

Über affine Geometrie XL: Eiflächen konstanter Affinbreite.

Von

Wilhelm Süß in Kagoshima (Japan).

1. Bekanntlich haben Eiflächen konstanter Breite b die Eigenschaft, daß die Verbindungssehne der Berührungspunkte zweier paralleler Stützebenen die konstante Länge b besitzt und jede Normale eine Doppelnormale ist. Es liegt nahe, die Möglichkeit analoger Verhältnisse in der affinen Geometrie der Eiflächen zu untersuchen. Dabei sei folgende *Definition* zugrunde gelegt: Eine „stetig-differentiierbare“ Eifläche E besitzt die konstante Affinbreite β , wenn die Affinentfernung¹⁾ jedes Punktes P von E von seinem „Gegenpunkt“²⁾ P' den konstanten Wert β besitzt. Andererseits fragen wir nach den Eiflächen, deren Affinnormalen affine Doppelnormalen sind. Es wird sich herausstellen, daß beide Fragestellungen nicht nur zu denselben Flächen führen, sondern sogar so einschneidende Bedingungen enthalten, daß sie charakteristische Eigenschaften des Ellipsoids darstellen. Wir werden folgenden Satz beweisen:

Die Ellipsoide sind sowohl die einzigen Eiflächen konstanter Affinbreite wie auch die einzigen analytischen Eiflächen, deren Affinnormalen sämtlich affine Doppelnormalen sind.

Außerdem werden wir auf das affingeometrische Analogon des Satzes von Herrn K. Reidemeister³⁾ eingehen, daß die Körper konstanten Durchmessers mit denjenigen konstanter Breite identisch sind. Am Schlusse beschäftigen wir uns noch mit dem Problem der Eilinien, deren Affinnormalen affine Doppelnormalen sind, das auf Ellipsen führen wird.

¹⁾ Siehe z. B. W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Berlin 1923, S. 110. Wir zitieren dies Buch mit (B).

²⁾ D. h. in P und P' sind die Tangentenebenen einander parallel.

³⁾ Über Körper konstanten Durchmessers, Math. Zeitschr. 10, S. 214 ff.

§ 1.

Eiflächen konstanter Affinbreite.

2. Wir wollen annehmen, die betrachtete Eifläche E sei keine Kugel, und die äquiformen (gewöhnlichen) Krümmungslinien als Parameterkurven (u, v) einführen. Dann ergibt sich für die konstante Affinbreite β nach unserer Definition ¹⁾ der Ausdruck

$$(1) \quad \beta = \frac{(\xi_u, \xi_v, \bar{\xi} - \xi)}{\sqrt[4]{EGLN}} = \frac{(\xi, \bar{\xi} - \xi)}{\sqrt[4]{K}} = \lambda \cdot (\xi, \bar{\xi} - \xi),$$

wobei $(\bar{\xi})$ den Gegenpunkt des Punktes (ξ) , ξ den Einheitsvektor der gewöhnlichen Flächennormalen, $K = \lambda^{-4}$ die Gaußsche Krümmung und E, F, G, L, M, N die gewöhnlichen Fundamentalgrößen im Punkte (ξ) bedeuten, für die dann

$$F = M = 0$$

sein soll.

Aus (1) folgt bei Vertauschung der beiden Punkte (ξ) und $(\bar{\xi})$ für die Gaußsche Krümmung \bar{K} im Punkte $(\bar{\xi})$:

$$(2) \quad \bar{K} = \bar{\lambda}^{-4} = K = \lambda^{-4}.$$

Wegen (2) aber wird die Eifläche E von der Berührungskurve jedes umschriebenen (Stütz-) Zylinders halbiert; E ist somit nach einem Satz von Herrn T. Kubota ⁴⁾ eine *Mittelpunktseifläche*.

Es sei nun weiter η ($\bar{\eta}$) der Affinnormalvektor im Punkte (ξ) (bzw. $(\bar{\xi})$). Dann ergibt sich nach unserer Wahl der Parameterlinien ⁵⁾:

$$(3) \quad \eta = \frac{1}{2} G^{ik} \xi_{ik} = \frac{\lambda_u}{\lambda^2 L} \cdot \xi_u + \frac{\lambda_v}{\lambda^2 N} \cdot \xi_v + \frac{\xi}{\lambda}.$$

Wir behaupten nun das Bestehen der folgenden Beziehung:

$$(4) \quad \bar{\xi} - \xi = \beta \cdot \eta.$$

Setzen wir nämlich

$$(5a) \quad \bar{\xi} - \xi = \mu \xi_u + \nu \xi_v + \varrho \xi,$$

so folgt aus (1) zunächst

$$(5b) \quad \varrho = \frac{\beta}{\lambda}.$$

⁴⁾ Einige Probleme über konvex-geschlossene Kurven und Flächen, Tôhoku Math. Journal 17, S. 351 ff., Satz 2.

⁵⁾ (B), S. 166 (186).

Ferner erhält man durch Differentiation von (1):

$$\begin{aligned}\lambda_u(\xi, \bar{x} - x) + \lambda(\xi_u, \bar{x} - x) + \lambda(\xi, \bar{x}_u - x_u) &= 0, \\ \lambda_v(\xi, \bar{x} - x) + \lambda(\xi_v, \bar{x} - x) + \lambda(\xi, \bar{x}_v - x_v) &= 0.\end{aligned}$$

Hierin verschwinden die dritten Glieder, da die Tangentenebenen in (x) und (\bar{x}) einander parallel sind. Und nach den Ableitungsgleichungen von Weingarten ist:

$$\begin{aligned}\xi_u &= -\frac{L}{E} x_u, \\ \xi_v &= -\frac{N}{G} x_v.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$(5c) \quad \begin{cases} \left(\lambda_u \xi - \frac{\lambda L}{E} x_u, \bar{x} - x \right) = 0, \\ \left(\lambda_v \xi - \frac{\lambda N}{G} x_v, \bar{x} - x \right) = 0. \end{cases}$$

Nach (5a) und (5c) aber folgt

$$\begin{aligned}\lambda_u \varrho - \lambda L \mu &= 0, \\ \lambda_v \varrho - \lambda N \nu &= 0,\end{aligned}$$

oder nach (5c)

$$(5d) \quad \begin{cases} \mu = \frac{\lambda_u}{\lambda^2 L} \beta, \\ \nu = \frac{\lambda_v}{\lambda^2 N} \beta. \end{cases}$$

Aus (5a), (5b) und (5d) ergibt sich die behauptete Beziehung (4). Statt (4) können wir auch schreiben:

$$(6) \quad \eta + \bar{\eta} = 0.$$

Es sei nun O der Mittelpunkt von E , und es mögen die Vektoren x O zum Ursprung haben. Da die Tangentenebenen in den Endpunkten zweier entgegengesetzter Vektoren x einander parallel sind, so sind stets x und \bar{x} zwei solche von O aus einander entgegengesetzte Vektoren:

$$(7) \quad \zeta = x + \bar{x} = 0.$$

Nehmen wir nun an, E sei kein Ellipsoid, und wählen wir von nun an die Affinkrümmungslinien zu Parameterkurven (u', v') ⁶⁾, so folgt für ζ nach (4)

$$\begin{aligned}0 &= \bar{x}_{u'} + x_{u'} = 2x_{u'} + \beta \eta_{u'} \\ &= x_{u'} \cdot [2 + \beta(c_1^2 - h)] \\ &= x_{v'} \cdot [2 + \beta(c_2^2 - h)],\end{aligned}$$

⁶⁾ (B), S. 164.

wenn h die mittlere Affinkrümmung bedeutet. Daraus geht aber hervor:

$$c_1^1 - h = c_2^2 - h = -\frac{2}{\beta},$$

oder, da $c_i^i = 0$ ist ⁷⁾,

$$(8) \quad h = \frac{2}{\beta} = \text{konst.}$$

Nun sind aber die Ellipsoide die einzigen Eiflächen mit konstanter mittlerer Affinkrümmung h ⁸⁾. Somit ist unsere Annahme, E sei kein Ellipsoid, falsch und der erste Teil unserer Behauptung in 1. bewiesen.

§ 2.

Eiflächen mit affinen Doppelnormalen.

3. Wir bezeichnen den zweiten Punkt, welchen die Affinnormale im Punkte (\mathfrak{r}) mit der analytischen Eifläche E gemeinsam hat, mit (\mathfrak{r}^*) . η^* möge der Affinnormalenvektor im Punkte (\mathfrak{r}^*) sein. Dann lautet unsere Frage: Für welche Eiflächen E gibt es eine (skalare) Funktion des Ortes $q(u, v)$ derart, daß stets

$$(1) \quad \mathfrak{r}^* - \mathfrak{r} = q \cdot \eta = -q^* \cdot \eta^*$$

ist, wenn q^* den Wert von q im Punkte (\mathfrak{r}^*) bedeutet?

(1) stellt eine doppelte Erweiterung der Gleichung (4) von § 1 dar, indem q nicht als konstant angenommen wird und die Tangentenebenen in (\mathfrak{r}) und (\mathfrak{r}^*) nicht parallel sein müssen. Übrigens bedeutet q die Affinentfernung des Punktes (\mathfrak{r}^*) vom Punkte (\mathfrak{r}) . ⁹⁾

Wir nehmen wieder an, E sei kein Ellipsoid, und wählen die Affinkrümmungslinien zu Parameterkurven (u, v) . Die Parameter (u, v) seien dabei so normiert, daß der Vektor η in das Innere von E weist und die affinen Hauptkrümmungsradien r_1, r_2, r_1^*, r_2^* im Punkte (\mathfrak{r}) bzw. (\mathfrak{r}^*) positiv sind ¹⁰⁾. Die Affinnormalen η^* bilden nun nach (1) gleichzeitig mit η eine Torse; d. h. wenn sich der Punkt (\mathfrak{r}) auf einer Affinkrümmungslinie bewegt, so beschreibt der zugeordnete Punkt \mathfrak{r}^* gleichzeitig eine Affinkrümmungslinie. u und v können somit gleichzeitig in den Punkten (\mathfrak{r}) und (\mathfrak{r}^*) als Parameter der Affinkrümmungslinien verwendet werden. Dann ist nach dem affingeometrischen Analogon zu der Formel von O. Rodrigues

$$(2) \quad \begin{cases} \mathfrak{r}_u + r_1 \eta_u = 0, & \mathfrak{r}_u^* + r_1^* \eta_u^* = 0, \\ \mathfrak{r}_v + r_2 \eta_v = 0, & \mathfrak{r}_v^* + r_2^* \eta_v^* = 0. \end{cases}$$

⁷⁾ (B), S. 163 (a_{22}). — ⁸⁾ (B), § 74.

⁹⁾ (B), S. 162 (a_9) und S. 165 (184).

¹⁰⁾ (B), S. 212.

Die zu η und η^* gleichzeitig gehörigen Hüllgebilde haben mit η bzw. η^* gemeinsame Berührungspunkte

$$(3) \quad \begin{cases} \delta_1 = \xi + r_1 \eta = \xi^* + r_1^* \eta^*, \\ \delta_2 = \xi + r_2 \eta = \xi^* + r_2^* \eta^*. \end{cases}$$

Durch Differentiation von (3) erhält man unter Beachtung von (1) und (2):

$$\begin{aligned} \xi_u \left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right) + \eta \left(r_{2u} + \frac{r_{2u}^* q}{q^*}\right) &= \xi_u^* \left(1 - \frac{r_2^*}{r_1^*}\right), \\ \xi_v \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) + \eta \left(r_{1v} + \frac{r_{1v}^* q}{q^*}\right) &= \xi_v^* \left(1 - \frac{r_1^*}{r_2^*}\right). \end{aligned}$$

Hieraus folgt entweder

$$(4a) \quad r_1 = r_2, \quad r_1^* = r_2^*$$

oder

$$(4b) \quad \begin{cases} \xi_u^* = \frac{(r_1 - r_2) r_1^*}{(r_1^* - r_2^*) r_1} \xi_u, \\ \xi_v^* = \frac{(r_1 - r_2) r_2^*}{(r_1^* - r_2^*) r_2} \xi_v. \end{cases}$$

Wenn überall auf E (4a) erfüllt ist, so ist die Eifläche notwendig ein Ellipsoid¹¹⁾, was im Widerspruch zu unserer gegensätzlichen Annahme von oben steht. Auf der analytischen Eifläche E muß also überall (4b) erfüllt sein, dagegen (4a) nur in isolierten Punkten. Dann aber folgt aus (1), (2) und (4b)

$$\begin{aligned} \xi_u^* - \xi_u &= \frac{r_2^* r_1 - r_2 r_1^*}{(r_1^* - r_2^*) r_1} \xi_u = q_u \eta + q \eta_u = q_u \eta - \frac{q}{r_1} \xi_u, \\ \xi_v^* - \xi_v &= \frac{r_1 r_2^* - r_2 r_1^*}{(r_1^* - r_2^*) r_2} \xi_v = q_v \eta - \frac{q}{r_2} \xi_v. \end{aligned}$$

Also ist überall auf E

$$q_u = q_v = 0,$$

d. h.

$$(5) \quad q = \text{konst.}$$

Außerdem besteht nach (4b) für die Einheitsvektoren der gewöhnlichen Flächennormalen ξ, ξ^* in (χ) bzw. (χ^*) die Beziehung

$$(6) \quad \xi + \xi^* = 0.$$

Mit (5) und (6) aber sind wir auf den in § 1 behandelten Fall der

¹¹⁾ (B), § 77.

dortigen Gleichung (4) zurückgeführt worden. E müßte also im Widerspruch zu der anfangs gemachten Voraussetzung doch ein Ellipsoid sein. Hiermit ist der zweite Teil des in 1. behaupteten Satzes bewiesen.

4. Hier soll eine Betrachtung von Körpern konstanten Affindurchmessers beigefügt werden. Es sei B ein dreidimensionaler, von einer geschlossenen, zweiseitigen, ganz im Endlichen gelegenen, stetig-differentiierbaren Fläche F begrenzter Bereich. Unter dem „Affindurchmesser“ D von B verstehen wir das Maximum der Affinentfernungen $e(\bar{x}, x)$ eines Punktes (\bar{x}) aus B von einem Oberflächenpunkt (x). In Analogie zu der entsprechenden Definition von Herrn K. Reidemeister³⁾ sagen wir, daß B von konstantem Affindurchmesser sei, wenn es zu jedem Punkt (x) auf F einen Punkt (\bar{x}) in (B) gibt derart, daß für jeden beliebigen anderen Punkt (ξ) aus B

$$(7) \quad e(\xi, x) \leq e(\bar{x}, x) = c$$

ist, wobei c eine feste endliche Zahl bedeutet. Hierbei ist nach (1) in § 1

$$(8) \quad e(\xi, x) = \frac{(\xi, \delta - x)}{\sqrt[4]{|K|}} = \lambda(\xi, \delta - x).$$

Wir behaupten: *Ein Körper B konstanten Affindurchmessers ist ein Ellipsoid.*

Dazu müssen wir nach § 1 nur zeigen, daß die Oberfläche F von B eine Eifläche ist und konstante Affinbreite besitzt.

Daß F eine Eifläche ist, folgt aus (7). Denn zunächst muß überall auf F $K > 0$ sein. Nach unseren Voraussetzungen für F muß nämlich auf jeden Fall irgendwo auf F $K > 0$ sein. Wäre aber in einem Punkte von F $K = 0$, so müßte B ganz in eine Ebene fallen, weil andernfalls nach (8) unendliche Affinentfernungen möglich wären, was im Widerspruch zu der Endlichkeit der Konstanten c in (7) steht. Wenn aber K an einer Stelle von F wesentlich positiv ist und nirgends verschwindet, so ist überall auf F $K > 0$ und F somit wegen seiner Geschlossenheit eine Eifläche¹²⁾.

Wir betrachten nun die Menge M aller Punkte (α), für die

$$(9) \quad e(\alpha, x_0) = c$$

ist, wobei (x_0) ein fester Punkt von F ist. In M ist nach unserer Definition (7) mindestens ein Punkt (\bar{x}) von B enthalten. Ein solcher Punkt (\bar{x}) gehört selbst zu F , weil sonst nach (8), da B ein Eikörper ist, der Schnittpunkt der Verlängerung von $(\bar{x} - x)$ über den Punkt (\bar{x}) hinaus mit F größere Affinentfernung von (x) besäße als c . Alle Punkte (α)

¹²⁾ Vgl. W. Blaschke, Kreis und Kugel. Leipzig 1916, S. 164.

in (9) liegen also auf F oder außerhalb B . Wir behaupten nun: Die Menge M der Punkte (α) ist eine zur Tangentenebene in (\bar{x}) an F parallele Tangentenebene in (\bar{x}) an F . Nach (8) und (9) ist M eine Ebene, die wegen

$$\left(\xi, \frac{d\alpha}{dt}\right) = 0$$

zur Tangentialebene in (\bar{x}) parallel ist; M enthält den Punkt (\bar{x}) ; sie ist Tangentialebene in (\bar{x}) an F , da sie Stützebene von B sein muß; wegen (9) gäbe es nämlich andernfalls wie oben größere Affinentfernungen in B als c .

(\bar{x}) und (\bar{x}) sind somit ein Punktepaar, das mit (7) die Bedingungen eines Eikörpers konstanter Affinbreite erfüllt, w. z. b. w.

§ 3.

Eilinen mit affinen Doppelnormalen.

5. Wir fragen jetzt nach den Eilinen mit affinen Doppelnormalen. Es sei $E(\bar{x})$ eine solche Eilinie. Wir behaupten: E ist eine Ellipse.

E möge auf die Affinlänge s als Parameter bezogen sein. Es sei (\bar{x}) oder $(\bar{x}(\bar{s}))$ der zweite Schnittpunkt der Affinnormalen im Punkte $(\bar{x}(s))$ mit E . Dann soll es also eine Funktion $q(s)$ geben derart, daß

$$(1) \quad \bar{x}(\bar{s}) - \bar{x}(s) = q(s) \cdot \bar{x}''(s) = -q(\bar{s}) \cdot \bar{x}''(\bar{s})$$

ist, wobei die Differentiation nach der Affinlänge stets durch Striche bezeichnet sei. Es sei k die Affinkrümmung, $r = \frac{1}{k}$ der Affinkrümmungsradius und $\eta(s)$ der Affinevolutenvektor im Punkte $(\bar{x}(s))$. Dann ist¹³⁾:

$$(2) \quad \begin{cases} \eta(s) = \bar{x}(s) + r(s)\bar{x}''(s), \\ \eta'(s) = r'(s)\bar{x}''(s). \end{cases}$$

Da die Affinnormalen Doppelnormalen sein sollen, so ist

$$(3) \quad \begin{cases} \eta(\bar{s}) = \eta(s), \\ \eta'(\bar{s}) \frac{d\bar{s}}{ds} = \eta'(\bar{s}) \cdot \bar{s}' = \eta'(s). \end{cases}$$

Hieraus schließt man unter Verwendung von (1) und (2) auf

$$(4) \quad \begin{cases} r(s)q(\bar{s}) + r(\bar{s})q(s) = q(s)q(\bar{s}), \\ q(s)r'(\bar{s})\bar{s}' + q(\bar{s})r'(s) = 0. \end{cases}$$

Differentiiert man (1) nach s , so erhält man wegen der Beziehungen¹⁴⁾

$$(5) \quad \begin{cases} \bar{x}'(s) + r(s)\bar{x}'''(s) = 0, \\ (\bar{x}', \bar{x}'') = 1 \end{cases}$$

¹³⁾ (B), S. 28.

¹⁴⁾ (B), S. 15. (a, b) bedeutet hier die Determinante $a_1 b_2 - a_2 b_1$.

die Gleichungen

$$(6) \quad \begin{cases} (\mathfrak{r}'(s), \mathfrak{r}'(\bar{s}))\bar{s}' = q'(s), \\ (\mathfrak{r}'(s), \mathfrak{r}'(\bar{s})) = -q'(\bar{s})\bar{s}', \end{cases}$$

aus welchen folgt:

$$(7) \quad q'(s) + q'(\bar{s})\bar{s}'^2 = 0.$$

Nehmen wir zunächst an, es sei

$$q'(s) \equiv 0,$$

so folgt aus (6), daß $\mathfrak{r}'(s)$ und $\mathfrak{r}'(\bar{s})$ stets einander parallel sind. Dann ist nach (1) und (5)

$$(\mathfrak{r}(\bar{s}) - \mathfrak{r}(s), \mathfrak{r}'(s)) = -q = -q \cdot \frac{|\mathfrak{r}'(s)|}{|\mathfrak{r}'(\bar{s})|},$$

also¹⁵⁾

$$\varrho(s) = |\mathfrak{r}'(s)|^3 = |\mathfrak{r}'(\bar{s})|^3 = \varrho(\bar{s}),$$

wenn ϱ den äquiformen (gewöhnlichen) Krümmungsradius bedeutet. Dann aber ist E eine Eilinie mit Mittelpunkt. Da aber nach (4)

$$r(s) + r(\bar{s}) = q = \text{konst.}$$

ist, so folgt für E

$$r(s) = r(\bar{s}) = \frac{q}{2} = \text{konst.},$$

d. h. E ist eine Ellipse, wie wir behauptet haben.

Wir nehmen jetzt an, es sei *nicht* $q' \equiv 0$, und werden aus dieser Annahme einen Widerspruch ableiten. Es ist E dann keine Ellipse, also auch *nicht* $r'(s) \equiv 0$.

Durch Differentiation von (4)₁ erhält man unter Verwendung von (4) und (7) nach kurzer Rechnung die Relation

$$(8) \quad q(\bar{s})r(\bar{s}) = q(s)r(s),$$

wobei von unserer eben ausgesprochenen Annahme Gebrauch gemacht wird. Aus (4)₂ und (8) ergibt sich weiter

$$\bar{s}' = -\frac{q(\bar{s})r'(s)}{q(s)r'(\bar{s})} = -\frac{r(s)r'(s)}{r(\bar{s})r'(\bar{s})}.$$

Also ist

$$(9) \quad r^2(s) + r^2(\bar{s}) = \alpha^2 = \text{konst.}$$

(4)₁, (8) und (9) führen schließlich zu der Gleichung

$$(10) \quad r(s)q(s) = \alpha^2 = r^2(s) + r^2(\bar{s}) = \text{konst.}$$

Hieraus erhält man noch

$$(11) \quad q^2(s) + q^2(\bar{s}) = q^2(s) \cdot \frac{\alpha^2}{r^2(\bar{s})} = \left[\frac{q(s)q(\bar{s})}{\alpha} \right]^2.$$

¹⁵⁾ (B), S. 32.

Es sei für $s = s_0$ ($\bar{s}_0 = \bar{s}(s_0)$)

$$q(s_0) = q(\bar{s}_0).$$

Dann folgt aus (10) und (11)

$$(12) \quad q(s_0) = q(\bar{s}_0) = 2r(s_0) = 2r(\bar{s}_0) = \alpha\sqrt{2}.$$

Betrachten wir den für den Punkt $(\mathfrak{r}(s))$ geltenden Parameterwert s auch als Parameterwert des Punktes $(\mathfrak{r}(\bar{s}))$, so besteht, wenn wir die Differentiation von $\mathfrak{r}(\bar{s})$ nach s durch Punkte bezeichnen, die Beziehung¹⁶⁾

$$(13) \quad \bar{s}'^3 = (\dot{\mathfrak{r}}(\bar{s}), \ddot{\mathfrak{r}}(\bar{s})).$$

Nach (1), (5) und (10) ist nun

$$\dot{\mathfrak{r}}(\bar{s}) = \mathfrak{r}'(s) \left[1 - \frac{q(s)}{r(s)} \right] + q'(s) \mathfrak{r}''(s),$$

$$\ddot{\mathfrak{r}}(\bar{s}) = \mathfrak{r}''(s) \left[1 - \frac{q(s)}{r(s)} + q''(s) \right] - 3 \frac{q'(s)}{r(s)} \mathfrak{r}'(s).$$

Nach (10) und (13) ist also:

$$(14) \quad \alpha^4 \bar{s}'^3 = [q^2(s) - \alpha^2] [q^2(s) - \alpha^2 - \alpha^2 q''(s)] + 3\alpha^2 q(s) q'^2(s).$$

Aus (4)₂ erhält man andererseits nach (7) und (10)

$$\bar{s}' = - \frac{q(\bar{s}) r'(s)}{q(s) r'(\bar{s})} = \frac{q^3(\bar{s})}{q^3(s)} \cdot \bar{s}'^2;$$

also ist

$$(15) \quad \bar{s}' = \left\{ \frac{q(s)}{q(\bar{s})} \right\}^3.$$

Im Falle (12) ($s = s_0$) ergibt sich somit aus (14) und (15):

$$\alpha^4 \bar{s}'^3 = \alpha^4 - \alpha^4 q''(s_0) + 3\alpha^3 \sqrt{2} q'^2(s_0) = \alpha^4.$$

Da ein analoger Schluß für den zugeordneten Wert $s = \bar{s}_0 = \bar{s}(s_0)$ gilt, ist somit:

$$(16) \quad \begin{cases} \alpha q''(s_0) = 3\sqrt{2} q'^2(s_0), \\ \alpha q''(\bar{s}_0) = 3\sqrt{2} q'^2(\bar{s}_0). \end{cases}$$

Nun erhält man durch Differentiation aus (7)

$$q''(s) + q''(\bar{s}) \bar{s}'^3 + 2q'(\bar{s}) \bar{s}' \bar{s}'' = 0.$$

Ferner errechnet man aus (7), (11) und (15)

$$\bar{s}'' = \frac{3q^2(s)q'(s)}{\alpha q(\bar{s})},$$

so daß nach (16) in einem (12) entsprechenden Punkte sein muß:

$$(17) \quad q'^2(s_0) + q'^2(\bar{s}_0) + 2\alpha q'(s_0) q'(\bar{s}_0) = 0.$$

¹⁶⁾ (B), S. 10 (47).

Da nun aus (7) und (15)

$$(18) \quad q^6(s)q'(\bar{s}) + q^6(\bar{s})q'(s) = 0$$

folgt, so muß nach (15) und (17) in einem solchen speziellen Punkte sein:

$$2q'^2(s_0)(1 - \alpha) = 0.$$

Der Wert der Konstanten α ist aber von der zugrunde gelegten Maßeinheit abhängig. Somit muß

$$q'(s_0) = q'(\bar{s}_0) = 0$$

sein. Dann folgt aus (16)

$$q''(s_0) = q''(\bar{s}_0) = 0$$

und durch sukzessives Differentiieren der aus (14) und (15) hervorgehenden Gleichung, sowie von (18) für alle $\nu = 1, 2, 3, \dots$

$$(19) \quad q^{(\nu)}(s_0) = q^{(\nu)}(\bar{s}_0) = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots).$$

Dann aber muß überall auf E (12) bestehen; E müßte also im Widerspruch zu unserer Annahme eine Ellipse sein, w. z. b. w.

Folgender Satz, dessen Analogon in der elementaren Differentialgeometrie ich a. a. O. beweisen werde, ist eine Folge des soeben bewiesenen Satzes:

Enthält ein Eikörper K in seinem Innern einen Punkt P von der Art, daß alle P enthaltenden Schnittovale Eilinien mit affinen Doppelnormalen sind, so ist K ein Ellipsoid.

Da nämlich die Schnittovale sämtlich nach dem Obigen Ellipsen sein müssen, erlaubt ein Satz von Herrn T. Kubota¹⁷⁾ den Schluß, daß K ein Ellipsoid ist.

Kagoshima, April 1925.

¹⁷⁾ Einfache Beweise eines Satzes über die konvexe, geschlossene Fläche; Science Reports of the Tôhoku Univ. 3 (1914), S. 235 ff., Kap. III und IV, woraus sich eine Erweiterung des obigen Satzes entnehmen läßt.

(Eingegangen am 14. 7. 1925.)