der Satz gilt, so darf man spezialisieren $\xi_i = \xi_i'$ $[i = 1, \ldots, n]$, $\eta_j = \eta_j'$ $[j = 1, \ldots, k-1]$. Dividiert man schließlich durch die von Null verschiedene Größe $n(\xi_1', \ldots, \xi_n')$, so kommt:

$$f(\xi_1', \ldots, \xi_n', \eta_1', \ldots, \eta_{k-1}', z) - a_k'(z) h_k'(z) = 0,$$

wo a_k' und h_k' aus a_k und h_k durch die obige Spezialisierung entstanden sind.

Nun waren die Funktionswerte η_k' definiert durch die Gleichung $h_k'(\eta_k') = 0$, folglich ist

$$f(\xi_1', \ldots, \xi_n', \eta_1', \ldots, \eta_{k-1}', \eta_k') = 0, \qquad \text{q. e. d.}$$

Um den zweiten Teil zu beweisen, nehmen wir an, es wäre $f(\xi_1', \ldots, \xi_n', \eta_1', \ldots, \eta_m') = 0$ für alle regulären Argumentwertsysteme, und dennoch $f(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m) \neq 0$. Setzen wir dann

$$\frac{\varepsilon}{f(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m)} = \eta,$$

so können wir $\xi_1', \ldots, \xi_n'$ als reguläres Argumentwertsystem der Funktionen $\eta_1, \ldots, \eta_m, \eta$ bestimmen. Diese Argumentwerte sind dann sicher für $\eta_1, \ldots, \eta_m$ regulär. Aus

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m)\eta - \varepsilon = 0$$

folgt nach dem ersten Teil des Satzes

$$f(\xi_1', \ldots, \xi_n', \eta_1', \ldots, \eta_m')\eta' - \varepsilon = 0$$

entgegen der Voraussetzung $f(\xi_1', \ldots, \xi_n', \eta_1', \ldots, \eta_m') = 0$.

8. Sei Ω ein Erweiterungskörper von P. Eine Teilmenge U von Ω heißt *irreduzibel* in bezug auf P, wenn eine Gleichung $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ zwischen endlichvielen Elementen von U mit Koeffizienten aus P nur dann bestehen kann, wenn das Polynom f identisch verschwindet. Die Elemente eines irreduziblen Systems sind also unabhängige transzendente (oder unabhängige Unbestimmte) in bezug auf P.

Zwei Teilmengen U, V von Ω heißen *äquivalent*, wenn jedes Element von U algebraisch in bezug auf $\mathsf{P}(V)$, und jedes Element von V algebraisch in bezug auf $\mathsf{P}(U)$ ist.

In jedem wohlgeordneten Erweiterungskörper Ω eines Körpers P läßt sich ein dem Körper Ω äquivalentes irreduzibles System konstruieren. Die Mächtigkeit dieses Systems ist von der gewählten Wohlordnung unabhängig, und heißt der *Transzendenzgrad* von Ω in bezug auf P. Auch in jedem Teilsystem V gibt es ein zu V äquivalentes irreduzibles System, dessen Mächtigkeit der *Transzendenzgrad* von V in bezug auf P heißt.

Ist der Transzendenzgrad von Ω in bezug auf P endlich und gleich n, so sind alle Elemente von Ω algebraische Funktionen von endlich vielen Unbestimmten $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Ist er Null, so ist Ω algebraisch über P.

§ 3.

Der Nullstellenkörper eines Primideals[10a]).

1. *Ist* $\Omega = \mathrm{P}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *ein Erweiterungskörper eines Körpers* P, *so bilden die Polynome* f *aus* $R = \mathrm{P}[x_1, \ldots, x_n]$, *für die* $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$, *ein Primideal in* R.

Beweis. Aus $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ und $g(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ folgt $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) - g(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$.

Aus $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ folgt $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, g(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$.

Also bilden die betrachteten Polynome ein Ideal.

Aus $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, g(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ und $g(\xi_1, \ldots, \xi_n) \neq 0$ folgt $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$, da ein Körper keine Nullteiler hat.

Also ist das Ideal prim.

Beispiel. Seien $\xi_1, \ldots, \xi_n$ lineare Funktionen einer Unbestimmten λ mit Koeffizienten aus dem Körper P der komplexen Zahlen:

$$\xi_i = \alpha_i + \beta_i \lambda. \tag{1}$$

Dann besteht das gemeinte Primideal aus allen Polynomen $f(x_1, \cdots, x_n)$, so daß $f(\alpha_1 + \beta_1 \lambda, \ldots, \alpha_n + \beta_n \lambda)$ identisch in λ verschwindet, oder (geometrisch ausgedrückt) aus allen Polynomen, die verschwinden in allen Punkten der Geraden, welche durch die Parameterdarstellung (1) im n-dimensionalen Raum bestimmt wird. Dieses Beispiel möge zur Veranschaulichung aller Sätze dieses und des folgenden Paragraphen dienen.

2. *Bedeutet* $\mathfrak{p}$ *das unter* **1.** *konstruierte Primideal, so ist* Ω *dem Restklassenkörper* Π *von* $\mathfrak{p}$ (§ 1, 12) *isomorph, und zwar so, daß den Elementen* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *die Elemente* $x_1, \ldots, x_n$ *entsprechen.*

Beweis. Sei Ω' der Ring derjenigen Elemente von Ω, die als Polynome in $\xi_1, \ldots, \xi_n$ geschrieben werden können. Ω ist, wie man leicht sieht, Quotientenkörper von Ω'. Wir ordnen jedem Element $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ von Ω' das Element $f(x_1, \ldots, x_n)$ des Restklassenrings $R/\mathfrak{p}$ zu. Da aus $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) - g(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ folgt $f(x_1, \ldots, x_n) - g(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0\,(\mathfrak{p})$ oder $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv g(x_1, \ldots, x_n)\,(\mathfrak{p})$ und umgekehrt, so ist die Zuordnung eineindeutig. Daß Summe und Produkt in Summe und Produkt übergehen, ist klar. Also sind die Ringe Ω', $R/\mathfrak{p}$ isomorph, Dann müssen auch die Quotientenkörper Ω und Π isomorph sein.

[10a]) Vgl. zu diesem Paragraphen E. Noether, a. a. O. (Math. Ann. 90).

3. *Zu jedem von R verschiedenen Primideal $\mathfrak{p}$ in R gibt es einen Körper $\Omega = \mathrm{P}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, so daß $\mathfrak{p}$ besteht aus allen Polynomen f aus R, für die $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$.*

Beweis. Den Polynomen aus R ordnen wir Elemente einer neuen Menge R' zu, die den Koeffizientenkörper P umfaßt, wobei zweien nach $\mathfrak{p}$ kongruenten Polynomen das gleiche Element entsprechen soll, zweien inkongruenten aber verschiedene Elemente, und wobei die Elemente von P sich selbst entsprechen. Das ist immer möglich, denn zwei Elemente von P sind wegen $\mathfrak{p} \neq R$ dann und nur dann kongruent nach $\mathfrak{p}$, wenn sie gleich sind. Die den Elementen $x_1, \ldots, x_n$ entsprechenden Elemente nennen wir $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Die Menge R' ist auf den Restklassenring von R nach $\mathfrak{p}$ eindeutig abgebildet. Definieren wir in R' also eine Addition und eine Multiplikation, die der Addition bzw. Multiplikation im Restklassenring entsprechen, so ist R' dem Restklassenring isomorph, hat also keine Nullteiler, und gestattet die Bildung eines Quotientenkörpers Ω. In Ω ist $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ dann und nur dann, wenn $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \; (\mathfrak{p})$, q. e. d.

4. Der nach 3 für jedes von R verschiedene Primideal $\mathfrak{p}$ konstruierbare, nach 1 auch *nur* für Primideale existierende, nach 2 bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Körper $\Omega = \mathrm{P}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, dessen Erzeugende ξ_i die Eigenschaft haben, daß $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ dann und nur dann, wenn $f \equiv 0 \; (\mathfrak{p})$, heißt *Nullstellenkörper* von $\mathfrak{p}$; das Elementsystem $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ heißt *allgemeine Nullstelle* von $\mathfrak{p}$. Unter *Nullstelle* schlechthin eines Ideals $\mathfrak{m}$ verstehen wir jedes Elementsystem $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ eines Erweiterungskörpers von P, so daß $f(\eta_1, \ldots, \eta_n) = 0$, wenn $f \equiv 0 \; (\mathfrak{p})$. Jede nicht-allgemeine Nullstelle eines Primideals heißt *speziell*[11]).

5. Der Transzendenzgrad (§ 2, 8) des Nullstellenkörpers Ω in bezug auf P heißt die *Dimensionszahl* des Primideals $\mathfrak{p}$.

6. *Sind $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ Primideale der Dimensionszahlen μ, μ', und ist $\mathfrak{p}' \equiv 0 \; (\mathfrak{p})$,* so ist $\mu' \geqq \mu$, *und das Gleichheitszeichen gilt nur dann, wenn $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$.*

Beweis. Seien $\Omega' = \mathrm{P}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ und $\Omega' = \mathrm{P}(\xi_1', \ldots, \xi_n')$ Nullstellenkörper von $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{p}'$. Ist f ein Polynom aus R, so folgt aus $f \equiv 0 \; (\mathfrak{p}')$ auch $f \equiv 0 \; (\mathfrak{p})$, m. a. W. aus $f(\xi_1', \ldots, \xi_n') = 0$ folgt $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$.

Sei nun, evtl. nach Umnennung der Indizes, $\xi_1, \ldots, \xi_\mu$ ein mit Ω äquivalentes irreduzibles System (§ 2, 8). Dann muß auch $\xi_1', \ldots, \xi_\mu'$ ein irreduzibles System in Ω' sein, denn jede algebraische Relation zwischen

---

[11]) Dieser Sprachgebrauch deckt sich, wie wir im § 4 sehen werden, mit der in der Geometrie üblichen Redeweise von allgemeinen und speziellen Punkten einer algebraischen Mannigfaltigkeit.

$\xi_1', \ldots, \xi_\mu'$ würde die gleiche Relation zwischen $\xi_1, \ldots, \xi_\mu$ nach sich ziehen. Daraus folgt die erste Behauptung: $\mu' \geqq \mu$. Ist aber $\mu' = \mu$, so ist Ω' algebraisch über $\mathsf{P}(\xi_1', \ldots, \xi_\mu')$. Wir behaupten: aus $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ folgt $f(\xi_1', \ldots, \xi_n') = 0$. Wäre nämlich $f(\xi_1', \ldots, \xi_n') \neq 0$, so könnten wir nach § 2, **3** das Element $\frac{\varepsilon}{f(\xi_1', \ldots, \xi_n')}$ in der folgenden speziellen Form schreiben:

$$\frac{\varepsilon}{f(\xi_1', \ldots, \xi_n')} = \frac{g(\xi_1', \ldots, \xi_n')}{h(\xi_1', \ldots, \xi_\mu')}.$$

Daraus folgt:

$$h(\xi_1', \ldots, \xi_\mu') = f(\xi_1', \ldots, \xi_n')\; g(\xi_1', \ldots, \xi_n'),$$

und weiter:

$$h(\xi_1, \ldots, \xi_\mu) = f(\xi_1, \ldots, \xi_n)\; g(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Da das Polynom h nicht identisch verschwinden kann (es stand vorhin im Nenner!) und da $\xi_1, \ldots, \xi_\mu$ ein irreduzibles System bilden, so ist die linke Seite dieser Gleichung $\neq 0$, also muß $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) \neq 0$, entgegen der Voraussetzung. Also in der Tat: aus $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ folgt $f(\xi_1', \ldots, \xi_n') = 0$. Oder: aus $f \equiv 0\ (\mathfrak{p})$ folgt $f \equiv 0\ (\mathfrak{p}')$. Das heißt $\mathfrak{p} \equiv 0\ (\mathfrak{p}')$, mithin $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$.

7. *Ist ein Ideal $\mathfrak{p}'$ der Dimensionszahl μ' gegeben, so hat jede Nullstelle einen Transzendenzgrad $\leqq \mu'$, und wenn der Transzendenzgrad genau μ' ist, so ist die Nullstelle allgemein.*

Beweis. Jede Nullstelle von $\mathfrak{p}'$ bestimmt nach **1** ein Ideal $\mathfrak{p}$; wenden wir auf $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ den obigen Satz (**6**) an, so folgt die Behauptung unmittelbar.

Folge. *Ist $\mathfrak{p}'$ ein nulldimensionales Primideal, so ist jede Nullstelle algebraisch und allgemein.*

8. *Jedes μ-dimensionale Primideal hat einen $(\mu - 1)$-dimensionalen Primteiler.*

Beweis. Sei $\mathfrak{p}$ das gegebene Ideal, $\Omega = \mathsf{P}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ sein Nullstellenkörper, $\xi_1, \ldots, \xi_\mu$ ein zu Ω äquivalentes irreduzibles System, also Ω algebraisch über $\mathsf{P}(\xi_1, \ldots, \xi_\mu)$.

$\xi_{\mu+1}, \ldots, \xi_n$ sind als algebraische Funktionen von ξ_μ aufzufassen, wenn der Körper $\mathsf{P}(\xi_1, \ldots, \xi_{\mu-1})$ als Grundkörper angenommen wird. Also gibt es in einem algebraischen Erweiterungskörper Γ von $\mathsf{P}(\xi_1, \ldots, \xi_{\mu-1})$ (mindestens) einen regulären Argumentwert ξ_μ'; ein System zugehöriger Funktionswerte sei $\xi_{\mu+1}', \ldots, \xi_n'$. Das Elementsystem $\{\xi_1, \ldots, \xi_{\mu-1}, \xi_\mu', \ldots, \xi_n'\}$ von Γ hat in bezug auf P den Transzendenzgrad $\mu - 1$; das aus ihm nach **1** konstruierbare Primideal $\mathfrak{p}_1$ hat also die Dimensionszahl $\mu - 1$. Aus $f \equiv 0\ (\mathfrak{p})$ folgt $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$, also (§ 1, 7): $f(\xi_1, \ldots, \xi_{\mu-1}, \xi_\mu', \ldots, \xi_n') = 0$, also $f \equiv 0\ (\mathfrak{p}_1)$. Mithin ist $\mathfrak{p} \equiv 0\ (\mathfrak{p}_1)$. Damit ist der Satz bewiesen.

In Verbindung mit **6** folgt: *Die Dimensionszahl eines Primideals* $\mathfrak{p}$ *ist zwei weniger als die maximale Gliederzahl einer von* $\mathfrak{p}$ *ausgehenden Primteilerkette*

$$\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\mu, R. \text{ [12]}$$

9. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal der Dimensionszahl μ, und seien die Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ so numeriert, daß im Nullstellenkörper $\mathsf{P}(\xi_1, \ldots, \xi)$ die Größen $\xi_1, \ldots, \xi_\mu$ ein irreduzibles System bilden. Sei Ω ein algebraisch-abgeschlossener Erweiterungskörper von $\mathsf{P}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Dann bilden die mit $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ *in bezug auf* $\mathsf{P}(\xi_1, \ldots, \xi_\mu)$ *konjugierten Elementsysteme* $\{\xi_1, \ldots, \xi_\mu, \xi'_{\mu+1}, \ldots, \xi'_n\}$ *genau diejenigen Nullstellen von* $\mathfrak{p}$ *in* Ω, *deren erste* μ *Bestimmungszahlen die Werte* $\xi_1, \ldots, \xi_\mu$ *haben.*

Beweis. Daß die Elementsysteme Nullstellen bilden, ist klar, denn aus $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ folgt $f(\xi_1, \ldots, \xi_\mu, \xi'_{\mu+1}, \ldots, \xi'_n) = 0$, wenn f ein Polynom mit Koeffizienten aus P ist (§ 2, 5). Andererseits aber hat jede Nullstelle $\{\xi_1 \ldots \xi_\mu, \eta_{\mu+1} \ldots \eta_n\}$ in Ω einen Transzendenzgrad $\geqq \mu$, ist also allgemeine Nullstelle (**7**); also gibt es immer einen Isomorphismus von $\mathsf{P}(\xi_1 \ldots \xi_n)$ und $\mathsf{P}(\xi_1 \ldots \xi_\mu, \eta_{\mu+1} \ldots \eta_n)$, der $\mathsf{P}(\xi_1 \ldots \xi_\mu)$ elementweise invariant läßt, und $\xi_{\mu+1} \ldots \xi_n$ in $\eta_{\mu+1} \ldots \eta_n$ überführt (**2**), woraus die Konjugiertheit von $\eta_{\mu+1} \ldots \eta_n$ mit $\xi_{\mu+1} \ldots \xi_n$ folgt (§ 2, 5).

10. Folge: *Ist* $\mathfrak{p}$ *ein Ideal der Dimensionszahl* 0, *so sind alle (endlichvielen) Nullstellen im algebraisch-abgeschlossenen Erweiterungskörper* Ω *von* P *konjugiert in bezug auf* P. *Ist insbesondere* P *algebraisch-abgeschlossen, so gibt es demnach nur eine Nullstelle* $\{\xi_1 \ldots \xi_n\}$, *wo die* ξ_i *Elemente von* P *sind; das Ideal* $\mathfrak{p}$ *besteht in diesem Falle aus allen Polynomen, die an dieser Stelle verschwinden, hat mithin die Basis*:

$$(x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n).$$

11. Zum Schlusse sei bemerkt, daß ein Teil der Begriffe und Sätze dieses Paragraphen ihre Geltung beibehalten für Primideale in einem beliebigen kommutativen Ring R, der einen Körper P umfaßt, und der aus P durch Ringadjunktion von endlichvielen Elementen $x_1, \ldots, x_n$ entsteht, wobei aber diese Elemente noch durch Gleichungen verknüpft sein können. Alle Elemente des Rings sind dann als Polynome in $x_1, \ldots, x_n$ zu schreiben, aber nicht eindeutig, und damit versagt die Konstruktion **1**. Die umgekehrte Konstruktion **3**, die jedem Primideal einen Nullstellenkörper (dem Restklassenkörper isomorph) zuordnete, bleibt aber möglich, und damit wird der Dimensionsbegriff definierbar als Transzendenzgrad des

---

[12]) Für den Fall, daß P unendlich viele Elemente besitzt, ist dieser Satz von E. Noether bewiesen worden (Math. Ann. **90**, S. 250).

Nullstellenkörpers. Es gilt weiter Satz **6** samt dessen Beweis[12a]). Nimmt man noch allgemeiner an, daß der kommutative Ring R durch Ringadjunktion einer beliebigen Menge zu P entsteht, so wird die Dimensionszahl eines Primideals eine Mächtigkeit. Die erste Hälfte von Satz **6** bleibt samt ihrem Beweis uneingeschränkt bestehen, die zweite Hälfte aber gilt nur für Ideale endlicher Dimensionszahl.

§ 4.

Die Mannigfaltigkeit eines Primideals.

1. Unter dem (offenen, oder cartesischen) Raum $C_n(\mathsf{P})$ soll verstanden werden die Gesamtheit der geordneten Systeme von n Elementen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ eines algebraisch-abgeschlossenen Körpers P[13]). Die Elemente des Raumes heißen Punkte, ihre Bestimmungszahlen Koordinaten.

2. Es genügt nun aber für die algebraische Geometrie nicht, sich auf die Betrachtung der Punkte in diesem Sinne zu beschränken, sondern es werden immer noch „unbestimmte Punkte“ betrachtet, d. h. Punkte, deren Koordinaten entweder unabhängige Unbestimmte sind, oder doch algebraische Funktionen von Parametern, d. h. Elemente eines transzendenten Erweiterungskörpers Ω von P. Ein Elementsystem $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ eines solchen Körpers Ω (oder ein Punkt des Raumes $C_n(\Omega)$) soll *p-fach unbestimmter Punkt in $C_n(\mathsf{P})$* heißen, wenn es den Transzendenzgrad p in bezug auf P hat, d. h. wenn der Punkt von p unabhängigen Parametern, aber nicht von weniger, algebraisch abhängt. Die in § 3 betrachteten „Nullstellen vom Transzendenzgrad p“ waren solche p-fach unbestimmte Punkte.

3. Eine *algebraische Mannigfaltigkeit* M in $C_n(\mathsf{P})$ ist die Menge aller Nullstellen in $C_n(\mathsf{P})$ eines Ideals $\mathfrak{m}$ im Polynombereich $\mathsf{P}[x_1, \ldots x_n]$, vorausgesetzt, daß diese Menge nicht leer ist.

Verschiedene Ideale können die gleiche Mannigfaltigkeit definieren. Beispiel: Die drei Ideale $\mathfrak{p}=(x, y)$; $\mathfrak{q}=(x^2, y)$, $\mathfrak{r}=(x^2, xy, y^2, xz, yz)$ in $\mathsf{P}[x, y, z]$ definieren alle drei die Gerade $\xi=\eta=0$ in $C_3(\mathsf{P})$. Bei den Polynomen von $\mathfrak{q}$ verschwindet in den Punkten dieser Geraden nicht nur das Polynom selbst, sondern auch die Ableitung nach x; bei denen

---

[12a]) Zusatz bei der Korrektur. Es gibt Ringe dieser Art, in denen Satz 8 nicht gilt. Also läßt sich die Dimensionszahl eines Primideals nicht allgemein durch Primteilerketten charakterisieren.

[13]) Diese Definition hält sich an die in der algebraischen Geometrie vorwaltende Richtung, die zum Raum immer die komplexen Punkte hinzunimmt. Unsere Definition umfaßt aber noch ganz andere Räume als den der gewöhnlichen Geometrie, z. B. solche, in denen der vierte harmonische Punkt immer mit dem dritten zusammenfällt. Man erhält einen solchen Raum nämlich, indem man für P einen solchen Körper nimmt, in dem $\varepsilon+\varepsilon=0$ ist (Körper von der Charakteristik 2).

von $\mathfrak{r}$ verschwinden in einem Punkt der Geraden, nämlich im Punkt $\{0, 0, 0\}$, alle Ableitungen.

4. Ohne weiteres klar sind die folgenden beiden Sätze:

Die Mannigfaltigkeit eines K.G.V. von Idealen $[\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r]$ *ist die Vereinigungsmenge der Mannigfaltigkeiten der Komponenten.*

Die Mannigfaltigkeit einer Idealsumme $(\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r)$ *ist der Durchschnitt der Mannigfaltigkeiten der Summanden.*

5. Definition. Ein Polynom f *enthält* eine Mannigfaltigkeit M, wenn f verschwindet in allen Punkten von M.

6. Sei nun eine Mannigfaltigkeit M gegeben durch ein Ideal $\mathfrak{m}$. In der Gesamtheit der Ideale, welche die gleiche Mannigfaltigkeit definieren (s. obiges Beispiel), ist ein Ideal ausgezeichnet, nämlich die Gesamtheit aller Polynome, welche die Mannigfaltigkeit enthalten. Daß diese Gesamtheit ein Ideal ist, ist klar; daß sie in allen Punkten von M, und nur in diesen, Nullstellen hat, ist ebenfalls klar. Wir wollen dieses Ideal *das zu M gehörige Ideal* nennen.

7. Eine Mannigfaltigkeit heißt *irreduzibel*, wenn das zugehörige Ideal prim ist, d. h. wenn aus „fg enthält M“ und „f enthält M nicht“ folgt „g enthält M“. Die *Dimensionszahl* einer irreduziblen Mannigfaltigkeit ist die Dimensionszahl des zugehörigen Primideals[13a]).

8. *Ist M irreduzibel, und sind* M_1, M_2 *beliebige Mannigfaltigkeiten, deren Vereinigungsmenge M enthält, ohne daß* M_1 *M enthält, so muß* M_2 *M enthalten.*

Denn gesetzt, weder M_1 noch M_2 würden M enthalten, so würde das heißen, daß in den Idealen $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, die M_1 und M_2 definieren, Polynome f_1, f_2 vorhanden sein würden, die M nicht enthielten. Das Produkt $f_1 f_2$ aber würde sowohl M_1 wie M_2, also auch M enthalten. Das widerspricht der vorausgesetzten Irreduzibilität von M.

9. Sei eine Mannigfaltigkeit M gegeben, und sei $\mathfrak{m}$ das zugehörige Ideal. Die transzendenten Nullstellen des Ideals, also diejenigen Nullstellen, deren Koordinaten von Parametern algebraisch abhängen, werden als *unbestimmte Punkte der Mannigfaltigkeit* bezeichnet, weil sie zwar nicht der Mannigfaltigkeit angehören, aber doch allen algebraischen Gleichungen genügen, die in $C_n(\mathsf{P})$ die Mannigfaltigkeit definieren, und weil sie, wenn man die Parameter, von denen sie abhängen, regulär spezialisiert

[13a]) Zusatz bei der Korrektur. Ist eine Mannigfaltigkeit M in diesem Sinne irreduzibel, so ist sie nach 8 in der Tat unzerlegbar, d. h. nicht als Vereinigung von zwei echten algebraischen Teilmannigfaltigkeiten darstellbar. Wie leicht ersichtlich, gilt auch die Umkehrung.

(§ 2, **6**), in Punkte von $C_n(\mathsf{P})$ übergehen, die den nämlichen algebraischen Gleichungen genügen (§ 2, **7**), mithin der Mannigfaltigkeit angehören.

Ist M irreduzibel, also $\mathfrak{m}$ prim, so heißt jede allgemeine Nullstelle des Ideals $\mathfrak{m}$ *allgemeiner Punkt der Mannigfaltigkeit* M. Diese Bezeichnung ist in Übereinstimmung mit der in der Geometrie geläufigen Bedeutung der Wörter allgemein und speziell. Man versteht doch meistens, wenn es auch nicht immer deutlich gesagt wird, unter einem allgemeinen Punkt einer Mannigfaltigkeit einen solchen Punkt, der keiner einzigen speziellen Gleichung genügt, außer denjenigen Gleichungen, die in allen Punkten erfüllt sind. Diese Forderung kann natürlich ein bestimmter Punkt von M niemals erfüllen, und so ist man genötigt, Punkte zu betrachten, die von hinreichend vielen Parametern abhängen, d. h. in einem Raum $C_n(\Omega)$ liegen, wo Ω eine transzendente Erweiterung von P ist. Fordert man aber von einem Punkt von $C_n(\Omega)$, daß er Nullstelle ist für alle die und nur die Polynome von $\mathsf{P}[x_1, \ldots, x_n]$, die in allen Punkten der Mannigfaltigkeit M verschwinden, so kommt man gerade auf unsere Definition eines allgemeinen Punktes der Mannigfaltigkeit M.

10. Da nach **7** zu jeder irreduziblen Mannigfaltigkeit ein Primideal gleicher Dimension gehört, so können die Sätze § 3 **2, 3, 7, 10** für Primideale unmittelbar auf irreduzible Mannigfaltigkeiten übertragen werden. Das ergibt:

Jede irreduzible Mannigfaltigkeit hat einen allgemeinen Punkt $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, *der von so vielen Parametern abhängt, wie die Dimensionszahl der Mannigfaltigkeit angibt*[14]), *und der Körper* $\mathsf{P}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *ist dem Restklassenkörper des zugehörigen Primideals isomorph.*

Jeder spezielle Punkt einer μ*-dimensionalen irreduziblen Mannigfaltigkeit hat einen Transzendenzgrad* $< \mu$.

Eine nulldimensionale irreduzible Mannigfaltigkeit besteht aus einem Punkt.

11. Unter der *algebraischen Abschließung* einer Punktmenge M' in $C_n(\mathsf{P})$ verstehe ich die Menge M der gemeinsamen Nullstellen in $C_n(\mathsf{P})$ derjenigen Polynome aus $R = \mathsf{P}[x_1, \ldots, x_n]$, die in allen Punkten von M verschwinden. Da diese Polynome offenbar ein Ideal bilden, so ist M eine algebraische Mannigfaltigkeit[15]).

---

[14]) Diese Eigenschaft zeigt die Übereinstimmung unseres Dimensionsbegriffs mit dem aus der algebraischen Geometrie geläufigen.

[15]) Ist P der Körper der komplexen Zahlen, so umfaßt (weil jedes Polynom eine stetige Funktion darstellt) die algebraische Abschließung die topologische Abschließung. Z. B. hat in der Ebene $C_n(\mathsf{P})$ die Menge $\xi_1 = 0$, $|\xi_2| < 1$ die topologische Abschließung $\xi_1 = 0$, $|\xi_2| \leq 1$, und die algebraische Abschließung $\xi_1 = 0$. Die algebraische Abschließung kann aber für die Algebra die Stelle der topologischen Abschließung voll-

12. Sind in einem algebraischen Erweiterungskörper Ω von $\mathsf{P}(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)$, wo $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$ als irreduzibles System angenommen ist, n algebraische Funktionen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ von $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$ gegeben, und ist M' die Menge der Funktionswertsysteme $\{\xi'_1, \ldots, \xi'_n\}$, die zu regulären Argumentwerten $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_\mu$ gehören, so ist M' eine Punktmenge in $C_n(\mathsf{P})$; wenn nun M die algebraische Abschließung von M' ist, so sagen wir, daß M durch die Funktionen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ in *Parameterdarstellung* gegeben ist. Die Parameterdarstellung ist nur regulär in den Punkten der Teilmenge M' von M, sie bestimmt aber M eindeutig.

Die algebraische Abschließung von M' wird nach Definition dadurch konstruiert, daß man das Ideal $\mathfrak{p}$ aller Polynome bildet, die in allen Punkten von M' verschwinden. Nach § 2, 7 kann man nun aber $\mathfrak{p}$ auch bestimmen als das Ideal aller Polynome f aus $\mathsf{P}[x_1, \ldots, x_n]$, für die $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$, oder als dasjenige Primideal, das $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ zur allgemeinen Nullstelle hat (§ 3, 1). Alle Polynome von $\mathfrak{p}$ verschwinden in allen Punkten von M, weil M ja die Mannigfaltigkeit von $\mathfrak{p}$ ist, und wenn umgekehrt ein Polynom verschwindet in allen Punkten von M, so verschwindet es auch in allen Punkten von M', gehört mithin zu $\mathfrak{p}$. Also ist $\mathfrak{p}$ das zu M gehörige Ideal (**3**). Damit ist bewiesen:

Jedes System von algebraischen Funktionen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ von $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ bestimmt eine Mannigfaltigkeit M in Parameterdarstellung, und das zu M gehörige Primideal $\mathfrak{p}$ hat die allgemeine Nullstelle $\xi_1, \ldots, \xi_r$, die also zugleich allgemeiner Punkt der Mannigfaltigkeit ist.

13. Da auch jedes Primideal $\mathfrak{p}$ eine allgemeine Nullstelle $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ hat, wo die ξ_i algebraische Funktionen von Parametern $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$ sind, so folgt:

Jedes Primideal $\neq R$ ist das zugehörige Ideal seiner Mannigfaltigkeit, die irreduzibel ist; und die allgemeine Nullstelle des Primideals ergibt eine Parameterdarstellung der Mannigfaltigkeit.

Folge: *Hat ein Primideal $\mathfrak{p}$ keine Nullstelle in $C_n(\mathsf{P})$, so ist $\mathfrak{p} = R$.*

14. Schließlich gilt, da auch zu jeder Mannigfaltigkeit ein Primideal $\neq R$ gehört:

Jede irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit hat mindestens eine Parameterdarstellung. Die Dimensionszahl der Mannigfaltigkeit ist die kleinste Parameterzahl, die in eine Parameterdarstellung eingehen kann.

---

ständig vertreten. Definiert man z. B. eine Mannigfaltigkeit durch algebraische Parametergleichungen, die für gewisse Parameterwerte unbrauchbar (singulär) werden, so muß man zur Menge der regulären Punkte die Menge ihrer Grenzpunkte hinzunehmen; man kann aber auch ihre algebraische Abschließung bilden, wie wir sehen werden.

15. Aus § 3, **6** folgt: *Sind M_1, M_2 irreduzible Mannigfaltigkeiten der Dimensionszahlen μ_1, μ_2, und ist M_2 Untermenge von M_1, so ist $\mu_1 \geqq \mu_2$, und das Gleichheitszeichen gilt nur dann, wenn $M_1 = M_2$.*

§ 5.

Die Nullstellen beliebiger Ideale.

1. Zu einem Primärideal $\mathfrak{q}$ im Polynombereich R gehört, wie wir (§ 1, **13**) sahen, ein Exponent ϱ und ein Primideal $\mathfrak{p}$, so daß

$$\begin{cases} \mathfrak{q} \equiv 0(\mathfrak{p}), \\ \mathfrak{p}^{\varrho} \equiv 0(\mathfrak{q}). \end{cases}$$

Aus der Definition von $\mathfrak{p}$ folgt: Die Mannigfaltigkeit von $\mathfrak{p}$ ist mit der von $\mathfrak{q}$ identisch. Daraus weiter: *Die Mannigfaltigkeit eines Primärideals $\mathfrak{q}$ ist irreduzibel.* Weiter: *Aus $fg \equiv 0(\mathfrak{q})$ folgt $g \equiv 0(\mathfrak{q})$, wenn f die Mannigfaltigkeit von $\mathfrak{q}$ nicht enthält.* Das letztere besagt nämlich nach § 4, **13**: $f \not\equiv 0(\mathfrak{p})$. Diese Eigenschaft des Primärideals benutzen Lasker[16]) und Macaulay[17]) als Definition. Die Äquivalenz mit unserer (E. Noetherschen) Definition folgt aus dem Hilbertschen Nullstellensatz (**9**).

2. Aus § 4, **13** und § 5, **1** folgt: *Hat ein Primärideal $\mathfrak{q}$ keine Nullstelle, so ist $\mathfrak{q} = R$.*

3. In denjenigen Ringen, für die der Hilbertsche Basissatz gilt, gilt auch, wie E. Noether[18]) gezeigt hat, der folgende Zerlegungssatz:

Jedes Ideal $\mathfrak{m}$ ist K.G.V. von endlich vielen Primäridealen: $\mathfrak{m} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r]$. Fordert man, daß dies größte primäre Komponenten sind, d. h. daß $[\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_k]$ nicht mehr primär ist, und weiter, daß die Darstellung eine kürzeste ist, d. h. daß keine der $\mathfrak{q}_i$ überflüssig ist, so sind zwar nicht die Ideale $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r$ eindeutig bestimmt, wohl aber ihre Anzahl r und ihre zugehörigen Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$.

4. Um zu zeigen, daß für den Polynombereich die gemachten Aussagen über Eindeutigkeit nicht verschärft werden können, und zugleich um die geometrische Natur der Primärideale zu erläutern, mögen die folgenden Beispiele gegeben werden, die sich auf den Polynombereich $\mathsf{P}[x, y]$ beziehen.

Beispiel 1. Das Ideal $\mathfrak{m} = (xy)$ besteht aus allen Polynomen, die

---

16) E. Lasker, Zur Theorie der Moduln und Ideale, Math. Ann. **60** (1905), S. 20–116.

17) F. S. Macaulay, Modular Systems, S. 33.

18) E. Noether, Math. Ann. **83**, S. 42. Der Beweis setzt den Wohlordnungssatz voraus. Einen etwas einfacheren Beweis gab W. Krull, Math. Ann. **90** (1923), S. 55–64. Für den Spezialfall des Polynombereichs: E. Lasker a. a. O.

auf der x-Achse und auf der y-Achse verschwinden, und hat u. a. die folgenden primären Teiler:

$\mathfrak{q}_1 = (x)$: Polynome, die auf der y-Achse verschwinden (Primideal).

$\mathfrak{q}_2 = (y)$: Entsprechend.

$\mathfrak{q}_3 = (x^2, xy, y^2)$: Polynome, die im Ursprung mindestens einen Doppelpunkt haben.

Daß $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3$ primär sind, $\mathfrak{m}$ aber nicht, und daß $\mathfrak{m}$ Untermenge von $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ und $\mathfrak{q}_3$ ist, folgt hier wie in allen folgenden Beispielen am einfachsten aus der eben gegebenen geometrischen Bestimmung dieser Ideale.

Offenbar ist $\mathfrak{m} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2]$, aber auch $\mathfrak{m} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3]$. Beide Zerlegungen sind Zerlegungen in größte primäre Komponenten, denn $[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2]$, $[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_3]$ und $[\mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3]$ sind nicht primär. Nur die erstere Darstellung $\mathfrak{m} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2]$ ist eine kürzeste.

Beispiel 2. Das Ideal $\mathfrak{m} = (x^2, xy, y^2)$ (s. oben $\mathfrak{q}_3$) ist primär, und hat u. a. die folgenden primären Teile:

$\mathfrak{q}_2 = (x^2, y)$: Polynome, die die x-Achse im Ursprung zweifach schneiden oder ganz enthalten.

$\mathfrak{q}^2 = (x, y^2)$: Entsprechend.

Zu allen drei Idealen gehört als Primideal das zum Ursprung gehörige Primideal $\mathfrak{p} = (x, y)$. Weiter ist $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}^2$, während $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ Ideale zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ sind[19]). Die Zerlegung $\mathfrak{m} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2]$ ist eine kürzeste Darstellung, aber die $\mathfrak{q}_i$ sind nicht größte primäre Ideale, denn $\mathfrak{m}$ ist selbst primär.

Beispiel 3. Das Ideal $\mathfrak{m} = (x^2, xy)$ besteht aus allen Polynomen, die die y-Achse enthalten und außerdem im Ursprung mindestens einen Doppelpunkt haben. $\mathfrak{m}$ ist nicht primär, und hat u. a. die folgenden primären Teiler:

$\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}_1 = (x)$ (s. Beispiel 1).

$\mathfrak{q}_2 = (x^2, \mu x + y)$: Polynome, die die Gerade $\mu x + y = 0$ im Ursprung zweifach schneiden oder ganz enthalten. Zugehöriges Primideal: $\mathfrak{p}_2 = (x, y)$.

Die Zerlegung $\mathfrak{m} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2]$ ist für jeden Wert von μ richtig, und immer eine kürzeste Darstellung durch größte primäre Komponenten. Nur die zugehörigen Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ sind eindeutig bestimmt.

5. Definitionen. Die Mannigfaltigkeiten der primären Komponenten $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r$ eines Ideals $\mathfrak{m}$, oder, was dasselbe ist, die Mannigfaltigkeiten der zugehörigen Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$, heißen die *wesentlichen Mannig-*

[19]) Daraus folgt nebenbei, daß für Ideale wie (x^2, y) eine Darstellung als Produkt von Primidealen, wie sie in der Theorie der Zahlkörper immer möglich ist, ausgeschlossen ist.

[20]) Nach Macaulay, zur Unterscheidung von den unwesentlichen Mannigfaltigkeiten, welche die Resolventenbildung nach Kronecker ergibt.

faltigkeiten des Ideals. Diejenigen unter ihnen, die in einer anderen enthalten sind, heißen *eingebettete Mannigfaltigkeiten*, die übrigen *isolierte Mannigfaltigkeiten*. Haben alle wesentlichen Mannigfaltigkeiten von $\mathfrak{m}$ die gleiche Dimensionszahl μ, so heißt das Ideal $\mathfrak{m}$ *ungemischt* und von der *Dimensionszahl* μ.

6. Ist wiederum $\mathfrak{m} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r]$, so ist die Mannigfaltigkeit von $\mathfrak{m}$ die Vereinigung der (irreduziblen) Mannigfaltigkeiten von $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r$:

$$M = \mathfrak{V}(M_1, \ldots, M_r).$$

Läßt man aus der Darstellung alle überflüssigen (eingebetteten Mannigfaltigkeiten fort, so bleibt eine kürzeste Darstellung:

$$M = \mathfrak{V}(M_1, \ldots, M_s)$$

von M als Vereinigung von irreduziblen Mannigfaltigkeiten. Diese ist eindeutig, denn ist

$$M = \mathfrak{V}(M_1', \ldots, M_{s'}')$$

eine andere kürzeste Darstellung, so muß jede M_i in $\mathfrak{V}(M_1', \ldots, M_{s'}')$, mithin nach § 4, **8** in einer M_k' enthalten sein, und diese nach dem gleichen Schluß wiederum in einer M_j, welche dann notwendig gleich M_i sein muß, weil sonst M_i in M_j enthalten wäre, und die Darstellung keine kürzeste. Also ist jedes M_i einem M_k' gleich, und ebenso umgekehrt.

Damit ist gezeigt: *Jede algebraische Mannigfaltigkeit M läßt eindeutig eine kürzeste Darstellung als Vereinigung von endlichvielen irreduziblen Mannigfaltigkeiten zu.*

7. Aus **2** und **3** folgt: *Hat ein Ideal $\mathfrak{m}$ keine Nullstellen, so ist $\mathfrak{m} = R$.*

8. Aus **1** und **3** folgt: *Ist $fg \equiv 0(\mathfrak{m})$, und enthält f keine wesentliche Mannigfaltigkeit von $\mathfrak{m}$, so ist $g \equiv 0(\mathfrak{m})$.*

Für die Anwendung dieses äußerst wichtigen Satzes braucht man Kriterien, um zu entscheiden, ob ein Ideal eingebettete Mannigfaltigkeiten hat. Ohne Beweis führen wir zwei solche an, deren erstes sich unmittelbar aus Satz XI (S. 46) der E. Noetherschen Arbeit[21]) ergibt, während das zweite sich bei Macaulay[22]) findet:

Ein Ideal $\mathfrak{m}$ hat dann und nur dann eine in der Mannigfaltigkeit des anderen Ideals $\mathfrak{n} = (f_1, \ldots, f_r)$ enthaltene wesentliche Mannigfaltigkeit, wenn es ein Polynom f gibt, so daß $ff_i \equiv 0(\mathfrak{m})$ für jedes i, und dennoch $f \not\equiv 0(\mathfrak{m})$.

Hat ein Ideal $\mathfrak{m}$ von der Höchstdimension μ eine Basis aus $n - \mu$ Elementen, so ist es ungemischt, und jede seiner Potenzen ist ungemischt.

---

[21]) Math. Ann. 83.

[22]) Modular Systems S. 49, 51.

9. Der **Hilbertsche Nullstellensatz**[23]) in der ursprünglichen Fassung lautet:

Verschwindet ein Polynom f, oder allgemeiner ein Ideal $\mathfrak{a}$, in allen Nullstellen eines Ideals $\mathfrak{m}$, so gibt es eine nur von $\mathfrak{m}$ abhängige Zahl ϱ, so daß $f^{\varrho} \equiv 0(\mathfrak{m})$ bzw. $\mathfrak{a}^{\varrho} \equiv 0(\mathfrak{m})$.

Beweis. Sei $\mathfrak{m} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r]$, und sei ϱ der größte unter den Exponenten von $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r$. Enthält f die Mannigfaltigkeit von M, so ist $f \equiv 0(\mathfrak{p}_i)$, wo $\mathfrak{p}_i$ das zu $\mathfrak{q}_i$ gehörige Primideal ist; daraus folgt $f^{\varrho} \equiv 0(\mathfrak{p}_i^{\varrho})$, also $f^{\varrho} \equiv 0(\mathfrak{q}_i)$, also $f^{\varrho} \equiv 0(\mathfrak{m})$. Das gleiche gilt, wenn man $\mathfrak{a}$ statt f schreibt.

Genau so beweist sich eine etwas abweichende Fassung des Satzes, die für einige Anwendungen noch bequemer ist:

Verschwindet ein Ideal $\mathfrak{a}$ in den allgemeinen Nullstellen aller isolierten Primideale des Ideals $\mathfrak{m}$, so gibt es eine nur von $\mathfrak{m}$ abhängige Zahl ϱ, so daß $\mathfrak{a}^{\varrho} \equiv 0(\mathfrak{m})$.

10. *Ein ungemischtes $(n-1)$-dimensionales Ideal $\mathfrak{m}$ hat eine Basis aus einem Element („ist Hauptideal").*

Beweis. Sei zunächst $\mathfrak{m} = (f_1, \ldots, f_s)$ primär, $\mathfrak{p}$ das zugehörige Primideal, $\Omega = \mathsf{P}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ dessen Nullstellenkörper, und seien die Unbestimmten so numeriert, daß $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ ein dem Körper Ω äquivalentes irreduzibles System bilden.

Der größte gemeinsame Teiler f von $f_1, \ldots, f_s$ — Teiler im Polynomsinn — bleibt größter gemeinsamer Teiler, wenn man $f_1, \ldots, f_s$ als Polynome in x_n mit Koeffizienten aus $\mathsf{P}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ betrachtet. Er ist also in der Form

$$f = a_1 f_1 + \cdots + a_s f_s$$

darstellbar, wo $a_i \varepsilon \mathsf{P}(x_1, \ldots, x_{n-1})[x_n]$. Multiplikation dieser Gleichung mit dem Hauptnenner $h(x_1, \ldots, x_{n-1})$ der rechten Seite ergibt:

$$fh \equiv 0(\mathfrak{m}),$$

also, da $h(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \neq 0$, mithin $h \not\equiv 0(\mathfrak{p})$:

$$f \equiv 0(\mathfrak{m}).$$

Auch ist

$$\mathfrak{m} = (f_1, \ldots, f_s) \equiv 0(f),$$

also folgt $\mathfrak{m} = (f)$, womit für primäre Ideale der Satz bewiesen ist.

Ist nun $\mathfrak{m} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r]$ ein beliebiges ungemischtes $(n-1)$-dimensionales Ideal, sind also $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r$ sämtlich $(n-1)$-dimensional, so ist nach dem eben bewiesenen $\mathfrak{q}_i = (f_i)$, also

$$\mathfrak{m} = [(f_1), \ldots, (f_r)].$$

[23]) D. Hilbert, Math. Ann. 42, S. 320.

Ist nun f das K. G. V. (im Polynomsinn) von $f_1, \ldots, f_r$, so ist $\mathfrak{m} = (f)$, denn jedes Polynom, das durch $f_1, \ldots, f_r$ teilbar ist, ist durch f teilbar, und umgekehrt. Damit ist der Satz bewiesen.

Eine Zerlegung von f in Primfaktoren:

$$f = p_1^{\varrho_1} \ldots p_r^{\varrho_r}$$

ergibt eine Produktdarstellung für $\mathfrak{m}$:

$$\mathfrak{m} = (p_1)^{\varrho_1} \ldots (p_r)^{\varrho_r}.$$

Da die Ideale (p_i) prim sind, so folgt:

Jedes ungemischte $(n-1)$-dimensionale Ideal ist Produkt von Potenzen von Primidealen, deren jedes von einem Primelement erzeugt wird.

§ 6.

Der Hentzeltsche Nullstellensatz.

1. Der M. Noethersche Fundamentalsatz der Theorie der algebraischen Funktionen[24]) lautet bekanntlich folgendermaßen:

Ist P ein algebraisch-abgeschlossener Körper, $\mathfrak{m} = (f_1, f_2)$ ein Ideal in $R = \mathsf{P}[x_1, x_2]$, wo f_1 und f_2 teilerfremd sind, und wo folglich das Ideal nur endlichviele Nullstellen $\{\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}\}$ $[i = 1, \ldots, j]$ in $C_2(\mathsf{P})$ hat[25]), *und ist f ein Polynom in R, so daß in jeder dieser Nullstellen eine Gleichung besteht von der Form:*

$$f = A_1^{(i)} f_1 + A_2^{(i)} f_2, \tag{1}$$

wo die A_1, A_2 Potenzreihen nach $(x_1 - \xi_1^{(i)}), (x_2 - \xi_2^{(i)})$ sind, über deren Konvergenz nichts vorausgesetzt wird, so ist $f \equiv 0\,(\mathfrak{m})$.

Dabei soll die Gleichung (1) in dem Sinne bestehen, daß, wenn beide Seiten rein formal nach Potenzen von $x_1 - \xi_1^{(i)}$, $x_2 - \xi_2^{(i)}$ geordnet werden, alle Koeffizienten übereinstimmen.

Verschärfung[26a]). *Es ist hinreichend, wenn beide Seiten von (1) bis auf Glieder von der Ordnung ϱ in $x_1 - \xi_1^{(i)}$, $x_2 - \xi_2^{(i)}$ übereinstimmen, wo ϱ eine nur von $\mathfrak{m}$ abhängige Zahl ist.*

Beweis. Sei $\mathfrak{q}_i$ eine primäre Komponente von $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{p}_i$ ihr Primideal,

---

[24]) M. Noether, Math. Ann. **6** (1873), S. 351.

[25]) Sind nämlich f_1 und f_2 teilerfremd, so gibt es im Ideal $\mathfrak{m}$ sowohl ein von x_1, als ein von x_2 freies Polynom, die durch den Euklidischen Algorithmus gewonnen werden können. Diese beiden Polynome werden nur für endlichviele Werte von x_2 bzw. x_1 Null.

[26]) Sonst würde nämlich die Mannigfaltigkeit von $\mathfrak{p}_i$ aus mehreren getrennten Punkten bestehen, mithin reduzibel sein; vgl. § 3, **10**.

[26a]) E. Bertini, Math. Ann. **34** (1889), S. 447; M. Noether, Math. Ann. **40** (1892), S. 140.

ϱ_i ihr Exponent, und $\varrho = \max(\varrho_i)$. Dann ist, da $\mathfrak{p}_i$ nur eine Nullstelle $\{\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}\}$ hat[26]):

$$\mathfrak{p}_i = (x_1 - \xi_1^{(i)}, x_2 - \xi_2^{(i)}).$$

Ersetzt man die Potenzreihen $A_1^{(i)}, A_2^{(i)}$ durch die Polynome $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}$, die aus ihren Gliedern der Ordnung $< \varrho$ bestehen, so folgt aus (1):

$$f \equiv a_1^{(i)} f_1 + a_2^{(i)} f_2 \; (\mathfrak{p}_i^\varrho),$$

$$f \equiv 0 \; (\mathfrak{m}, \mathfrak{p}_i^\varrho).$$

$$f \equiv 0 \; (\mathfrak{q}_i)$$

für jedes i, mithin

$$f \equiv 0 \; (\mathfrak{m}) \qquad \text{q. e. d.}$$

2. Der Satz läßt sich nach verschiedenen Richtungen hin n-dimensional verallgemeinern.

Erstens gilt der Beweis offenbar für beliebige Ideale $\mathfrak{m} = (f_1, \ldots, f_r)$ von der Dimensionszahl 0 in $R = \mathsf{P}[x_1, \ldots, x_n]$.[27])

Zweitens kann man, wie wir zeigen werden, die Voraussetzung, der Körper P sei algebraisch-abgeschlossen, fallen lassen. Man hat dann die Nullstellen ξ_i und die Koeffizienten der Potenzreihen in einem algebraisch-abgeschlossenen Erweiterungskörper Ω von P anzunehmen. Bricht man von vornherein, was ja unwesentlich ist, die Potenzreihen mit den Gliedern $(\varrho - 1)$-ter Ordnung ab, und *schreibt man* $\mathfrak{m}_\Omega$ *für das von* $\mathfrak{m}$ *in* $\Omega[x_1, \ldots, x_n]$ *erzeugte Ideal* (§ 1, 4), so lautet der verallgemeinerte Satz mit „Verschärfung" zusammengefaßt:

Ist $\mathfrak{m}$ *ein Ideal in* $R = \mathsf{P}[x_1, \ldots, x_n]$, *das die Dimension* 0 *hat* (§ 5, **5**) *und folglich nur endlichviele Nullstellen* $\xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)}$ $[i = 1, \ldots, \gamma]$ *in* $C_n(\Omega)$, *wo* Ω *ein algebraisch-abgeschlossener Erweiterungskörper von* P *ist, so gibt es eine nur von* $\mathfrak{m}$ *abhängige Zahl* ϱ, *so daß, wenn* $f \varepsilon R$, *aus*

$$f \equiv 0 \; (\mathfrak{m}_\Omega, (x_1 - \xi_1^{(i)}, \ldots, x_n - \xi_n^{(i)})^\varrho) \qquad [i = 1, \ldots, \gamma]$$

folgt

$$f \equiv 0 \; (\mathfrak{m}).$$

Der Beweis von vorhin ergibt nicht die gesuchte Gleichung, sondern die andere:

$$f \equiv 0 \; (\mathfrak{m}_\Omega).$$

Das heißt nach Definition von $\mathfrak{m}_\Omega$:

$$f = \sum \alpha_k f_k, \qquad \text{wo} \quad \alpha_k \varepsilon \Omega, \quad f_k \varepsilon \mathfrak{m}.$$

Drückt man die Größen α_i durch endlichviele linear-unabhängige Elemente $\varepsilon, \omega_1, \omega_2, \ldots$ von Ω mit Koeffizienten aus P aus, so kommt:

$$f = g_0 + \omega_1 g_1 + \ldots, \qquad \text{wo} \quad g_i \varepsilon \mathfrak{m},$$

---

[27]) Vgl. etwa Macaulay, Modular Systems, S. 60.

mithin, da die ω linear-unabhängig in bezug auf P sind:

$$f = g_0, \quad 0 = g_1, \ldots,$$

also

$$f \equiv 0 \, (\mathfrak{m}).$$

3. Läßt man nun drittens auch die Voraussetzung fallen, daß $\mathfrak{m}$ die Dimensionszahl 0 hat, so kann man zunächst, wie es Lasker[28]) und Macaulay[29]) versucht haben, unter Verzicht auf die Verschärfung daran festhalten, daß nur für eine endliche Anzahl Punkte $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ die Gleichungen (1) vorausgesetzt werden. Die Beweise von Lasker und Macaulay scheinen aber unvollständig[29a]) und setzen außerdem voraus, daß P der Körper der gewöhnlichen komplexen Zahlen ist, und daß die Potenzreihen A in einem Gebiet konvergieren. Einen anderen Weg hat K. Hentzelt[30]) eingeschlagen, indem er das Bestehen der Gleichung (1) in allen Punkten der Mannigfaltigkeit von $\mathfrak{m}$ fordert, und die angegebene Verschärfung beibehält. Sein Satz, der hier auf kürzerem Wege bewiesen werden soll, lautet:

(Hentzeltscher Nullstellensatz, erste Fassung) *Ist* $\mathfrak{m}$ *ein Ideal in* $R = \mathsf{P}[x_1, \ldots, x_n]$, *und* Ω *ein algebraisch-abgeschlossener Erweiterungskörper von* P, *so gibt es eine nur von* $\mathfrak{m}$ *abhängende Zahl* ϱ, *so daß, wenn* $f \varepsilon R$, *aus dem Bestehen der Kongruenz*

$$(2) \qquad f \equiv 0 \, (\mathfrak{m}_\Omega, (x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n)^\varrho)$$

für jede Nullstelle $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ *von* $\mathfrak{m}$ *in* $C_n(\Omega)$ *folgt*

$$f \equiv 0 \, (\mathfrak{m}).$$

Der Satz kann, genau so wie der Hilbertsche Nullstellensatz dahin modifiziert werden, daß die Kongruenz (2) nicht für alle algebraischen Nullstellen von $\mathfrak{m}$ gefordert wird, sondern nur für die allgemeine Nullstelle eines jeden zugehörigen Primideals $\mathfrak{p}_i$. So kommt man zum Satz[31]):

(Hentzeltscher Nullstellensatz, zweite Fassung) *Ist* $\mathfrak{m}$ *ein Ideal im* $R = \mathsf{P}[x_1, \ldots, x_n]$, *sind* $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ *die zugehörigen Primideale, und ist* $\Sigma_i = \mathsf{P}(\xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)})$ *der Nullstellenkörper von* $\mathfrak{p}_i$, *so existiert eine Zahl* ϱ, *so daß, wenn* $f \varepsilon R$, *aus*

$$f \equiv 0 \, (\mathfrak{m}_{\Sigma_i}, (x_1 - \xi_1^{(i)}, \ldots, x_n - \xi_n^{(i)})^\varrho) \qquad [i = 1, \ldots, r]$$

---

[28]) Math. Ann. **60**, S. 95.

[29]) Modular Systems, S. 61.

[29a]) Zusatz bei der Korrektur. Die Lücken des Macaulayschen Beweises sind in einem Briefwechsel zwischen Herrn Macaulay und dem Verfasser ausgefüllt worden. Die Konvergenzvoraussetzung blieb dabei aber aufrechterhalten. Ich besitze jetzt einen von dieser Voraussetzung freien Beweis, der bei beliebigem Koeffizientenkörper P gilt.

[30]) Siehe Fußnote [6]).

[31]) Vgl. Grete Hermann, a. a. O. Die Bezeichnungen „erste“ und „zweite Fassung“ sind dort gerade umgekehrt wie hier.

folgt

$$f \equiv 0\ (\mathfrak{m}).$$

Dabei bedeutet wiederum $\mathfrak{m}_{\Sigma_i}$ das von $\mathfrak{m}$ in $\Sigma_i[x_1, \ldots, x_n]$ erzeugte Ideal; die Forderung wird jeweils vorausgesetzt in $\Sigma_i[x_1, \ldots, x_n]$ für $i = 1, \ldots, r$.

Die zweite Fassung dürfte für Anwendungen wichtiger sein wie die erste; ihr Beweis ist einfacher.

4. Man braucht offenbar die beiden Sätze nur für Primärideale zu beweisen: Durch die Zerlegung $\mathfrak{m} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r]$ folgt dann der allgemeine Satz unmittelbar, wie im Spezialfall 1. Die zweite Fassung wird dadurch wesentlich vereinfacht; es ist nur zu beweisen:

Ist $\mathfrak{q}$ *ein Primärideal in* R, $\mathfrak{p}$ *das zugehörige Primideal,* $\Sigma = \mathrm{P}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, *dessen Nullstellenkörper, so existiert eine Zahl* ϱ, *so daß, wenn* $f \varepsilon R$, *aus*

$$f \equiv 0\ (\mathfrak{q}_\Sigma, (x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n)^\varrho) \quad \text{in} \quad \Sigma[x_1, \ldots, x_n] \tag{3}$$

folgt

$$f \equiv 0\ (\mathfrak{q}).$$

Beweis. Wir wollen den allgemeinen Fall auf den schon erledigten Spezialfall, daß $\mathfrak{q}$ null-dimensional ist, zurückführen, indem wir gewisse x_i gleich Parametern setzen und so die Dimensionszahl erniedrigen.

Sei l die Dimensionszahl von $\mathfrak{q}$, und sei, evtl. nach Umnennung der Indizes, $\xi_1, \ldots, \xi_l$ ein irreduzibles System in Ω. Dann ist Σ algebraisch über $\Gamma = \mathrm{P}(\xi_1, \ldots, \xi_l)$. Sei Δ ein algebraisch-abgeschlossener Erweiterungskörper von Σ, und seien $\xi_{l+1}^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}$ $[k = 1, \ldots, \gamma]$ die mit $\xi_{l+1}, \ldots, \xi_n = \xi_{l+1}^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(1)}$ konjugierten Elementsysteme. Dann sind nach § 3, 9 die γ Punkte $\{\xi_1, \ldots, \xi_l, \xi_{l+1}^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}\}$ diejenigen Nullstellen von $\mathfrak{q}_\Delta$, in denen $x_1, \ldots, x_l$ die Werte $\xi_1, \ldots, \xi_l$ haben. Ersetzt man, in allen Polynomen von $\mathfrak{q}_\Delta$, die Unbestimmte $x_1, \ldots, x_l$ durch $\xi_1, \ldots, \xi_l$, so entsteht ein Ideal $\bar{\mathfrak{q}}_\Delta$ in $\Delta[x_{l+1}, \ldots, x_n]$, das nur die endlichvielen Nullstellen $\xi_{l+1}^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}$ in $C_{n+1}(\Delta)$ hat. Aus (3) folgt, wenn man zu Δ übergeht und $x_1, \ldots, x_t = \xi_1, \ldots, \xi_t$ setzt,

$$\bar{f} = f(\xi_1, \ldots, \xi_l,\ x_{l+1}, \ldots, x_n) \equiv 0\ (\bar{\mathfrak{q}}_\Delta, (x_{l+1} - \xi_{l+1}, \ldots, x_n - \xi_n)^\varrho).$$

Ausübung der Automorphismen von Ω, die Γ elementweise invariant lassen, ergibt:

$$\bar{f} \equiv 0\ (\bar{\mathfrak{q}}_\Delta, (x_{l+1} - \xi_{l+1}^{(k)}, \ldots, x_n - \xi_n^{(k)})^\varrho).$$

Mithin sind die Voraussetzungen des Hentzeltschen Satzes für das nulldimensionale Ideal $\bar{\mathfrak{q}}_\Gamma$ in $\Gamma[x_{l+1}, \ldots, x_n]$ erfüllt, und es folgt

$$\bar{f} \equiv 0\ (\bar{\mathfrak{q}}_\Gamma). \tag{4}$$

Das heißt, $\bar{f}$ entsteht aus einem Polynom aus $\mathfrak{q}_\Gamma$ dadurch, daß man $x_1, \ldots, x_l$ durch $\xi_1, \ldots, \xi_l$ ersetzt.

Ein Polynom aus $\mathfrak{q}_\Gamma$ hat die Form

$$\sum \frac{\varphi_i(\xi_1, \ldots, \xi_l)}{\psi_i(\xi_1, \ldots, \xi_l)} g_i(x_1, \ldots, x_n), \quad \text{wo} \quad g_i(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0\ (\mathfrak{q}).$$

Mithin ist

$$\bar{f} = \sum \frac{\varphi_i(\xi_1, \ldots, \xi_l)}{\psi_i(\xi_1, \ldots, \xi_l)} g_i(\xi_1, \ldots, \xi_l, x_{l+1}, \ldots, x_n).$$

Multipliziert man beide Seiten mit dem Hauptnenner $\psi(\xi_1, \ldots, \xi_l)$, so kommt:

$$\psi(\xi_1, \ldots, \xi_l) f(\xi_1, \ldots, \xi_l, x_{l+1}, \ldots, x_n)$$
$$= \sum \chi_i(\xi_1, \ldots, \xi_l) g_i(\xi_1, \ldots, \xi_l, x_{l+1}, \ldots, x_n).$$

Da die $\xi_1, \ldots, \xi_l$ ein irreduzibles System bilden, kann man sie durch Unbestimmte $x_1, \ldots, x_l$ ersetzen. Die rechte Seite wird dann ein Polynom aus $\mathfrak{q}$, also:

$$\psi(x_1, \ldots, x_l) f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0\ (\mathfrak{q}).$$

Da aber $\psi(\xi_1, \ldots, \xi_l) \neq 0$, so ist $\psi(x_1, \ldots, x_l) \not\equiv 0\ (\mathfrak{p})$, mithin

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0\ (\mathfrak{q}) \qquad \text{q. e. d.}$$

5. Zum Beweise des Hentzeltschen Satzes in der ersten Fassung für ein Primärideal $\mathfrak{q}$ können wir zunächst wieder voraussetzen, daß P algebraisch-abgeschlossen ist, mithin $\mathsf{P} = \Omega$. Die Voraussetzung ist hinterher wie in 2 leicht aufzuheben.

Der Beweis verläuft anfangs ungefähr wie der in 4 geführte bis zur Formel (4). Man numeriert wiederum die Unbestimmten so, daß im Nullstellenkörper die Elemente $\xi_1, \ldots, \xi_l$ ein irreduzibles System bilden, mithin $\xi_{l+1}, \ldots, \xi_n$ algebraische Funktionen von ihnen sind. Im Beweise 4 ist überall ξ_i durch ξ_i' zu ersetzen, wo $\xi_1', \ldots, \xi_l'$ reguläre Argumentwerte aus P, $\xi_{l+1}', \ldots, \xi_n'$ die zugehörigen Funktionswerte sind. Für diese $\xi_1', \ldots, \xi_n$ gilt die Voraussetzung (2). An Stelle der in 4 benutzten Körper $\mathsf{P}, \Gamma, \Sigma, \Delta$ tritt der einzige Körper P. Man findet nach Analogie von (4):

$$f' \equiv 0\ (\mathfrak{q}'), \tag{5}$$

wo der Strich überall bedeutet, daß $x_1, \ldots, x_n$ durch $\xi_1', \ldots, \xi_n'$ ersetzt sind.

Aus dieser Gleichung wollen wir die andere

$$\bar{f} \equiv 0\ (\bar{\mathfrak{q}}_\Gamma) \tag{6}$$

[vgl. (4)] ableiten. Das geschieht, indem wir für $\mathfrak{q}$ eine Basis $f_1, \ldots, f_r$ annehmen. Die Polynome $f_1', \ldots, f_r'$ bilden dann offenbar eine Basis für $\mathfrak{q}'$, und $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_r$ eine Basis für $\bar{\mathfrak{q}}_\Gamma$. Nach einer von Grete Hermann[32]) nach Hentzelt angegebenen Methode kann man nun die Kongruenz (6) ersetzen durch die Forderung, daß ein gewisses lineares Gleichungssystem lösbar ist, oder daß ein gewisses Matrizenpaar m_1, m_2 gleichen Rang besitzt. Ebenso drückt sich (5) aus durch die Ranggleichheit der entsprechenden Matrizen m_1', m_2', die aus m_1, m_2 entstehen, indem $\xi_1, \ldots, \xi_l$ durch $\xi_1', \ldots, \xi_l'$ ersetzt werden. Für die Einzelheiten der Rechnung können wir auf die Arbeit von Fräulein Hermann verweisen. Aus den Sätzen § 2, **6**, **7** folgt nun, daß man die Argumente $\xi_1, \ldots, \xi_l$ regulär so spezialisieren kann, daß m_1 und m_1' gleichen Rang haben, und ebenso m_2 und m_2'. Da die Voraussetzung (5) besagt, daß m_1' und m_2' gleichen Rang haben für alle regulären Argumentwerte $\xi_1', \ldots, \xi_l'$, so folgt die Ranggleichheit von m_1 und m_2, mithin die Kongruenz (6).

Der Beweis verläuft weiter wie oben von (4) an.

---

[32]) A. a. O. S. 760. Die dort für den Fall $t = n - 1$ gegebene Betrachtung läßt sich ohne weiteres auf den allgemeinen Fall übertragen.

(Eingegangen am 14. 8. 1925.)