Die Wiederholung des Michelson-Versuchs und die Relativitätstheorie.

Von

D. van Dantzig in Amsterdam.

§ 1.

Einleitung.

In ihren Mitteilungen[1]) über die erste Wiederholung des im Jahre 1881 zum erstenmal ausgeführten, aber damals auf eine falsche Rechnung gegründeten Michelson-Versuches[2]) berichteten A. A. Michelson und E. W. Morley 1887: „Nur die Bewegung der Erde in ihrer Bahn in Betracht ziehend . . . zeigen die Wahrnehmungen, daß die Relativgeschwindigkeit der Erde und des Äthers wahrscheinlich kleiner ist als ein Sechstel der Bahngeschwindigkeit der Erde und gewiß kleiner als ein Viertel.“ Seitdem wurde dieses Ergebnis durchweg als ein negatives betrachtet. Später ist der Versuch von E. W. Morley und D. C. Miller wiederholt worden (1904—1906)[3]), und, nachdem Erstgenannter gestorben war, von Miller allein in den Jahren 1921, 1924 und 1925[4]). Im Anschluß an eine Bemerkung von Michelson und Morley[5]) wurden die späteren Beobachtungen auf dem Mount-Wilson gemacht.

Das bekannte Michelsonsche Interferometer wurde einer kontinuierlichen Drehung in der Horizontalebene unterzogen, die durchschnittlich in etwa einer Minute ausgeführt wurde. Während dessen wurde ununterbrochen die Lage der Interferenzstreifen wahrgenommen. Gearbeitet wurde bei verschiedenen Tages- und Jahreszeiten, wobei besondere Maßnahmen

---

1) Amer. Journ. of Science **34** (1887), S. 333; Phil. Mag. **24** (1887), S. 444.

2) Amer. Journ. of Science 22 (1881), S. 120.

3) Phil. Mag. 8 (1904), S. 753; **9** (1905), S. 619, 680; Proc. Nat. Acad. Sc. **41** (1905), S. 321.

4) Phys. Rev. **19** (1922), S. 407.

5) Amer. Journ. of Science **24**, S. 341.

getroffen wurden, um die magnetischen und thermischen Einflüsse zu eliminieren. Im Gegensatz zu den früheren Resultaten wurde *eine deutliche Verschiebung der Interferenzstreifen wahrgenommen.* In Fig. 1, die Millers Abhandlung in der National Academy of Sciences[6]) entnommen ist, stellen die Pfeile der Größe und Richtung nach die maximale Verschiebung der Streifen, bzw. das zu diesem Maximum gehörige Azimuth im Laufe eines Sterntages dar. (Die Zeitpunkte sind in siderischer Zeit angegeben.) Insbesondere zeigte sich eine ziemlich gute Übereinstimmung dieser Versuche (vom April 1925) mit denen vom April 1921, obwohl sie auf einem anderen Berg, mit einem anderen Beleuchtungs- und Wahrnehmungssystem und mit einem seitdem völlig umgebauten Interferometer gemacht worden sind.

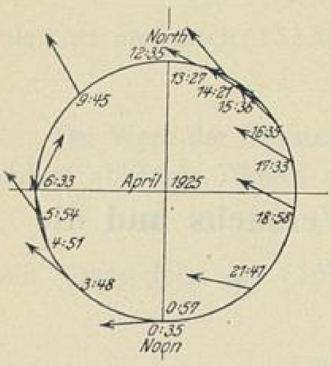

Fig. 1.

In England und Amerika haben diese Ergebnisse, die Miller in den Worten: „The ether-drift experiments at Mount-Wilson during the years 1921 to 1925 *lead to the conclusion that there is a relative motion of the earth and the ether at the Observatory of approximately nine kilometers per second*, being about one third of the orbital velocity of the earth"[7]) zusammenfaßt, großes Aufsehen erregt. Dr. Ludvik Silberstein haben sie z. B. zu den Worten „. . . knock out the relativity theory radically . . ." und zum Versuche ihrer Deutung auf Grund der Äthertheorie von Stokes, Planck und Silberstein[8]) veranlaßt[9]).

Der Zweck der vorliegenden Abhandlung ist: zu zeigen, daß der Miller-Effekt einen Rückgang zur klassischen Äthertheorie keineswegs notwendig oder wünschenswert macht, und die diesbezüglichen Betrachtungen, die der Verfasser in seiner vorläufigen Mitteilung in Nature[10]) niedergelegt hat, eingehender durchzuführen. Am Schluß der Abhandlung werden einige der wichtigsten Bedenken gegen die Experimente erwähnt werden, wobei sich herausstellen wird, daß ernster Zweifel an ihrer Richtigkeit keineswegs unberechtigt ist. Nichtsdestoweniger möchte es von Interesse

---

[6]) D. C. Miller, „Ether-Drift Experiments at Mount-Wilson", Proc. Nat. Acad. Science **11** (Juni 1925), S. 306. Eine kurze Übersicht findet man in Nature **116** (11. Juli 1925), S. 29.

[7]) Proc. Nat. Acad. of Science **11**, S. 314.

[8]) L. Silberstein, Phil. Mag. **39** (1920), S. 161.

[9]) Nature **115** (23. Mai 1925), S. 798.

[10]) D. van Dantzig, „The Miller Effect and Relativity", Nature **116** (26. Sept. 1925), S. 465.

sein, jetzt schon zu untersuchen, welchen Einfluß der Miller-Effekt auf die R.-T. haben würde, wenn er vielleicht dennoch sichergestellt würde. Vorläufig wollen wir also annehmen, daß dies tatsächlich geschehen sei, d. h. daß sich von experimentalphysikalischer Seite keinerlei Beobachtungsfehler aufweisen lassen, so daß die gefundenen Resultate vollwertig in den Naturgesetzen berücksichtigt werden müssen.

§ 2.

Über die Grundlagen der R.-T.

Zuerst wollen wir bemerken, daß das Grundprinzip der allgemeinen R.-T.: „Ein Naturgesetz ist invariant beliebigen topologischen (d. h. ein-eindeutigen stetigen) Transformationen gegenüber“ von keinem einzigen Experiment beeinträchtigt werden kann, und also nach Hermann Weyl[11]) ein rein formales Prinzip darstellt[12]). Die Bedeutung dieses Prinzips wird besonders dadurch erhellt, daß man nach Prof. G. Mannoury[13]) das Problem des Aufbaus der Physik gänzlich auf psychische Inhalte zurückführt. Ein derartiger Aufbau möge im folgenden kurz skizziert werden, wobei wir, der Kürze halber, auf vollkommene Strenge der Darstellung und Aufzählung sämtlicher Voraussetzungen verzichten müssen.

Der Möglichkeit einer Physik, sowie einer jeden „exakten“ oder wenigstens „konkreten“ Wissenschaft, liegt die — im Sinne Vaihingers[14]) „fiktive“ — Möglichkeit zugrunde, die kontinuierliche Wirklichkeit in eine Menge diskreter Elemente aufzulösen, die mittels irgendeines Symbols (z. B. Wortes, Zeichens) angegeben werden können: das ist aber nichts anderes als die Möglichkeit der Sprache überhaupt[15]). Die Elemente dieser Menge nennen wir „Weltpunkte“. Sodann muß die Möglichkeit postuliert werden, gewisse Teilmengen mittels besonderer Symbole zusammenzufassen. Und zwar soll einerseits eine Menge bestimmter Teilmengen mittels je

---

[11]) „Massenträgheit und Kosmos“, Die Naturwissenschaften **12** (1924), S. 197. Wieder abgedruckt in „Was ist Materie?“ S. 61. Berlin: Julius Springer 1924.

[12]) Diese Auffassung wird in der letzten Zeit ziemlich allgemein vertreten, u. a. von Prof. Einstein, wie dieser dem Verfasser Dezember 1924 nach Kenntnisnahme vorliegender Abhandlung brieflich mitteilte. Vgl. auch die in Fußnote [22]) genannte Abhandlung.

[13]) U. a. in seinen an der Amsterdamer Universität in den Jahren 1920—1921 gehaltenen Vorlesungen.

[14]) Hans Vaihinger, „Die Philosophie des Als-Ob“. Berlin: Reuthen & Reichard, 2. Aufl., 1913.

[15]) Das Wort „Sprache“ ist im allgemeinsten Sinne gemeint. Vgl. z. B. Fritz Mauthner „Beiträge zu einer Kritik der Sprache“. Erster Band: „Zur Sprache und zur Psychologie“. Stuttgart und Berlin: J. G. Cotta, 2. Aufl. 1906, S. 3 ff.

einer „Identitätsrelation“ (die dem psychischen Phänomen der Wiedererkennung entnommen ist und aussagt, daß die Weltpunkte zum selben „Etwas“, z. B. zum „selben“ wahrgenommenen Dinge gehören), andererseits eine Menge bestimmter Teilmengen mittels je einer „Koinzidenzrelation“ (die aussagt, daß die zu einer Teilmenge gehörigen Weltpunkte in physikalischem Sinne „zusammenfallen“) herausgehoben werden. Die Teilmengen erster Art wollen wir vorläufig A-Mengen, diejenigen zweiter Art „Punktereignisse“ oder „Weltknoten“ nennen. Sodann soll eine bestimmte A-Menge als „Ich-Menge“ herausgegriffen und auf Grund der psychisch gegebenen (Eigen-) „Zeitrelation“ linear geordnet werden. Achten wir auf die Tatsache, daß ein Individuum sein „Zeitgefühl“ („Kopfuhr“) auf die Welt überträgt, indem es ein beliebiges Punktereignis mit einem Moment seiner Lebenslinie (— eventuell nach „fiktiver“ Verlängerung —) korrespondieren läßt, so läßt sich in einem System von Postulaten ausdrücken, daß jedes Punktereignis mittels „zur betrachteten Ich-Menge gehörigen Gleichzeitigkeitsrelationen“ auf einen und nur einen Weltpunkte der Ich-Menge abgebildet wird, solchermaßen, daß jede A-Menge ebenfalls als eine linear geordnete Menge erscheint, die wir „Weltlinie“ nennen wollen. Dabei wird gefordert, daß niemals eine geschlossene Kette von (von Weltknoten verbundenen) Weltlinien zyklisch geordnet sein soll. Bequemlichkeitshalber nehmen wir weiter an, die in dieser Weise konstruierte Menge sei zu einem vierdimensionalen Kontinuum ergänzt, in dem die Weltlinien als stetige Kurven erscheinen, und das eineindeutig auf ein beliebiges stetiges Koordinatensystem bezogen ist[16]).

Jede Axiomatisierung der Physik[17]) läßt sich in der angedeuteten Weise lediglich auf die Fundamentalbegriffe „Element“ (oder „Einheit“ oder „Ding“ usw.) und „Relation“ zurückführen. Darin spricht sich die schöne Bemerkung Henri Poincarés[18]) aus, *daß die Welt nur bis auf eine topologische Transformation definiert ist*, das heißt: Es ist möglich, das Weltgeschehen in solchen Worten wiederzugeben, daß eine topologische

---

[16]) Eine ähnliche Betrachtung wird in physikalischer Sprache von Professor H. A. Lorentz geführt in der Einleitung von: „De bepaling van het g-veld in de algemeene relativiteitstheorie met behulp van de wereldlijnen van lichtsignalen en stoffelijke punten, met eenige opmerkingen over de lengte van staven en den duur van tijdsintervallen en over de theorieën van Weyl en Eddington“, Verslagen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam **32** (1923), S. 383. Eine englische Übersetzung wird nächstens in den Proceedings of the Koninklijke Akademie van Wetenschappen veröffentlicht werden.

[17]) Z. B. H. Reichenbach, „Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre“. Braunschweig: Vieweg & Sohn 1924.

[18]) Vgl. z. B. „La Science et l'Hypothèse“. Paris: Flammarion 1906, S. 84 ff. Chap. 4 und „Science et Méthode“, ibidem 1913, S. 101 ff. (Livre II, Chap. I, § 1).

Transformation niemals eine „richtige“ Beschreibung eines Ereignisses in eine „falsche“ verwandeln kann.

Die obigen Betrachtungen gestatten uns, den möglichen Einwand abzulehnen, die vor-relativistische Lage sei mit einem positiven Ergebnisse des Michelson-Versuches wieder eingetreten, und es sei deshalb jeder Grund zur Betrachtung von topologischen Transformationen der Welt in sich hinfällig geworden. Im Gegenteil: wir dürfen jetzt *unabhängig vom speziellen Ergebnis jedes Experimentes* die Grundlage der allgemeinen R.-T. und den ganzen Rechenapparat des Tensorkalküls übernehmen.

§ 3.

Was entscheidet der Michelson-Versuch?

Soweit wir uns auf den Miller-Effekt verlassen können, zeigt dieser uns durchaus nichts über die etwaige „Existenz“ eines „Äthers“ oder über irgendeine Translation der Erde, wie Miller meint[19]), sondern nicht mehr und nicht weniger als die Tatsache, daß sich bei einer Drehung des Interferometers „etwas ändert“, daß also *eine starre Drehung* (d. h. eine Drehung, die die starren Körper invariant läßt) *die Lichtbahnen nicht invariant läßt.* Verstehen wir unter Isotropie Invarianz gegenüber einer Drehungsgruppe, dann zeigt er uns also, daß Isotropie des Feldes und Isotropie der Lichtbahnen nicht äquivalent sind. *Es werden also zweierlei Metriken definiert,* nämlich diejenigen, die zu den starren Drehungen, und diejenigen, die zu den „lichtgeometrischen Drehungen“ gehören, d. h. den Drehungen („mit Formänderung“ der starren Körper), die den Lichtkegel, also die sich ausbreitende Wellenfläche, invariant lassen. Obwohl die R.-T. sich in ihrer heutigen Form auf die Identität dieser beiden Transformationsgruppen stützt, ist dieser Punkt nicht von entscheidender Bedeutung für die Theorie: von allgemein relativistischem Standpunkt betrachtet, bleibt die Möglichkeit offen, daß Lichtbewegung von raschester Bewegung verschieden sein kann.

Während bei negativem Ergebnisse des Michelson-Versuches die beiden vorgenannten Drehungsgruppen identifiziert werden können, werden zur Beschreibung der physischen Phänomene *einschließlich des Miller-Effektes* wenigstens zwei symmetrische Tensoren erforderlich (außer dem elektromagnetischen Potentialvektor φ_i), nämlich der „starrgeometrische Tensor“ $dS^2 = s_{ik}\,dx^i dx^k$ und der „lichtgeometrische Tensor“ $dL^2 = l_{ik}\,dx^i dx^k$, die zusammen die Rolle des alten metrischen Tensors $ds^2 = g_{ik}\,dx^i dx^k$ übernehmen und nur wenig voneinander differieren. Den starrgeometrischen Tensor dS^2 identifizieren wir mit dem Gravitationstensor $dG^2 = g_{ik}\,dx^i dx^k$

[19]) a. a. O., vgl. [7]).

und zwar deshalb, weil der Begriff des starren Körpers tautologisch vom Begriffe des Führungsfeldes abhängig ist. Der Begriff des starren Körpers ist nämlich sekundär gegen den Begriff „Bewegung der starren Körper" und dieser läßt sich nur definieren, wenn der Begriff der „zwanghaften Führung"[20]) schon bekannt ist. Wir benützen also zur Beschreibung der physischen Erscheinungen drei Tensorfelder: ein Gravitations- oder starrgeometrisches Feld $g_{ik} = s_{ik}$, ein elektromagnetisches Potentialfeld φ_i und ein lichtgeometrisches Feld oder elektromagnetisches Führungsfeld l_{ik}. Es ist übrigens eine große Schwierigkeit, daß bei jeder Vermehrung der Grundtensoren die Anzahl der Simultaninvarianten schnell zunimmt, so daß die Naturgesetze immer komplizierter werden. Wenn sich aber der Miller-Effekt als richtig erweist, so können wir unmöglich diese weitere Komplikation vermeiden; mögen wir also schon jetzt untersuchen, zu welchen Konsequenzen sie führt.

Durch die Wahl eines genügend kleinen Weltstückes können wir bekanntlich erreichen, daß der Lichtkegel

$$dL^2 = l_{ik}\,dx^i\,dx^k = 0 \tag{1}$$

innerhalb dieser Umgebung konstante Koeffizienten besitzt. Dies bedeutet, daß wir die sich ausbreitenden Wellenflächen, die sich nur wenig von starren Kugeln unterscheiden, in einem genügend kleinen Gebiete, wie auch ihre „genaue" Gestalt sein möge, immer durch homothetische quadratische Flächen approximieren können. Wir schreiben dann die Gleichung des vom Punkte $x^0 = x^1 = x^2 = x^3 = 0$ ausgehenden Lichtkegels in der Form

$$L^2 = l_{ik}\,x^i\,x^k = 0 \tag{2}$$

und verabreden dabei, daß, wie üblich, über zweifach vorkommenden Indizes summiert wird, und zwar bei lateinischen Indizes über die Ziffern 0, 1, 2 und 3, bei griechischen hingegen nur über die Ziffern 1, 2 und 3. Wir nehmen jetzt zwei räumliche senkrechte Einheitsvektoren, α^ϱ bzw. β^ϱ, die also den Bedingungen $g_{\varrho\sigma}\alpha^\varrho\alpha^\sigma = g_{\varrho\sigma}\beta^\varrho\beta^\sigma = 1$, $g_{\varrho\sigma}\alpha^\varrho\beta^\sigma = 0$ genügen und legen an diese Vektoren die Arme des Michelsonschen Inferometers (Längen a bzw. b) heran. Eine einfache Rechnung zeigt, daß die Verschiebung der Interferenzstreifen bei einer Drehung um 90° in der Ebene von α^ϱ und β^ϱ

$$d = \frac{2(a+b)}{l_{00}}\left\{\sqrt{(l_{0\varrho}\alpha^\varrho)^2 - l_{00}\cdot l_{\varrho\sigma}\alpha^\varrho\alpha^\sigma} - \sqrt{(l_{0\varrho}\beta^\varrho)^2 - l_{00}\,l_{\varrho\sigma}\beta^\varrho\beta^\sigma}\right\}$$

ist, oder wenn wir $l_{00} = c^2$, $l_{0\varrho} = c\,q_\varrho$ und $l_{\varrho\sigma} = -g_{\varrho\sigma} - r_{\varrho\sigma}$ setzen, und

[20]) Vgl. Hermann Weyl, „Raum, Zeit, Materie". Berlin: Julius Springer, 5. Aufl. 1923, S. 220; 4. Aufl. 1920, S. 200. Falls weiter nichts bemerkt wird, wird immer nach der 5. Aufl. zitiert.

beachten, daß die eingeklammerte Größe höchstens von der Ordnung $10^{-8}\,c^2$, also q_ϱ von der Ordnung 10^{-4} und $r_{\varrho\sigma}$ von der Ordnung 10^{-8} sein kann, und bis auf Größen höherer Ordnung entwickeln,

$$(3)\qquad d=(a+b)\{r_{\varrho\sigma}\alpha^\varrho\alpha^\sigma+(q_\varrho\alpha^\varrho)^2-r_{\varrho\sigma}\beta^\varrho\beta^\sigma-(q_\varrho\beta^\varrho)^2\}.$$

Wir haben hier „die" Lichtgeschwindigkeit c eingeführt, aber müssen dabei beachten, daß diese, für sich betrachtet, keinen Sinn mehr hat, indem sie nicht in allen Richtungen den gleichen Wert hat. Die Zahl c kann daher nur einen Mittelwert bedeuten und bleibt bis auf einen multiplikativen Faktor (der in der Größenordnung 10^{-8} von Eins differiert) unbestimmt. In diesem Zusammenhang sei hervorgehoben, daß der relative Fehler bei den letzten direkten Messungen der Lichtgeschwindigkeit bedeutend größer, nämlich von der Ordnung 10^{-4} ist[21]), so daß eine Festsetzung dieses Faktors jeden physikalischen Sinnes bar ist.

Die Millerschen Experimente sind bisher nur auf die eingliedrige Drehungsgruppe in der Horizontalebene, noch nicht auf die dreigliedrige Gruppe im Raume bezogen worden. Wäre dies der Fall, dann ließen sich aus der Gleichung (3) mittels einer genügenden Anzahl von Messungen die q_α und $r_{\alpha\beta}$ bestimmen (die q_α aber nur bis auf das Vorzeichen). Es wäre also die Bestimmung der l_{ik} auf diejenige der g_{ik} zurückgeführt. Zwecks späterer Betrachtungen wollen wir die Gleichung (3) noch etwas näher ausarbeiten. Beziehen wir uns auf ein orthogonales Koordinatensystem, in dem die x^1- und x^2-Achse die Horizontalebene enthalten, und setzen wir

$$\alpha^\varrho=(\cos\varphi,\,\sin\varphi,\,0)\quad\text{und}\quad\beta^\varrho=(-\sin\varphi,\,\cos\varphi,\,0),$$

indem der Apparat also in demselben Sinne gedreht wird, in dem φ wächst, so wird

$$(4)\qquad d=(a+b)\{(q_1^2+r_{11}-q_2^2-r_{22})\cos 2\varphi+(q_1 q_2+r_{12})\sin 2\varphi\}.$$

Setzen wir weiter

$$(5)\qquad q_1^2+r_{11}-q_2^2-r_{22}=S\cdot\cos\omega;\quad q_1 q_2+r_{12}=S\cdot\sin\omega,$$

so wird

$$(6)\qquad d=(a+b)\cdot S\cdot\cos(\omega-2\varphi).$$

Es erreicht also d seinen Maximalwert $d_{\max}=D$ für das Azimuth $\varphi_M=\frac{1}{2}\omega$ und es ist $D=(a+b)\cdot S$.

---

[21]) A. A. Michelson, „New Measurement of the Velocity of Light", Nature **116** (1924), S. 831. Gefunden wurde der Wert 299·820 ± 30 km/sek. Michelson hofft, die Genauigkeit bis zum 4- oder 5-fachen steigern zu können.

Bis heute sind nur Daten bezüglich der Extremalmessungen, also S und ω, veröffentlicht worden. Daraus allein lassen sich selbstverständlich die q_α und $r_{\alpha\beta}$ nicht bestimmen. Insbesondere fallen die beiden Voraussetzungen $q_\alpha = 0$ oder $r_{\alpha\beta} = 0$ in den Bereich des Möglichen. Die erste Hypothese, die aussagt, daß die Lichtausbreitung in gleichförmigen Ellipsoiden stattfindet[22]), deren Mittelpunkte in einem relativ zur Lichtquelle ruhenden räumlichen Punkte zusammenfallen, gibt, wenn die Koordinatenachsen in die Richtungen der Hauptachsen der von der Horizontalebene abgeschnittenen Ellipse (Längen $l + R_1$, bzw. $l + R_2$) gelegt werden:

$$D = \frac{1}{2}(a+b)(R_1 - R_2).$$

Die zweite Voraussetzung hingegen, die aussagt, daß die Lichtwellen Kugelflächen mit gleichförmig zur Quelle bewegtem Mittelpunkte durchlaufen und also mit der klassischen Ätherhypothese identisch ist, gibt, wenn $q_1 = q_2 = 0$ gesetzt wird, die Bewegungsrichtung also zur x^1-Achse parallel gewählt wird,

$$D = (a+b)q_1^2.$$

Dabei entscheidet die klassische Äthertheorie über den obengenannten Proportionalitätsfaktor in dem Sinne, daß $c^2 = c_0^2(1 - q_1^2/c_0^2)$ gesetzt wird, wo c_0 die Lichtgeschwindigkeit „relativ zum Äther" ist. Vorläufig haben wir aber noch durchaus keine Veranlassung, anzunehmen — wie Miller tut, indem er sich auf den Standpunkt der klassischen Theorie stellt — daß die q_α von der Ordnung 10^{-4}, die $r_{\alpha\beta}$ dagegen von der Ordnung 10^{-12} oder noch kleiner seien, was zur Begründung der Ätherhypothese notwendig wäre.

§ 4.

Die Ätherfrage.

Nehmen wir jetzt an, die Koeffizienten der quadratischen Form seien bestimmt, ohne vorauszusetzen, daß irgendeine kleiner wäre als notwendig ist — die q_α und die $r_{\alpha\beta}$ seien also von der Ordnung 10^{-4} bzw. 10^{-8} —, dann können wir jedenfalls sagen, daß bei sichergestelltem Miller-Effekte der Gültigkeitsbereich der Maxwellschen Gleichungen mit Bezug auf ein starres Koordinatensystem nicht über die Grenze 10^{-8} hinausragen würde.

---

[22]) Schon 1923 hat N. von Raschevsky in einer sehr lesenswerten Abhandlung, die dem Verf. erst nach Abschluß der vorliegenden Schrift bekannt wurde, die Möglichkeit einer Lichtausbreitung in konzentrischen Ellipsoiden erwähnt („Kritische Untersuchungen zu den physikalischen Grundlagen der R.-T.", Zeitschr. f. Phys. **14** (1923), S. 107–149). R. benutzt aber nur Rotationsellipsoide und führt sie in anderem Zusammenhange und zu einem anderen Zweck ein als hier geschehen ist.

Es wäre dann zu untersuchen, ob die anderen Versuche, die einen Effekt von der zweiten Ordnung nachweisen könnten, z. B. der Trouton-Noblesche, bei Wiederholung immer noch ein deutlich „negatives" Resultat zeigen, was allerdings eine schwer zu lösende Diskrepanz hervorbringen würde [23]). Nach der Bestimmung des Lichtkegels wäre die Frage übrigens in ihr kosmologisches Stadium getreten. Es wäre dann — aber auch erst dann! — zu untersuchen, ob sich irgendwelcher Zusammenhang finden ließe zwischen Richtung und Größe der Achsen des Ellipsoids und des Vektors q_a einerseits und der Massenverteilung im Weltall bzw. deren Änderung relativ zur Erde im Laufe der Zeit andererseits. Dabei müssen wir der wichtigen Bemerkung Hermann Weyls [24]) Rechnung tragen, nach der es möglich ist, alle getrennten Körper in der Welt mittels einer topologischen Transformation simultan auf Ruhe zu transformieren, so daß es keinen topologisch invarianten Sinn hat, von relativer Bewegung getrennter Körper, z. B. der Erde und der Sternmassen, zu reden. Eine Bewegung der Erde relativ zu den Weltmassen hat folglich nur insofern empirische Bedeutung, als sie die zeitliche Änderung der Beziehungen zwischen der Erde und dem Felde in ihrer unmittelbaren Umgebung, dem „Sternenkompasse", darstellt.

Sind die q_a wirklich von der Ordnung 10^{-4}, dann definiert der Miller-Effekt einen Vektor q_a, den man „Äthergeschwindigkeit" nennen kann. Hier müssen wir uns der relativistischen Physik besonders dankbar zeigen für den von ihr eingeführten Begriff des metrischen (und zwar lichtgeometrischen) Feldes, der imstande ist, *den alten Äther als Träger der Lichtwellen und anderer elektromagnetischer Phänomene zu ersetzen*, so daß er vortrefflich geeignet erscheint, den „Ätherismus" mit dem „Non-Ätherismus" zu versöhnen. Wenn wir aber auf Grund des Miller-Effektes eine Äthertheorie aufstellen, d. h. den Effekt in der Sprache der klassischen Äthertheorie beschreiben wollen, so müssen wir darauf achten, daß nur noch der Begriff „Äthergeschwindigkeit", nämlich das Vektorfeld, *nicht aber noch der Begriff des Äthers selbst* einen physikalischen Sinn erhalten hat. Es läßt sich aber ein *beliebiges* Vektorfeld als Geschwindigkeitsfeld irgendeiner hypothetischen „materieartigen" Substanz deuten, deren physikalische Charaktere, wie Zusammendrückbarkeit, Elastizität usw., aus

[23]) Dieser Versuch ist inzwischen tatsächlich wiederholt worden, und zwar von R. Tomaschek auf dem Jungfraujoch, wie dieser in einer nach Abschluß dieses Aufsatzes veröffentlichten Abhandlung mitteilt [Annal. d. Phys. (4) **78** (1925), S. 743—756]. Weil T. keinen positiven Effekt hat beobachten können, ist die im Text erwähnte Unstimmigkeit tatsächlich entstanden, wie auch T. l. c. S. 755 bemerkt.

[24]) Am unter [13]) angeführten Ort, S. 198 bzw. S. 62. Vgl. auch „Raum, Zeit, Materie", S. 268.

der etwaigen Existenz eines zugehörigen Divergenz- bzw. Spannungsfeldes abgelesen werden können. Obwohl streng genommen eine ausgedehnte „gewöhnliche“ Flüssigkeitsmasse letzten Endes auch mittels ihres Geschwindigkeitsfeldes — genauer: ihres Mitführungsfeldes schwimmender Körper — definiert ist, so bleibt dennoch die „Äthersubstanz“ in anderem Sinne hypothetisch als z. B. die Wassersubstanz, weil der Unterschied substanzerfüllter und substanzleerer Raumteile bei einer Flüssigkeitsmasse direkt der Anschauung entnommen werden kann, im Falle des Äthers aber durchaus keinen physikalischen Sinn besitzt. In diesem, aber auch nur in diesem Sinne kann der Begriff eines substantiellen Äthers eine hypothetische physikalische Realität erhalten.

Der klassischen Äthertheorie kann eben die Existenz des genannten Vektorfeldes nur nützen, falls die $r_{\alpha\beta}$ gleich Null sind. Selbst dann aber wäre das Vektorfeld nur noch definiert in der Umgebung der Erde; es ließe sich noch in einer beliebigen Weise über den ganzen Raum ausbreiten; nur eine petitio principii könnte dazu führen, dieses Feld lediglich aus einer Relativbewegung der Erde mit Bezug auf die Weltmassen zu erklären. Wenn auch in experimenteller Hinsicht die prärelativistische Lage wieder eingetreten wäre, wo das „negative“ Michelson-Resultat noch nicht seine erschütternde Wirkung ausgeübt hatte, *so wäre dennoch die klassische Äthervorstellung nicht mehr aufrechtzuerhalten, auf Grund der neugewonnenen Einsichten in die Grundlagen der Physik, die vor allem eine Verschärfung des Begriffes des physikalischen Definiertseins und einen engeren Anschluß an das rein Empirische bedeuten.*

§ 5.

Die physikalische Bedeutung der Riemannschen Metrik.

Wie wir oben sahen, lehrt uns der Miller-Effekt den Zusammenhang kennen zwischen den l_{ik} und g_{ik}. Weil der Lichtkegel sich nicht mit genügender Genauigkeit direkt bestimmen läßt, sind wir gezwungen, die g_{ik} aus den Gravitationserscheinungen allein, ohne Zuhilfenahme der Lichtbahnen, zu bestimmen. Es sei zu diesem Zweck die Welt auf ein beliebiges Gaußisches Koordinatensystem $x^0 x^1 x^2 x^3$ bezogen, in dem die („möglichen“ und „wirklichen“) Führungslinien — d. h. die Weltlinien sich kräftefrei bewegender materieller Punkte — empirisch bestimmt und durch die Gleichungen

$$x^i = \vartheta^i(t, c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 c_7 c_8) \tag{7}$$

dargestellt sein mögen, wo t irgendein auf jeder Führungslinie zweimal stetig differenzierbarer Parameter ist, solchermaßen, daß für jeden Wert von t die Punkte x^i ein dreidimensionales Kontinuum bilden. Dabei soll der Begriff „kräftefrei" empirisch definiert sein durch die Angabe bestimmter Bewegungen, wobei wir wie üblich die Gravitations- und Zentrifugalkräfte nicht als Kräfte in diesem Sinne ansehen wollen. Anstatt mit den Gleichungen (7) können wir auch mit den Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \varphi^i\left(x^0 x^1 x^2 x^3 \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^2}{dt} \frac{dx^3}{dt} t\right) \tag{8}$$

operieren. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Führungslinien die Extremalen des Integrals $I = \int L\, dt$ sind, ist bekanntlich die Existenz einer Lösung $L(x^i \dot{x}^i) = L\left(x^0 x^1 x^2 x^3 \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^2}{dt} \frac{dx^3}{dt}\right)$ des simultanen Systems partieller Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \varphi^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial x^j} \dot{x}^j - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0. \tag{9}$$

Die Frage, ob die Welt eine Maßbestimmung gestattet, solchermaßen, daß die Führungslinien geodätische Linien werden, ist also empirisch zu lösen: dies ist dann und nur dann der Fall, wenn die empirisch bestimmten Funktionen φ^i die Eigenschaft haben, daß sie die Integrabilitätsbedingungen der Gleichungen (9) identisch erfüllen. Wird diesen Bedingungen genügt, dann kann jede Lösung L von (9) als Maßfunktion dienen; *jede Lösung definiert eine mögliche Metrik.* Diese Metrik hat insbesondere die spezielle Riemannsche Gestalt $L = \frac{dG}{dt}$, wo dG^2 eine nichtentartete quadratische Differentialform ist, dann und nur dann, wenn sich für jede Führungslinie ein solcher Parameter G finden läßt, daß die Gleichungen (8) durch Transformation auf diesen Parameter die spezielle Gestalt

$$\frac{d^2 x^i}{dG^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dG} \frac{dx^k}{dG} = 0 \tag{10}$$

erhalten, indem die Funktionen $\Gamma^i_{jk}(x^r)$ überdies gewissen Integrabilitätsbedingungen genügen, die von L. P. Eisenhart und O. Veblen aufgestellt worden sind[25]. Für den Fall des gravitationsfreien Feldes, der sich durch die Gleichungen $\frac{d^2 x^i}{dG^2} = 0$, also $\varphi^i = 0$ auszeichnet, erhalten wir z. B. als allgemeinste Maßfunktion

$$L = F_1\left(\frac{dx^0}{dG} \frac{dx^1}{dG} \frac{dx^2}{dG} \frac{dx^3}{dG}\right) + \frac{dx^i}{dG} \frac{\partial}{\partial x^i} F_2(x^0 x^1 x^2 x^3),$$

wo F_1 und F_2 beliebige Funktionen ihrer Argumente sind. Durch Spezia-

[25] „The Riemann Geometry and its Generalization", Proc. Nat. Ac. Sc. 8 (1922), S. 19–23.

lisierung findet man bekanntlich, daß im gravitationsfreien Felde eine Riemannsche Metrik existiert mit konstanten g_{ik}.

Falls die Welt eine Riemannsche Metrik gestattet, lassen sich die g_{ik} aus den Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x^i} g_{kl} = \Gamma^r_{ik} g_{rl} + \Gamma^r_{il} g_{rk}$$

mit höchstens zehn Konstanten $f_1 \ldots f_{10}$ bestimmen. *Hiermit ist also die Frage nach der Möglichkeit einer Weltmetrik vollständig auf experimentell lösbare Probleme zurückgeführt.* Vollständig bestimmt ist jedoch die Metrik noch nicht, solange die Konstanten noch nicht bestimmt sind. Es entsteht also jetzt die Frage, wie diese Festsetzung der Konstanten möglich ist. Bekanntlich genügt es dazu, die Zahlenwerte der g_{ik} in einem beliebig vorgegebenen Weltpunkte zu bestimmen. Nun wissen wir, daß in einem genügend kleinen Gebiete die $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} = (1,\ \alpha = \beta;\ 0, \alpha \neq \beta)$ sind, mit Bezug auf ein starrgeometrisch-orthogonales Koordinatensystem. Weil wir außerdem die Welt wenigstens mit großer Annäherung als statisch betrachten können, können wir die $g_{0\alpha}$ gleich Null setzen, so daß nur noch g_{00} unbestimmt bleibt. Zur Bestimmung dieser letzten Größe ist dem Verfasser keine einzige Möglichkeit bekannt. Der Miller-Effekt bietet kein Mittel dazu, weil darin nur die räumlichen Komponenten der g_{ik} auftreten. Die Perihelbewegung des Merkurs gestattet uns, die $g_{\alpha\beta}$ mit größerer Genauigkeit zu bestimmen als es die irdischen Wahrnehmungen ermöglichen; g_{00} tritt aber auch in diesem Effekt nicht auf. Die Lichtbahnkrümmung im Gravitationsfelde soll jetzt nicht mehr auf Grund der g_{ik}, sondern der l_{ik} berechnet werden, diese liefert uns also, ähnlich wie der Miller-Effekt auf der Erde, ein Mittel, etwas über das gegenseitige Verhalten dieser beiden Tensoren in der Nähe der Sonne usw. zu erfahren. Von den g_{ik} treten aber auch hier nur die räumlichen Komponenten auf. Schließlich sind bisher noch niemals Gravitationswellen beobachtet worden; wäre dies wohl der Fall, so könnte man aus ihrer Geschwindigkeit sofort den Wert von g_{00} bestimmen. Die Annahme, daß diese Geschwindigkeit derjenigen des Lichtes gleich sein soll, hat natürlich nur dann einen Sinn, wenn die g_{ik} und l_{ik} identisch sind, wie in der bisherigen R.-T. Der Annahme, daß z. B. g_{00} gleich Null oder wenigstens sehr klein gegenüber l_{00} sein soll, kann man nur die rein formale Forderung entgegenhalten, daß die Riemannsche Fundamentalform nicht ausarten soll. Physikalisch ist sie durchaus gleichberechtigt mit der Annahme, g_{00} sei gleich l_{00} oder sehr groß gegenüber l_{00}.

§ 6.

Starrgeometrie und Lichtgeometrie.

Überblicken wir jetzt den zurückgelegten Weg. Man hat vor etwa vierzig Jahren im Michelson-Experiment eine Beziehung erblickt zwischen zwei gleichförmig gegeneinander bewegten Systemen: dem relativ zur Erde und dem relativ zum „Äther" bzw. zu den Fixsternen ruhenden System. Diese Betrachtungsweise ist von Einstein in aller Konsequenz durchgeführt, indem er manche überflüssige Spekulation entfernte; damit hat er den wichtigen Übergang von der älteren Substanzphysik zur heutigen Feldphysik vollzogen, die wesentlich auf dem Transformationsbegriff beruht. Heute müssen wir aber sagen, daß das Michelson-Eperiment allein — gänzlich abgesehen noch vom späteren angeblich positiven Resultat — nicht notwendig zur Betrachtung von Transformationen der genannten Art führt. *Empirisch sind durchaus keine zwei gegeneinander bewegte Systeme gegeben*, sondern es handelt sich lediglich um ein viel engeres Transformationsproblem, nämlich ein Isotropieproblem. Nur der Wunsch, ein etwaiges positives Ergebnis restlos auf Rechnung der Erdbewegung schieben zu können, kann zur Betrachtung von Translationen führen.

Man hat damals ganz richtig aus dem negativen Michelson-Effekt geschlossen, daß die quadratische Differentialform der Lichtbewegung $dL^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$ bei einer starren Drehung invariant bleibt. Die weitere Folgerung aber, die Gravitationserscheinungen seien von derselben Differentialform beherrscht, war keineswegs selbstverständlich. Man hätte eigentlich nur schließen können, *das Gravitationsbogenelement dG sei eine übrigens gänzlich unbestimmte Funktion $F(dT, d\Gamma)$ der beiden Argumente $dT = dx_0$ und $d\Gamma = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}$*. Zur Begründung der Einsteinschen Theorie braucht man noch die weitere Hypothese: *A*. „Die Funktion F hat die besondere Gestalt $F(dT, d\Gamma) = \sqrt{dT^2 - d\Gamma^2}$". Auf Grund dieser Hypothese erst kann dG durch einen symmetrischen Tensor zweiter Stufe dargestellt werden. Das Michelson-Experiment hat aber *nicht*, wie öfters behauptet wird, *gezeigt*, daß die Lichtgeschwindigkeit c mit Bezug auf verschiedene gegeneinander in gleichförmiger Translation begriffene Bezugssysteme den gleichen Wert hat — und das wird es auch niemals zeigen können —, sondern nur, daß sie von der *Richtung* (mit Bezug auf die fest gedachte Erdoberfläche), in der sie gemessen wurde, unabhängig war, wenigstens soweit es sich um Drehungen in der Horizontalebene handelt. Die Invarianz von c bei einer *Translation* konnte nur mittels weiterer Hypothesen aus der Lorentz-Transformation erschlossen, d. h. also postuliert werden. Um die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit vom Bewegungszustand (also obengenannte Hypothese *A*) (wenn der Miller-Effekt nicht gültig ist) zu beweisen, müßte allererst sowohl die Geschwindigkeit eines von einem Himmelskörper kommenden Lichtstrahls wie diejenige des von einer irdischen Quelle ausgesandten Lichtes jede für sich genügend genau meßbar sein, und müßte ihre Differenz sich als kleiner als die Ordnung 10^{-8}, also absolut genommen kleiner als etwa ein Meter/Sekunde herausstellen. Dies erscheint vorläufig wohl ausgeschlossen, weil der Fehler einer direkten Messung bei irdischer Quelle mindestens etwa 30 km/sek beträgt (s. o.).

Unabhängig von obengenannter Hypothese geht dG bei einer beliebigen vierdimensionalen topologischen Transformation über in

$$dG = F(\gamma_{ij}\, dx^i\, dx^j,\ e_i\, dx^i),$$

wo $d\Gamma^2 = \gamma_{ij}\, dx^i\, dx^j$ eine einfach entartete, also positiv *semi*-definite quaternäre quadratische Form und $e_i\, dx^i = dT$ ein totales Differential, also e_i ein irrotationell verteilter Vektor ist.

Mit Rücksicht auf die historische Lage ist es leicht verständlich, daß man damals geglaubt hat, die obengenannten Folgerungen aus dem Michelson-Experiment ziehen zu müssen. Nichtsdestoweniger kann sich die Hypothese A auf keine einzige empirische Tatsache stützen, weil, wie wir oben sahen, der Vektor e_i in keiner der bekannten Gravitationserscheinungen auftritt, mit Ausnahme der Führungslinien, die aber zur vollständigen Festlegung nicht ausreichen.

Professor G. Mannoury hat in seinem Colloquium an der Universität Amsterdam seit 1921 wiederholt hervorgehoben, *daß die zwei Arten des Messens*: mittels des Lichtes, bzw. mittels starrer Körper, *zwei logisch unabhängige Definitionen der Geometrie erzeugen*, so daß die Identität der beiden zugehörigen Bewegungsgruppen als ein Naturgesetz explizit ausgesprochen werden soll[26]), analog wie Einstein die genaue Übereinstimmung der beiden, ebenfalls unabhängigen, Definitionen des Massenbegriffs als träger bzw. schwerer Masse, im „Äquivalenzprinzip" zur Geltung gebracht hat. Diese wichtige Bemerkung hat das Entstehen der vorliegenden Abhandlung möglich gemacht, indem sie den Verfasser zur Lösung des Michelson-Problems führte, und zwar in dem Sinne, daß hier der Interferenzversuch als Experimentum crucis für die Existenz oder Nichtexistenz der betreffenden Identität betrachtet wird[27]).

---

[26]) Vgl. in diesem Zusammenhang auch L. E. J. Brouwer, „Het Wezen der Meetkunde" (Groningen 1909), S. 7.

[27]) Das Axiom der Identität von Lichtgeometrie und Starrgeometrie hat Hans Reichenbach in einer inzwischen veröffentlichten Abhandlung ausdrücklich hervorgehoben, die dem Verfasser erst nach Einreichung dieser Schrift bekannt wurde [„Über die physikalischen Konsequenzen der relativistischen Axiomatik", Zeitschr.

§ 7.

Metrik und Physik.

Eine Metrik ist im Wesen nichts anderes als eine Meßmethode, ein Mittel, um physikalische Größen gleicher Art in verschiedenen Weltpunkten miteinander zu vergleichen, also ein Gesetz, das den Körper der in einem beliebigen Weltpunkte definierten („wirklichen" oder „möglichen") orientierten Größen abbildet auf den Körper der in jedem benachbarten Punkte definierten Größen, kurz: ein Übertragungsprinzip im Sinne der Infinitesimalgeometrie. Ein derartiges allgemeines Übertragungsprinzip, das die bekannten linearen Übertragungen als Spezialfall mitumfaßt, läßt sich aus gewissen physikalischen Zustandsfeldern ableiten; insbesondere wird die Metrik Riemannscher Natur sein, falls sie sich in der bekannten Weise aus einem symmetrischen nicht entarteten Tensorfelde zweiter Stufe ableiten läßt. Die Frage, ob die Welt eine Riemannsche Metrik gestattet — bei der nicht das Wort „Metrik", sondern das Wort „Riemannsche" betont ist —, hat *nur dann einen Sinn, wenn von vornherein irgendein Zusammenhang zwischen den die betreffende Metrik definierenden Größen und gewissen empirisch gegebenen physikalischen Zustandsfeldern gefordert wird,* ähnlich wie in § 6 diese Frage beantwortet worden ist für den Fall, daß

---

f. Phys. **34** (1925), S. 32—48]. Vgl. insbesondere S. 35: „Der Inhalt der Körperaxiome läßt sich nun folgendermaßen zusammenfassen: *die materiellen Gebilde stellen sich auf die relativistische Lichtgeometrie ein*", und S. 47: „Jetzt können wir auch die Frage beantworten, was sich in der R.-T. ändern würde, wenn die Versuche Millers als Beweis angesehen werden müßten, daß der bisherige negative Ausfall des Michelson-Versuches nicht prinzipiell festgehalten werden darf. *Nicht* ändern würde sich die Einsteinsche *Zeitlehre*, sie hat mit dem Michelson-Versuch gar nichts zu tun. *Nicht* ändern würde sich auch die *Lichtgeometrie*; sie bleibt auf jeden Fall eine mögliche Definition der raumzeitlichen Metrik, und wahrscheinlich eine viel bessere und genauere als die Geometrie der starren Stäbe und Uhren. *Ändern* aber würde sich unser Wissen über die Einstellung der materiellen Gebilde auf die Lichtgeometrie." Hier wäre nur zu bemerken, daß die prinzipielle Gleichwertigkeit von Lichtgeometrie und Starrgeometrie bei Reichenbach nicht ganz deutlich hervortritt. Vgl. aber auch Fußnote [28]). Eine sehr verwandte Bemerkung findet sich auch in der in [22]) erwähnten Abhandlung von N. von Raschevsky: „Dabei sei noch bemerkt, daß die Annahme, die Lichtstrahlen seien geodätische Nullinien *derselben* Welt, für welche die Bahnen materieller Punkte geodätische Linien seien, auch vom Standpunkt allein der allgemeinen Relativitätspostulate gar nicht notwendig ist" (S. 147). Nur das Wort „Welt" wäre hier vielleicht etwas irreführend und könnte besser durch „Feld" ersetzt werden, obwohl das auf dasselbe hinauskommt. Die weitere Bemerkung aber „Nun wird entweder die Welt (a) oder die Welt (b) der Wirklichkeit entsprechen müssen" (S. 148) ist nicht ganz klar: es können sehr wohl beide „Welten", d. h. beide Geometrien simultan „der Wirklichkeit entsprechen".

die Identität der zur Metrik gehörigen geodätischen Linien mit einer Schar empirisch gegebener Führungslinien gefordert wird.

Weil es wegen dieser großen Freiheit im allgemeinen möglich ist, eine größere Anzahl verschiedener Maßbestimmungen in die Welt einzuführen, die durchaus nicht immer miteinander in Übereinstimmung zu sein brauchen, verliert in der hier vertretenen Auffassung das Gravitationsfeld die ausgezeichnete Stellung, die es in der bisherigen Theorie besitzt; *irgendein physikalisches Zustandsfeld, welches sich eignet, eine Größenübertragung zu erzeugen*, kann als metrisches Feld betrachtet werden. Damit fällt auch der Begriff „des" physikalischen Raumes (Raum-Zeit-Kontinuums) im Sinne eines metrischen Raumes hinweg: die Welt wird ein mit Linienelementen ausgestatteter topologischer Raum, der sich in mannigfacher Weise als metrischer, insbesondere als Riemannscher Raum betrachten läßt. *Die in der heutigen Form der R.-T. fast mystisch erscheinende Einheit von Raum, metrischem Felde und Gravitationsfelde wird dann dadurch geklärt, daß das empirisch gegebene Gravitationsfeld praktisch geeignet erscheint, eine Metrik zu erzeugen* — und in seiner Qualität als starrgeometrisches Feld auch tatsächlich zum Messen benutzt wird.

Obwohl also *eine Identität von Starrgeometrie und Lichtgeometrie keineswegs tautologisch bedingt ist, und dG und dL also nur annähernd gleich sein werden*[28]), *so würde dennoch bei negativem Ergebnis des Michelson-Experimentes das „ökonomische Prinzip" zur Begründung ihrer provisorischen Identifizierung*, also zur Annahme der Hypothese A, vollständig ausreichen. Können wir aber den Miller-Effekt als zuverlässig betrachten, so ist überdies $d\Gamma^2$ ungleich $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$, wenn dL^2 die obengenannte symmetrische Gestalt hat, also in einem „lichtgeometrisch-orthogonalen" Koordinatensystem. Damit wäre aber jeder Grund zur Annahme der Hypothese A hinfällig geworden. Beachten wir weiter, daß in der bisherigen Theorie das Intervall ds begrifflich wesentlich von der Lichtgeometrie abhängig ist, daß sich die Äqui-Intervallvarietäten z. B. durchaus nicht ohne Zuhilfenahme von Lichtstrahlen empirisch definieren lassen, daß also bei Spaltung der Geometrie in Starr- und Lichtgeometrie *das Gravitationsintervall dG durchaus keine physikalische Bedeutung hat*, so müssen wir schließen, daß es dann durchaus keinen Sinn hat, die beliebige Funktion F einzuführen, so daß auch die Gravitationserscheinungen zu

[28]) Eine ähnliche Bemerkung findet sich in der in [27]) genannten Abhandlung von H. Reichenbach: „Es ist von vornherein eigentlich sehr unwahrscheinlich, daß die Körperaxiome völlig streng erfüllt sein sollen. Das Licht ist ein physikalisch sehr viel einfacheres Gebilde als ein materieller Stab, und wenn man einen Zusammenhang zwischen beiden sucht, sollte man zunächst annehmen, daß er nicht einem so idealen Schema entspricht, wie es die Körperaxiome behaupten" (S. 48).

ihrer Beschreibung zwei als voneinander unabhängig zu betrachtende Differentialformen brauchen, nämlich die entartete quadratische und die lineare. Es wäre weiter zu untersuchen, wie sich die Führungslinien am einfachsten aus diesen beiden Tensoren erklären ließen und ob die e_i vielleicht gänzlich zu entbehren wären, wenn man die Identität der Führungslinien mit den geodätischen Linien preisgeben und als ihre Hamiltonsche Funktion nicht mehr dG, sondern irgendeine Funktion von $d\Gamma$ betrachten würde. Außerdem würde man fragen können, ob die γ_{ik} irgendwie mit den l_{ik} zusammenhängen oder ob vielmehr zwei mehr oder weniger gleichartige Zusammenhänge existieren: einerseits zwischen den γ_{ik} und e_i und der Massenverteilung im Weltall, bzw. dem Begriff des starren Körpers, andererseits zwischen den l_{ik} und φ_i und den Strahlungserscheinungen im allgemeinen, bzw. dem elektromagnetischen Zustand. Vorläufig kommt man aber in dieser Hinsicht über Vermutungen nicht hinaus.

§ 8.

Der Miller-Effekt und die klassische Theorie.

Wir wollen jetzt noch einiges bemerken über einige Einwände, die gegen den Miller-Effekt hervorgehoben worden sind. Wir haben schon berichtet, daß Silberstein die Gelegenheit sofort ergriffen hat, um die R.-T. à la lanterne zu verurteilen. Dagegen wendet Eddington [29]) ein, daß diese „surprising hypothesis of ether-drift“ schon im voraus von den täglichen astronomischen Wahrnehmungen zurückgewiesen wird, und zwar auf Grund der Tatsache, daß die „Äthergeschwindigkeit“ mit der Höhe zunehmen würde. Wenn ein Lichtstrahl eines Sternes auf dem Mount-Wilson vertikal wäre, so würde dieser auf Meeresniveau eine Neigung von 7″ haben. „An error of the order 7″, variable according to the time of day, would play havoc with fundamental astronomy.“ Daß der Äther irrotationell verteilt sein muß, hat übrigens schon Stokes 1845 auf Grund der Aberrationserscheinungen bewiesen. Eddington schließt mit den bemerkenswerten Worten: „The Michelson-Morley experiment was originally performed because it was thought — mistakenly as we now realise — that it would measure *absolute* ether-drift.... In the new application to *differential* ether-drift it is invading a field in which the facts have long been established by delicate observation, and it is difficult to regard it as a serious competitor.“ Mit Bezug hierauf bemerkt Giovanni Giorgi [30]), daß man aus einer Zunahme der Horizontalkomponente der Äthergeschwindigkeit mit der Höhe noch nicht auf ihre Rotationalität schließen darf, weil die Rota-

[29]) Nature **115** (6. Juni 1925), S. 870.
[30]) Nature **116** (25. Juli 1925), S. 132.

tion dennoch Null sein kann, falls nur die partielle Ableitung der Vertikalkomponente in der „Bewegungsrichtung“ genügend groß ist. Es bleiben dann nach Giorgi drei große Schwierigkeiten übrig: 1. Eine irrotationelle Verteilung des Vektors zu finden, die zahlenmäßig mit den Miller-Ergebnissen übereinstimmt; 2. zu erklären weshalb, wenn der „Griff“ („grip“) auf den Äther nicht die Wirkung einer Adhäsion ist, die Horizontalkomponente auf Meeresniveau Null wird; 3. wird die Vertikalkomponente irgendwo Null, so wird sie auf derselben Höhe, 100 km vom genannten Ort entfernt, 500 km/sek betragen müssen! Dies müßte von groben Effekten aufgezeigt werden können. Der Gesamteindruck Giorgis ist: „In the present condition of things it will be advisable not to draw any conclusion from Prof. Miller's experiment until results of further experiments are available and until, finally, we are able to examine whether some unknown phenomenon has affected the results.“ Weiter hat W. F. G. Swann [31]) aus der Lorentzschen Fassung der Stokes-Planckschen Äthertheorie für die Geschwindigkeit V_r bei einer Entfernung r vom Erdmittelpunkte die Formel

$$\frac{V_{R+h} - V_R}{V_R} = \frac{h}{R}$$

hergeleitet. Hierin bedeutet R den Radius der Erde, also etwa 6400 km, und h die Differenz der Höhen zwischen Cleveland und dem Mount-Wilson (1,7 km), so daß diese Formel für eine Differenz der beiden Geschwindigkeiten von der Ordnung 10 km/sek offenbar auf einen Widerspruch führt [32]).

[31]) Nature **116** (28. November 1925), S. 785.

[32]) Nach Einreichung dieser Abhandlung bemerkte G. Joos [Phys. Zeitschr. 27 (1926), S. 1—5] ebenfalls, daß die Relativbewegung des Sonnensystems gegen die Fixsterne, deren Geschwindigkeit etwa 20 km/sek beträgt, nicht imstande ist, die von Miller beobachtete starke Zunahme des Effektes mit der Höhe zu erklären. Dazu müsse man schon die Bewegung des Milchstraßensystems gegen die entfernteren Spiralnebel, deren Geschwindigkeit nach Strömberg etwa 300 km/sek beträgt, in Betracht ziehen. In derselben Lieferung der Phys. Zeitschr. zeigt aber J. Weber, daß auch dann die Beobachtungen den zu erwartenden Resultaten widersprechen. Übrigens macht G. Joos a. a. O. S. 5 eine Bemerkung: „Da ein einziger die fortschreitende Bewegung der Erde anzeigender Versuch der R.-T. widersprechen kann, so sprechen zwar die anderen hier besprochenen Arbeiten gegen die Wahrscheinlichkeit des Millerschen Befunds, sie können ihm aber, wenn seine Richtigkeit sichergestellt ist, niemals aufwiegen“, die etwas gefährlich ist, weil der Ausdruck „der R.-T. widersprechen“ manchmal in dem Sinne benutzt wird, daß die Rückkehr zu einer der Äthertheorien von Stokes, Lorentz, Lodge, Silberstein, Lenard usw. die einzig übrigbleibende Lösung wäre. Hier kann aber nur gemeint sein, daß gewisse Änderungen in der R.-T. angebracht werden sollen, wie es z. B. der Verf. im Text gemacht hat, die aber das neu entstandene Weltbild nicht wesentlich ändern. Vgl. hierzu die in [28]) zitierte Abhandlung von N. v. Raschevsky: „Versteht man unter Theorie die Gesamtheit *aller* ge-

Es möge dahingestellt bleiben, ob die Silbersteinsche Fassung der Äthertheorie tatsächlich imstande ist, den Miller-Effekt quantitativ zu erklären[33]), es geht jedenfalls wohl so viel aus der angeführten Diskussion hervor, daß das Ergebnis weniger noch mit der R.-T., als mit der klassischen Äthertheorie im gröbsten Widerspruch steht. Am deutlichsten zeigt dies außerdem eine ebenso wichtige wie einfache Bemerkung, die Prof. H. A. Lorentz Anfang Oktober 1925 in einem von der vorliegenden Abhandlung veranlaßten Gespräch mit dem Verfasser machte, und die merkwürdigerweise in der englischen Diskussion übersehen worden ist. Diese Bemerkung lautet folgendermaßen: Nehmen wir an, es gäbe eine absolute Äthergeschwindigkeit, die eine feste Richtung gegen die Fixsterne habe. Dieser Vektor würde dann (auf die Erde bezogen) im Laufe eines Tages einen Rotationskegel um die Himmelsachse beschreiben. Seine Horizontalkomponente durchliefe also ein ebenes Vektorbüschel, das symmetrisch läge zur Projektion der Himmelsachse auf der Horizontalebene, das heißt zur Richtung Nord—Süd. Im Mittelwert über einen siderischen Tag würde der Vektor also die Richtung Nord—Süd haben müssen. Aus Abb. 1 geht aber ganz deutlich hervor, daß die mittlere Richtung der Vektoren einen Winkel von wenigstens 40^0 mit den Meridian bildet, im Widerspruch zu unserer Annahme[34]). Diese Betrachtung läßt sich nach einer ebenfalls von Prof. Lorentz Anfang Oktober 1925 herrührenden Gedankenfolge auf den vom Verfasser behandelten allgemeineren Fall erweitern. Anstatt durch einen Vektor (D, φ_M), wie Miller es tut, können wir nämlich das Ergebnis einfacher durch den Vektor (D, ω) darstellen, wo $\frac{1}{2}\omega = \varphi_M$ das Maximalazimuth bedeutet. Bis auf einen Proportionalitätsfaktor werden dann die Komponenten des Vektors den Größen $S \cos \omega$ und $S \sin \omega$ gleich sein [vgl. die Gleichungen (5)]. Die Rechnung wird dadurch erheblich vereinfacht und ergibt nach Prof. Lorentz, falls die l_{ik} mit Bezug auf das Fixstern-

machten Voraussetzungen und ihrer Folgerungen, so kann natürlich durch Preisgabe der Einsteinschen Gleichungen die *heutige* allgemeine R.-T. durch eine neue ersetzt werden; in ihren Grundprinzipien aber, welche Vorstellungen über Raum, Zeit und Bewegung betreffen, wird diese neue Theorie von der heutigen nie verschieden sein" (S. 404). Über die Bedeutung der etwas vagen bei Joos vorkommenden Begriffe „Wahrscheinlichkeit eines Befundes" und „Sicherstellung der Richtigkeit" vgl. § 9 des Textes.

[33]) Hierzu bemerkt Hans Thirring in einer nach Einreichung dieses Aufsatzes veröffentlichten Abhandlung [Naturwissenschaften **14** (12. Februar 1926), S. 111—116]: „... die Stokessche Annahme (stellt) überhaupt keine ausgearbeitete Theorie des elektromagnetischen Feldes dar und kann mit der Einstein-Minkowskischen Elektrodynamik, die eindeutige Feldgleichungen lieferte, eine Reihe neuer Gesichtspunkte eröffnete und beobachtbare Effekte voraussagte, nicht in Wettbewerb treten."

[34]) Dieselbe Bemerkung wurde später in dem in [33]) genannten Aufsatze von Thirring gemacht.

system konstant sind, daß der Mittelwert von S sin ω über einen siderischen Tag verschwindet. Das so erhaltene Diagramm, das aus Abb. 1 dadurch hervorgeht, daß man die Winkel aller Vektoren mit der Vertikale verdoppelt, soll dann also symmetrisch liegen zur Vertikalen, was ebensowenig der Fall ist. Die Betrachtung läßt sich übrigens auch ohne Rechnung durchführen, wenn man beachtet, daß eine Funktion, die im obengenannten System konstant ist, im mit der Erde rotierenden System immer die Meridianebene zur Symmetrieebene hat. Dies gilt also auch für die Komponenten eines Tensors beliebiger Stufe, also auch für jede daraus abgeleitete Invariante, insbesondere für den Vektor (S, ω).

Aus diesen verschiedenen Bemerkungen geht hervor, daß es gänzlich ausgeschlossen ist, im Miller-Effekt ein Experimentum crucis zwischen der klassischen Theorie und der R.-T. zu erblicken.

Aus der obenerwähnten Unabhängigkeit der Möglichkeit des allgemeinen Tensorkalküls von jedem Experimente ergibt sich ohne weiteres, daß die Erwägung der Möglichkeit einer Rückkehr zur klassischen Theorie nicht mehr und nicht weniger bedeutet als die Vermehrung der Anzahl der Grundtensoren. Und wenn man dies tut, so gibt es durchaus keine Veranlassung, die l_{ik} sofort durch die Bedingung einzuschränken, die räumlichen Komponenten von dL^2 sollen mit denen von dG^2 identisch sein, wie es die Erklärung des Miller-Effektes mittels eines einzigen Vektors tut; da ist eben die oben eingeführte Verallgemeinerung zur vollständigen Unabhängigkeit der beiden Tensoren die am meisten auf der Hand liegende und vorurteilsfreiste Erklärung. Es läßt sich dann auch der Lorentzschen Kritik dadurch vorbeugen, daß man z. B. annimmt, die q_α seien (im Fixsternensystem) nicht, die $r_{\alpha\beta}$ aber wohl von der Zeit abhängig, und zwar in dem Sinne, daß die letzteren ganz oder teilweise von der Erde bei ihrer Drehung mitgeführt werden, das heißt, daß das Ellipsoid im Laufe des Tages seine Lage relativ zur Erde beibehält, also gegenüber dem Fixsternsystem rotiert (wodurch die Komponente in der Richtung Ost—West bei Miller erklärt werden kann), und daß die Abweichung des Ellipsoids von einer Kugel mit der Höhe zunimmt. Die Konstanz der q_α sichert dann die Irrotationalität des Geschwindigkeitsvektors, und die Variabilität der $r_{\alpha\beta}$ widerspricht den Aberrationserscheinungen nicht, weil diese, wie u. a. G. Giorgi a. a. O. bemerkt, von der Richtungsdifferenz der Wellennormalen am Anfang und Ende eines Lichtstrahls unabhängig sind. Der Michelsonsche Versuch über den Einfluß der Erdrotation auf die Lichtgeschwindigkeit, der kürzlich von A. A. Michelson und Henry G. Gale wiederholt worden ist[35]), ergibt

[35]) A. A. Michelson und H. G. Gale: „The Effect of the Earth's Rotation on the Velocity of Light", Nature **115** (18. April 1925), S. 566. Vgl. auch: C. Runge, Die Naturwissenschaften **13** (15. Mai 1925), S. 440, und E. Freundlich, ebenda **13** (29. Mai 1925), S. 485.

auf Grund unserer Rechnungen genau dasselbe Resultat wie in der klassischen Theorie. Lösen wir nämlich $dL^2 = 0$ nach dx^0, dann finden wir für die zum Durchlaufen eines infinitesimalen Vektors dx^α benötigte Zeit

$$(11) \qquad dx^0 = \frac{-l_{0\alpha}\,dx^\alpha \pm \sqrt{(l_{0\alpha}\,dx^\alpha)^2 - l_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta \cdot l_{00}}}{l_{00}}.$$

Wenn wir den Vektor in entgegengesetzter Richtung von einem Lichtstrahl durchlaufen lassen und die Differenz der Zeiten bilden, so erhalten wir zweimal das erste Glied im Zähler, indem das zweite Glied, die Diskriminante, eine gerade Funktion in dx^α ist und also fortfällt. Beim Miller-Effekt war es gerade umgekehrt, weil da die Differenz der Wurzeln, d. h. die Diskriminante auftrat. Dies ist im allgemeinen der Unterschied zwischen den Effekten ersten und zweiten Grades: bei Effekten ersten Grades tritt die Summe, bei denjenigen zweiten Grades die Differenz der Wurzeln dx^0 von $dL^2 = 0$ auf. Übrigens sind die in Gleichung (11) auftretenden l_{ik} (die wir deshalb weiterhin mit l'_{ik} bezeichnen) nicht dieselben wie die früher eingeführten: die l_{ik} haben Bezug auf das Fixsternsystem $x^0 x^1 x^2 x^3$, die l'_{ik} auf ein mit der Erde rotierendes Koordinatensystem $y^0 y^1 y^2 y^3$. Wählen wir die Erdachse als gemeinsame x^3- und y^3-Achse, dann lauten die Transformationsformeln: $y^0 = x^0$, $y^1 + i y^2 = e^{\omega i x^0}(x^1 + i x^2)$, $y^3 = x^3$. Schreiben wir x^i_j für die partielle Ableitung von x^i nach y^j und drücken wir die l_{ik} wie früher aus in den q_α und $r_{\alpha\beta}$, dann lauten die Transformationsgleichungen für $l'_{\alpha 0}$ auf Grund der Invarianz von dL^2

$$l'_{\alpha 0} = l_{ij}\,x^i_\alpha\,x^j_0 = l_{\varrho 0}\,x^\varrho_\alpha\,x^0_0 = l_{\varrho 0}\,x^\varrho_\alpha,$$

weil alle anderen Glieder in Fortfall kommen. Schreiben wir hierfür

$$l'_{\alpha 0} = c\,q'_\alpha = c\,q_\varrho\,x^\varrho_\alpha,$$

dann stellt sich heraus, daß die q_α sich genau so transformieren, als ob nur eine dreidimensionale räumliche Transformation vorgenommen würde. Für l'_{00} finden wir

$$\begin{aligned} l'_{00} = l_{ij}\,x^i_0\,x^j_0 &= l_{00} + l_{0\alpha}\,x^\alpha_0 + l_{\alpha\beta}\,x^\alpha_0\,x^\beta_0 = \\ &= c^2 + c\,q_\alpha\,x^\alpha_0 - g_{\alpha\beta}\,x^\alpha_0\,x^\beta_0 - r_{\alpha\beta}\,x^\alpha_0\,x^\beta_0. \end{aligned}$$

Das zweite und vierte Glied ist klein gegenüber den anderen und kann vernachlässigt werden, weil l_{00} nur im Nenner auftritt. Das dritte Glied ist, wie eine einfache Rechnung zeigt, gleich $\omega^2\{(y')^2 + (y^2)^2\}$, also gleich dem Quadrat der linearen Geschwindigkeit eines Punktes der Erdoberfläche, und kann deshalb ebenfalls gegen c^2 vernachlässigt werden. Wir erhalten deshalb für die Zeitdifferenz zweier Lichtstrahlen, die in entgegengesetzten Richtungen eine geschlossene Kurve K durchlaufen,

$$2\oint_K \frac{l'_{0\alpha}\,dy^\alpha}{l'_{00}} = \frac{2}{c}\oint_K q'_\varrho\,dy^\varrho = \frac{2}{c}\oint_K q_\varrho\,dx^\varrho.$$

Das ist aber genau derselbe Wert, den Michelson gefunden hat. So wie mit diesem ist unsere Erklärung des Miller-Effektes mit jedem Experimente erster Ordnung (10^{-4}) bis auf Größen von der Ordnung 10^{-12} in Übereinstimmung.

Anläßlich der Erörterung über den Miller-Effekt möge hier noch auf einen schon von Anfang 1924 datierenden Versuch Herrn N. v. Raschevkys[36]), sich mit diesem Effekte auseinanderzusetzen, hingewiesen werden. Die dort gemachte Bemerkung, der Michelson-Versuch könne in der allgemeinen R.-T. wegen der Krümmung der Lichtstrahlen nur annähernd negativ ausfallen, ist zwar prinzipiell richtig, kann aber (wie Herr v. Raschevsky jetzt selbst zugibt) dennoch nicht zur Erklärung des Effektes dienen, weil eine merkliche Änderung der Gravitationspotentiale innerhalb eines Gebietes, das in der Zeit einige Minuten, im Raume einige Meter umfaßt, zu groben anderen Effekten Anlaß geben müßte. Im Prinzip ist aber manche Bemerkung der vorliegenden, unabhängig davon entstandenen Abhandlung schon bei Herrn v. Raschevsky vorweggenommen.

§ 9.
Schlußbemerkungen.

Wir wollen uns durchaus nicht verhehlen, daß die hier gegebene Erklärung des Miller-Effektes als eine Überlegung ad hoc angesehen werden muß. Die weitaus einfachste Erklärung, die man überhaupt von den Beobachtungen Millers geben kann, ist unbedingt diejenige, die sie für fehlerhaft erklärt.

Es ist die Aufgabe der Physik, die wahrgenommenen physikalischen Erscheinungen soviel wie möglich zu ordnen, Regelmäßigkeiten in ihnen zu erkennen und sie in möglichst wenig Urteilen (Gesetzen) zusammenzufassen. Diese sind, streng genommen, rein historische Urteile, aber sie ermöglichen es, unsere Erwartungen betreffs späterer Erscheinungen auf sie zu stützen und mit einem starken Gefühl von Sicherheit in den Naturablauf einzugreifen, einem Gefühl, das uns, wie die Praxis zeigt, nicht allzu oft betrügt[37]). *Eine beliebig vorgegebene endliche Menge von Erschei-*

[36]) „Bemerkung über das positive Ergebnis des Michelsonschen Versuches und die Relativitätstheorie", Zeitschr. f. Phys. 22 (1924), S. 401.

[37]) Vgl. hierzu: L. E. J. Brouwer, „Over de Grondslagen der Wiskunde" (Amsterdam-Leipzig, Maas en Van Suchtelen 1907), S. 81ff.

nungen läßt sich immer in einem genügend komplizierten Naturgesetz (das auch über nicht oder noch nicht wahrgenommene Erscheinungen Aussagen macht) *vollständig wiedergeben*, ähnlich, wie man durch eine beliebig vorgegebene endliche Menge von Funktionswerten immer eine ganze rationale Funktion legen kann. Und ebenso wie man eine gegebene Menge von Funktionswerten von der endlichen Kardinalzahl N mittels eines Polynoms *gegebenen* (n-ten) Grades für $N > n + 1$ solchermaßen approximieren kann, daß die Genauigkeit mit n steigt, *so kann man auch eine gegebene endliche Menge von Erscheinungen mittels einer Physik von beliebig vorgegebener beschränkter Kompliziertheit mehr oder weniger genau approximieren, wobei die Genauigkeit mit der Kompliziertheit der Physik wächst.*

Dazu ist notwendig, daß die Menge der Erscheinungen „gegeben“, d. h genau aufgezählt ist. Dies wäre klar, wenn wir den Begriff „wahrgenommene physikalische Erscheinungen“ unzweideutig festlegen könnten. Dies ist aber keineswegs der Fall: er läßt sich nach Belieben mehr oder weniger weit ausdehnen. Es ist nicht üblich zu fordern, daß z. B. die „metapsychischen Phänomene“ oder die „Experimente“ irgendeines Anfängers in die Naturgesetze aufgenommen werden sollen obwohl dies sehr wohl möglich wäre. Über die Frage, ob die Gesetze den Miller-Effekt mit einschließen sollen oder nicht, läßt sich aber noch streiten. So viel ist jedoch wohl sicher: *in einer Physik, deren Kompliziertheit dadurch beschränkt ist, daß sie höchstens die beiden Fundamentaltensoren von vier Dimensionen g_{ik} und φ_i enthalten soll, läßt sich der als positiv angenommene Effekt wahrscheinlich nicht wiedergeben*; *erweitert man aber die Anzahl der Grundtensoren, dann zeigt die vorliegende Überlegung, daß die kompliziertere Physik auch dieser Erscheinung vollständig Rechnung zu tragen vermag.*

(Eingegangen am 25. 1. 1926.)