Über die Differentialgleichungen der Himmelsmechanik.

Von

Aurel Wintner in Budapest.

Für die exakten Differentialgleichungen der Himmelsmechanik ist typisch die nichtlineare Differentialgleichung

$$\ddot{z} + \varphi(t) z = x \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t) z^k, \tag{1}$$

wobei x einen Parameter bedeutet und die φ bekannte, nach 2π periodische Funktionen sind.

$$\ddot{z} + \varphi(t) z = 0 \tag{2}$$

ist also eine homogene lineare Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten, die bekanntlich wenigstens eine Eigenlösung von der Gestalt

$$\sum_k \lambda_k \exp\left[(\varrho + k) t \sqrt{-1}\right] \tag{3}$$

besitzt. Wir wollen *nicht* voraussetzen, daß es eine solche Lösung von (2) gibt, die einerseits von säkularen Gliedern frei ist, andererseits mit (3) ein Fundamentalsystem von (2) bildet. *Wir wollen also den Fall der mehrfachen Elementarteiler nicht ausschließen.*

Können wir behaupten, daß (1) eine Lösung besitzt, die in eine *konvergente* Reihe von der Gestalt

$$\sum_i \sum_k \lambda_{ik}(x) \exp\left[(i\varrho + k) t \sqrt{-1}\right] \tag{4}$$

entwickelt werden kann (wenigstens wenn $|x|$ hinreichend klein ist), wobei ϱ dieselbe Zahl wie in (3) bedeutet? Man setze $\varrho = \sigma + \tau\sqrt{-1}$, wobei σ und τ reell sind. Wir werden die Frage bejahend beantworten in dem Falle, wo σ rational ist. Ist $\tau = 0$, so ergeben sich die periodischen Lösungen der ersten bzw. zweiten Poincaréschen Klasse (genre), je nachdem σ verschwindet oder nicht (mod 1); ist $\tau \gtrless 0$, so ergeben sich asymptotische Lösungen. Es sei schon jetzt erwähnt, daß die Poincarésche

Theorie der letzteren prinzipiell mangelhaft ist. — Wir erhalten alle diese Lösungen mit der *Methode der unbestimmten Koeffizienten*, also mit einer Methode der Praxis:

Wir setzen (4) in (1) ein und vergleichen die Koeffizienten der beiderseits stehenden „bedingtperiodischen" Reihen. Es ergibt sich so ein unendliches, nicht lineares, implizites System von Gleichungen, welches durch (5) bezeichnet werden soll. Von leicht angebbaren Einzelfällen abgesehen, kann dieses System rekursiv nicht aufgelöst werden. Wir beweisen, daß unter den genannten Voraussetzungen die $\lambda_{ik}(x)$ durch (5) als (analytische) Funktionen von x definiert werden, und daß sie derart abgeschätzt werden können, daß daraus die Konvergenz von (4) geschlossen werden kann. Es ist dabei von Wichtigkeit das Prinzip der Transformation des Kernes.

Des näheren sei auf die Punkte 1., 3., 4., 5. und 6. der Einleitung verwiesen; den übrigen Teil der Einleitung kann der Leser überschlagen.

Einleitung.

1. In der neueren Himmelsmechanik nimmt das folgende Problem eine zentrale Stellung ein:

Vorgelegt ist das Differentialsystem

$$(1) \qquad \ddot{x}_i = \Phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \exp(t\sqrt{-1}),\ \exp(-t\sqrt{-1});\ \mu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

hierbei ist $t(\gtreqless 0)$ die unabhängige Veränderliche; μ ist ein Parameter; bekannt ist eine nach 2π periodische Lösung

$$(2) \qquad {}^0x_i = X_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

des Differentialsystems

$$(3) \qquad {}^0\ddot{x}_i = \Phi_i({}^0x_1, {}^0x_2, \ldots, {}^0x_n;\ \exp(t\sqrt{-1}),\ \exp(-t\sqrt{-1});\ 0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

in das das System (1) für $\mu = 0$ übergeht; es wird verlangt, an die bekannte Ausgangslösung (2) „bedingtperiodische" Lösungen von (1) analytisch anzuschmiegen.

Der Fall, wo

$$(4) \qquad \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mu} \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

soll nicht ausgeschlossen werden.

Man versucht für (1) den Ansatz

$$(5) \qquad x_i = X_i(t) + \mu \xi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Mit Rücksicht auf (2), (3) ergibt sich für die ξ_i das Differentialsystem

$$(6)\quad \ddot{\xi}_i = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k} \Phi_i(X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t);\ \exp(t\sqrt{-1}), \exp(-t\sqrt{-1});\ 0)$$
$$+ \lambda \frac{\partial}{\partial \mu} \Phi_i(X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t);\ \exp(t\sqrt{-1}), \exp(-t\sqrt{-1});\ 0)$$
$$+ \mu \Psi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n;\ \exp(t\sqrt{-1}), \exp(-t\sqrt{-1});\ \mu)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

mit der Nebenbedingung

$$(7)\qquad \lambda = 1.$$

Hierbei ist Ψ_i eine bekannte Funktion. Wir setzen voraus, daß die Φ_i derart sind, daß die Ψ_i in reguläre Potenzreihen ihrer Argumente entwickelt werden können.

2. Setzen wir voraus, daß, indem (6) ohne Rücksicht auf die Nebenbedingung (7) behandelt wird, sich eine von λ und μ abhängige Lösungsschar

$$(8)\qquad \xi_i(t;\lambda,\mu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ergibt. Die Lösungsschar sei etwa für

$$(9)\qquad |\lambda| < \mathsf{\Lambda}, \qquad |\mu| < \mathsf{M}$$

bekannt. Die beiden Schranken $\mathsf{\Lambda}$, M sind einander in dem Sinne assoziiert, daß z. B. auf Kosten der Verkleinerung von M die andere Schranke $\mathsf{\Lambda}$ im allgemeinen vergrößert werden kann. — Wir setzen voraus, daß die Schranke M derart gewählt werden kann, daß zu ihr $\mathsf{\Lambda} = 1$ als assoziierte Schranke gehört. — Dies ist gewiß möglich, wenn die Bedingungen (4) erfüllt sind, da dann λ in (6) überhaupt nicht eingeht; dies ist z. B. in der Hill-Brownschen Mondtheorie der Fall. — In anderen Fällen kann $\mathsf{\Lambda} = 1$ erreicht werden, wenn statt (5) der Ansatz

$$(10)\qquad x_i = X_i(t) + \mu^{\frac{1}{2}} \xi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

versucht wird usw. Wir wollen voraussetzen, daß (7) erlaubt ist.

3. Nach dem vorigen Punkte wollen wir das Differentialsystem (6) *ohne* die Nebenbedingung (7) betrachten.

Setzt man in (6) $\lambda = \mu = 0$, so ergibt sich das Jacobische System

$$(11)\quad {}'\ddot{\xi}_i = \sum_{k=1}^{n} {}'\xi_k \frac{\partial}{\partial x_k} \Phi_i(X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t);\ \exp(t\sqrt{-1}), \exp(-t\sqrt{-1});\ 0)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

(Variationsgleichungen), wobei das Zeichen $'$ darauf hinweisen soll, daß

$$(5)'\qquad X_i(t) + \mu\, {}'\xi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

im allgemeinen noch keine Lösung von (1) darstellt, sondern nur eine erste Näherung gibt.

Nach der von Hill herrührenden, von Poincaré und v. Koch präzisierten Theorie der charakteristischen Exponenten kann die Aufsuchung der bedingtperiodischen Lösungen des *linearen* Differentialsystems (11) auf die Methode der unbestimmten Koeffizienten gegründet werden; wir beschäftigen uns, im Anschluß an eine wenig beachtete Arbeit von v. Koch[1]), mit der Aufgabe, mit derselben Methode die bedingtperiodischen Lösungen *von* (6) zu finden.

4. Die Hauptschwierigkeiten der Poincaréschen Himmelsmechanik[2]) rühren bekanntlich davon her, daß identisch verschwindende charakteristische Exponenten existieren[3]). — Im Falle der asymptotischen[4]) Lösungen hat Poincaré diese Schwierigkeiten auch nicht überwunden. Er erhält nämlich (übrigens mit einer nicht stichhaltigen Schlußweise) eine gewisse Schar von Funktionenreihen in t, welche Schar durch einen Parameter μ zusammengehalten wird; würde die Funktionenreihe bei einem *festen* μ_0 konvergent sein, so würde sie eine asymptotische Lösung bei diesem Werte von μ darstellen. Nun sind die Reihen divergent; Poincaré beweist die Semikonvergenz und folgert bloß daraus die Existenz der asymptotischen Lösungen. — Ohne eine nähere Untersuchung wird aber durch die Semikonvergenz die Existenz offenbar noch nicht verbürgt, da (wegen der Semikonvergenz) der Parameter einem Grenzprozesse zu unterwerfen ist; es läßt sich also a priori nicht behaupten, daß es ein μ_0 gibt, zu welchem eine asymptotische Lösung gehört. — Poincaré hat die Existenz der asymptotischen Lösungen im Falle der Himmelsmechanik nicht bewiesen (seine späteren, bloß formalen Untersuchungen kommen hier nicht in Betracht); was von Poincaré behandelt wird, ist eine interessante Eigenschaft seiner Reihenschar, aber nicht mehr.

5. Die erwähnte Schwierigkeit umgehe ich durch einen Kunstgriff, der von Herrn Schmidt[5]) in seinen analogen Untersuchungen über die nichtlinearen Integralgleichungen angewendet und seitdem von Herrn Lichtenstein zur Behandlung von anderen schwierigen Fragen herangezogen

[1]) Bull. Soc. Math. de France 27 (1899), S. 215–227.

[2]) Acta Math. **13** (1890); Méth. Nouv. de la Méc. Cél. I–III. Paris (1892–1899).

[3]) Und zwar wegen der Existenz der klassischen Integrale (NB. das Integral der lebendigen Kräfte [Jacobisches Integral] ist zweifach zu zählen), also aus geometrischen Gründen (Transformationsgründen), wie in der Theorie der Gleichgewichtsfiguren. — In der Hillschen Perigäum-Theorie werden diese Exponenten bekanntlich mit Hilfe desselben Integrals eliminiert, aus welchem sie entspringen.

[4]) Méth. Nouv. I, chap. VII.

[5]) Math. Annalen **65** (1908), S. 370–399. — Vgl. v. Koch, l. c. S. 221–222.

wurde (Transformation des Kernes). — Die Hilfsmittel sind dabei die Theorie der normalen Determinanten[6]), deren Hauptsätze in dem zweiten Abschnitte zusammengestellt sind, und ein Existenzsatz (nebst Abschätzungen) über unendliche implizite Gleichungssysteme; der Beweis dieses Existenzsatzes geschieht ohne Schwierigkeit mit derselben Methode, die Herr Lindelöf[7]) in dem elementaren Falle angewendet hat.

Bei den periodischen Lösungen ergeben sich als Bedingungsgleichungen unendliche Systeme vom Typus

$$(12) \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{ik}\, y_k = x\, f_i(x;\, y_0,\, y_1,\, y_{-1},\, \ldots) \quad (i = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \ldots),$$

wobei die Matrix $\|a_{ik}\|$ normal ist und die f_i gewisse Potenzreihen von unendlich vielen Veränderlichen bedeuten. Es kann nicht vorausgesetzt werden, daß diese nichtlinearen Bedingungsgleichungen mit Rekursionsformeln äquivalent sind. — Bei den asymptotischen Lösungen ist die Matrix im allgemeinen nicht normal; ich zerspalte dort das System (12) in zwei unendliche simultane Teilsysteme. Das erste derselben wird mit der bei den periodischen Lösungen angewendeten Methode behandelt, während das zweite Teilsystem summarisch, bloß auf Grund des Existenzsatzes erledigt werden kann; bloß mit dem letzteren könnte man bei dem vollständigen Systeme nicht auskommen.

Es sei übrigens bemerkt, daß der Existenzsatz nicht nur an die Theorie der normalen, sondern auch an die der absolut konvergenten Determinanten[8]) angepaßt werden kann; vgl. auch den Anhang.

Die Realitätsdiskussion werde ich nicht durchführen; bei den periodischen Lösungen reduziert sie sich auf die Diskussion der Verzweigungsgleichungen[9]); bei den asymptotischen Lösungen tritt dazu noch ein anderer Umstand hinzu; die Frequenzen der bedingtperiodischen Reihen sind nämlich hier nicht alle reell, was man nicht zu beachten pflegt; begnügt man sich mit der ersten Näherung, d. h. betrachtet man nur die Variationsgleichungen (11), so verursacht freilich dieser Umstand in gewissen Fällen keine Schwierigkeit, vgl. eine Arbeit von Herrn Hough[10]).

6. Wir werden aus (6) nur eine Gleichung und nur einen Parameter behalten und überdies voraussetzen, daß der Parameter bloß als Faktor

[6]) v. Koch, Acta Math. **16** (1892—1893), S. 217—295.

[7]) Bull. de Darboux **23** (1899), S. 68. — Vgl. meine Note Math. Annalen **95** (1926), S. 544—556.

[8]) v. Koch, C. R. **116** (1893), S. 179—181.

[9]) Vgl. Lichtenstein, Math. Zeitschr. **1** (1918), S. 265—268.

[10]) In Darwins Scientific Papers, I, S. 117—119, Cambridge 1911.

eintritt. Wir werden uns also mit der Differentialgleichung

$$\ddot{z} + \varphi(t) z = x \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) z^n \tag{13}$$

beschäftigen, wobei x der Parameter ist und die φ nach 2π periodisch sind. Aus den Beweisen wird hervorgehen, daß der Übergang von (6) zu (13) unter sinngemäß entsprechenden Annahmen bloß auf eine Vereinfachung der Schreibweise hinausläuft.

Nach der Theorie der linearen Differentialgleichungen besitzt die lineare Differentialgleichung

$$\ddot{z} + \varphi(t) z = 0, \tag{14}$$

da $\varphi(t)$ periodisch ist, wenigstens eine Eigenlösung von der Gestalt

$$z = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k \exp\left[(\varrho + k) t \sqrt{-1}\right]. \tag{15}$$

Es wird für uns bequem sein, abweichend von der üblichen Normierung, als den charakteristischen Exponent die Zahl ϱ zu bezeichnen. Nach dieser Bezeichnung gehören nicht die rein-imaginären, sondern die reellen Exponenten zu den „stabilen" periodischen Lösungen. Der charakteristische Exponent kommt nur modulo Eins in Betracht.

Ist $n > 1$, so ist natürlich ausdrücklich vorauszusetzen, daß (11) *partikulare* bedingtperiodische Lösungen besitzt; in der Hill-Brownschen Mondtheorie, bei Librationszentren usw. ist diese Bedingung bekanntlich erfüllt. Ich brauche also nicht vorauszusetzen, daß die *allgemeine* Lösung von (11) bedingtperiodisch, d. h. von säkularen Gliedern frei ist. Noch weniger ist es notwendig, daß alle charakteristischen Exponenten voneinander verschieden sein sollen.

Den Fall der Himmelsmechanik können wir bei den asymptotischen Lösungen aus Vorzeichengründen jedoch nicht behandeln. Wir können zwar die Bedingungsgleichungen auflösen und beweisen, daß die bedingtperiodischen Reihen für $t = 0$ absolut konvergent sind. Um aber die Konvergenz für $0 \geqq t > -\infty$ oder für $0 \leqq t < +\infty$ zu beweisen, müssen wir natürlich voraussetzen, daß die imaginären Teile der in der Partikularlösung von (6) auftretenden charakteristischen Exponenten entweder alle $\leqq 0$ oder alle $\geqq 0$ sind und diese Bedingung ist bei den Bewegungsgleichungen bekanntlich nicht erfüllt.

Abgesehen von den „regulären" periodischen Lösungen (Abschnitt IV), beschäftigen wir uns, wie erwähnt, nur mit der folgenden Aufgabe:

ϱ ist ein bekannter charakteristischer Exponent von (14); es wird verlangt, die Lösungen

$$\sum_i \sum_k \lambda_{ik}(x) \exp\left[(i\varrho + k)\, t \sqrt{-1}\right] \tag{16}$$

von (13) zu finden, wenn $|x|$ genügend klein ist.

Wir lösen diese Aufgabe in den folgenden Fällen:

a) $\varrho = 0$ (Abschnitt V);

b) $\varrho = \frac{p}{q}$, $1 \leqq p < q$ (Abschnitt VI);

c) $\varrho = \sigma + \tau\sqrt{-1}$, $\tau \gtrless 0$, $\sigma = \frac{p}{q}$, $0 \leqq p < q$ (Abschnitte VII—XI).

7. Es bleiben daher die beiden Fälle übrig:

d) ϱ ist reell und irrational.

e) $\varrho = \sigma + \tau\sqrt{-1}$, $\tau \gtrless 0$, σ ist reell und irrational.

In der Mondtheorie ist bekanntlich der charakteristische Exponent reell (in unserer Normierung). Ist er auch rational, so kann unsere Aufgabe gelöst werden; zwar sagt Herr Brown[11]), daß dieser Fall [nämlich b)] auszuschließen sei, da sonst die Bedingungsgleichungen eine Unbestimmtheit zeigen; doch ist dies, wie wir sehen werden, ein Versehen (oder wenigstens eine ungewohnte Terminologie). Es ist eine offene Frage, ob unsere Aufgabe im Falle d) (in dem nicht praktischen Sinne des Wortes) gelöst werden kann. [Im Falle e) kann sie ebenso gelöst werden wie im Falle c).]

8. Ich möchte in diesem Zusammenhange ein Versehen von Poincaré erwähnen. Es folgt bekanntlich in einem Gebiete, das in dem Inneren der zugehörigen Hillschen Grenzkurve liegt, aus der Existenz einer definiten Integralinvariante die Poissonsche Stabilität *fast überall*. Poincaré behauptet, es gehe aus der Existenz der asymptotischen Lösungen hervor, daß die kursiv gesetzte Einschränkung nicht weggelassen werden kann. Nun sind in dem Felde, in das die Hillsche Variationskurve eingebettet ist, die charakteristischen Exponenten reell. Folglich liegen die im klassischen Sinne asymptotischen Kurven, falls sie existieren, anderswo. Mithin ist die Frage der Existenz der erwähnten Nullmenge unerledigt. Poincaré wurde offenbar durch seinen Satz Méth. Nouv. I, S. 226 irregeführt.

9. Die Lösung unserer in dem sechsten Punkte gestellten Aufgabe kann auf die Mondtheorie unmittelbar nicht angewandt werden. Denn wir betrachten den charakteristischen Exponent als von vornherein gegeben und variieren ihn nicht mit x, während die Natur der besonderen mondtheoretischen Konstantendeutung eine solche Variierung des charakteristi-

[11]) Amer. Journ. of Math. **15** (1893) S. 250.

schen Exponenten erfordert. Doch kann man den analytischen Kern des Hill-Brownschen Prozesses[12]) folgendermaßen herausschälen:

Man geht von einer periodischen Lösung (2) aus; sie ist die Hillsche Variationskurve. Den von Hill[13]) als Desideratum formalierten direkten Existenzbeweis derselben habe ich anderswo[14]) geführt, mit einer Methode, die auch bei der die Mondparallaxe berücksichtigenden Kurve von Herrn Brown[15]) angewendet werden kann.

Es sei nun die periodische Lösung (2) gegeben. Man macht den Ansatz (5) und erhält so die Differentialgleichungen (6). Die Exponenten sind reell. Sind sie auch rational, so können wir unsere Aufgabe lösen: der Ansatz führt zu einer periodischen Lösung. Wir wiederholen nun mit dieser periodischen Lösung den Prozeß, den wir auf (2) angewendet haben usw. in inf. Es ist natürlich nicht bewiesen, und es ist auch nicht zu erwarten, daß dieses Verfahren in dem analytischen Sinne des Wortes konvergent ist.

10. Es sei schließlich bemerkt, daß analoge Untersuchungen auch in dem komplexen Gebiete möglich sind.

I. Existenzsätze über unendliche implizite Gleichungssysteme.

Hauptsatz. Es sei $\{f_i(x; y_1, y_2, \ldots; \mu_1, \mu_2, \ldots)\}$ eine solche Folge von Potenzreihen von unendlich vielen Veränderlichen, daß es positive Zahlen

$$\alpha; a; b_1, b_2, \ldots; A_1, A_2, \ldots; M_1, M_2, \ldots$$

gibt, derart, daß, wenn $\bar{f}_i$ die beste Majorante von f_i bedeutet, die folgenden Ungleichungen gleichzeitig bestehen:

$$\alpha \leqq \frac{b_i}{M_i}; \quad \bar{f}_i(a; b_1, b_2, \ldots; A_1, A_2, \ldots) \leqq M_i \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Dann besitzt das System

$$y_i = x f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

in dem Bereiche

$$|x| \leqq \min(a, \alpha); \quad |\mu_1| \leqq A_1, \quad |\mu_2| \leqq A_2, \ldots$$

eine und nur eine Potenzreihenlösung

$$\{y_i(x; \mu_1, \mu_2, \ldots)\},$$

die den Bedingungen

$$y_i(0; \mu_1, \mu_2, \ldots) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

[12]) S. z. B. Brown, Amer. Journ. of Math. **17** (1895) S. 318–358.
[13]) Coll. Math. Works I. S. 287. Washington 1905.
[14]) Math. Zeitschr. **24** (1925) S. 259–265.
[15]) Amer. Journ. of Math. **14** (1892), S. 141–166.

genügt; es gelten dabei in dem erwähnten Bereiche die Abschätzungen

$$|\bar{y}_i(x; \mu_1, \mu_2, \ldots)| \leqq b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Aus dem Hauptsatze folgt leicht eine Verallgemeinerung desselben für den Fall, wo man mehrere x hat. Es seien die f_{si} solche Potenzreihen

$$f_{si}(x_1, x_2, \ldots, x; \; y_1, y_2, \ldots; \; \mu_1, \mu_2, \ldots) \quad (s = 1, 2, \ldots, r; \; i = 1, 2, \ldots),$$

daß es positive Zahlen

$$\alpha; a; b_1, b_2, \ldots; \Lambda_1, \Lambda_2, \ldots; M_1, M_2, \ldots$$

gibt, derart, daß

$$\alpha \leqq \frac{b_i}{M_i}; \quad \bar{f}_{si}(a, a, \ldots, a; \; b_1, b_2, \ldots; \; \Lambda_1, \Lambda_2, \ldots) \leqq M_i$$
$$(s = 1, 2, \ldots, r; \; i = 1, 2, \ldots).$$

Dann gibt es ein solches $\beta\,(>0)$, daß das System

$$y_i = \sum_{s=1}^{r} x_s f_{si} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

in dem Bereiche

$$|x_1| \leqq \beta, |x_2| \leqq \beta, \ldots, |x_r| \leqq \beta; \; |\mu_1| \leqq \Lambda_1, |\mu_2| \leqq \Lambda_2, \ldots$$

eine und nur eine Potenzreihenlösung

$$\{y_i(x_1, x_2, \ldots, x_r; \; \mu_1, \mu_2, \ldots)\}$$

besitzt. Es gelten in dem erwähnten Bereiche die Abschätzungen

$$|\bar{y}_i(x_1, x_2, \ldots, x_r; \; \mu_1, \mu_2, \ldots)| \leqq b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

und es verschwinden natürlich alle y, wenn alle x verschwinden.

Um diesen Satz aus dem Hauptsatze abzuleiten, setzen wir zunächst $F_i = \sum_{s=1}^{r} x_s f_{si}$, also

$$y_i = F_i \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Man hat offenbar

$$F_i(\beta, \beta, \ldots, \beta; \; b_1, b_2, \ldots; \; \Lambda_1, \Lambda_2, \ldots) \leqq M_i r \beta \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

wenn

$$0 < \beta \leqq a.$$

Nach dem Hauptsatze besitzt also das System

$$y_i = x_0 F_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

in dem Bereiche [16])

$$|x_0| \leqq \frac{\alpha}{r\beta}; \; |x_1| \leqq \beta, |x_2| \leqq \beta, \ldots, |x_r| \leqq \beta; \; |\mu_1| \leqq \Lambda_1, \; |\mu_2| \leqq \Lambda_2, \ldots$$

[16]) x_0 geht nämlich in die F_i nicht ein.

eine und nur eine Potenzreihenlösung

$$\{y_i(x_0;\quad x_1, x_2, \ldots, x_r;\quad \mu_1, \mu_2, \ldots)\},$$

derart, daß in dem erwähnten Bereiche

$$|\bar{y}_i(x_0;\quad x_1, x_2, \ldots, x_r;\quad \mu_1, \mu_2, \ldots)| \leqq b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Wird nun β derart gewählt, daß $\frac{\alpha}{r\beta} \geqq 1$, so ist damit unsere Behauptung bewiesen.

Wir könnten diese Verallgemeinerung des Hauptsatzes zu Konvergenzbeweisen heranziehen, indem wir $\{b_i\}$ derart wählen könnten, daß $\sum b_i < +\infty$. Es wird aber bequemer sein, den folgenden Spezialfall des verallgemeinerten Hauptsatzes anzuwenden:

Es seien die

$$f_{si}(x_1, x_2, \ldots, x_r;\ y_1, y_2, \ldots;\ \mu_1, \mu_2, \ldots) \quad (s = 1, 2, \ldots, r;\ i = 1, 2, \ldots)$$

solche Potenzreihen, daß es positive Zahlen

$$a;\ b;\ A_1, A_2, \ldots;\ M$$

gibt, derart, daß

$$\bar{f}_{si}(a, a, \ldots, a;\ b, b, \ldots;\ A_1, A_1, \ldots) \leqq M \quad (s = 1, 2, \ldots, r;\ i = 1, 2, \ldots).$$

Dann gibt es ein solches β (> 0), daß das System

$$y_i = \sum_{s=1}^{r} x_s f_{si} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

in dem Bereiche

$$|x_1| \leqq \beta,\ |x_2| \leqq \beta, \ldots, |x_r| \leqq \beta; \quad |\mu_1| \leqq A_1,\ |\mu_2| \leqq A_2, \ldots$$

eine und nur eine Potenzreihen-Lösung

$$\{y_i(x_1, x_2, \ldots, x_r;\ \mu_1, \mu_2, \ldots)\}$$

besitzt. Es gelten dabei die Abschätzungen

$$|\bar{y}_i(x_1, x_2, \ldots, x_r;\ \mu_1, \mu_2, \ldots)| \leqq b \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Wir werden diesen Satz schlechthin als den Existenzsatz zitieren.

Setzt man voraus, daß die f_{si} des Existenzsatzes eine *gemeinsame* Majorante besitzen, so erhält man im besonderen einen Satz, der nach dem Übertragungsprinzip $\int\limits_0^1 \rightarrow \sum\limits_0^\infty$ dem Fundamentalsatze von Herrn Schmidt (l. c.) entspricht.

II. Sätze aus der Theorie der normalen Determinanten.

Es sei $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ik} = 0$ $(i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; i \neq k)$.

Die Matrix $\| a_{ik} \|$ wird normal genannt, wenn[17])

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} | a_{ik} - \delta_{ik} | < +\infty.$$

Dann läßt sich durch Abschnittbildung zu dem Symbole $\det(a_{ik})$ eine Zahl D eindeutig zuordnen.

Man setze $\breve{a}_{ik} = a_{ki}$. Die Matrix $\| a_{ik} \|$ ist mit der transponierten Matrix $\| \breve{a}_{ik} \|$ gleichzeitig normal.

Die Matrix, die in der normalen Matrix $\| a_{ik} \|$ dem Elemente a_{ik} adjungiert ist, ist normal. — Es bezeichne a^{ik} bzw. $\breve{a}^{ik}$ den Wert derjenigen normalen Determinante, die in der Matrix $\| a_{ik} \|$ bzw. $\| \breve{a}_{ik} \|$ dem Elemente a_{ik} bzw. $\breve{a}_{ik}$ adjungiert ist. Dann gilt der Satz:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} | a^{ki} | = O(1); \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} | \breve{a}^{ki} | = O(1).$$

In dieser Arbeit sind die Landauschen Symbole immer so zu verstehen, daß der Stellenzeiger in den beiden Richtungen ins Unendliche wächst und daß die Abschätzung nicht nur für fast alle, sondern auch für alle Werte des Stellenzeigers gilt.

Das System

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{ik} y_k = b_i \qquad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

läßt bei *allen* je beschränkten b_i-Folgen dann und nur dann eine beschränkte Lösung zu, wenn $D \neq 0$. Man erhält aber einen falschen Satz, wenn man das kursiv gesetzte Wort unterdrückt; auf diesem Umstande beruht das Prinzip der Transformation des Kernes; auch ein Versehen von Poincaré, betreffend die periodische Lösbarkeit bzw. periodische Nichtlösbarkeit gewisser Differentialgleichungen, hängt mit diesem Umstande zusammen, wie es aus dem Abschnitt V hervorgeht.

Es gilt aber der folgende Satz: Das obige System läßt bei einer *beliebig festgehaltenen* beschränkten b_i-Folge dann und nur dann eine *eindeutig bestimmte* beschränkte Lösung zu, wenn $D \neq 0$; und zwar man hat dann

$$y_i = \frac{1}{D} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k a^{ki} \qquad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

---

[17]) Wir bezeichnen den absoluten Betrag der Zahl A_{ik} durch $| A_{ik} |$, den Wert der zu der Matrix $\| A_{ik} \|$ gehörigen Determinante, falls er existiert, durch $\det(A_{ik})$

Eine Lösung $\{y_i\}$ des homogenen Systems

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{ik}\, y_k = 0 \qquad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

soll eine Eigenlösung genannt werden, wenn

$$0 < \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |y_k| < +\infty.$$

Das zu der Matrix $\|a_{ik}\|$ gehörende homogene System läßt dann und nur dann Eigenlösungen zu, wenn $D = 0$.

Die Anzahl r der linear unabhängigen Eigenlösungen, die zu $\|a_{ik}\|$ gehören, soll als der Rang von $\|a_{ik}\|$ bezeichnet werden.

Zu $r = 0$ sei $D \neq 0$ zugeordnet.

$\|a_{ik}\|$ und $\|\breve{a}_{ik}\|$ sind vom gleichen Range.

Der Rang ist endlich.

III. Das Prinzip der Transformation des Kernes.

Es sei die Matrix $\|a_{ik}\|$ normal und es sei $\det(a_{ik}) = 0$, also $r \geqq 1$. Es seien

$$\{d_i^{(s)}\}; \qquad \{\breve{d}_i^{(s)}\} \qquad (s = 1, 2, \ldots, r)$$

solche Zahlenfolgen, daß

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |d_i^{(s)}| < +\infty; \qquad \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |\breve{d}_i^{(s)}| < +\infty \qquad (s = 1, 2, \ldots, r).$$

Setzt man dann

$$\alpha_{ik} = a_{ik} - \sum_{s=1}^{r} d_i^{(s)} \breve{d}_k^{(s)} \qquad (i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

so ist $\|\alpha_{ik}\|$ normal, wegen

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_{ik} - \delta_{ik}| \leqq \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_{ik} - \delta_{ik}|$$
$$+ \sum_{s=1}^{r} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |d_i^{(s)} \breve{d}_i^{(s)}| < +\infty.$$

Das Prinzip der Transformation des Kernes besagt, daß die $r + r$ Zahlenfolgen derart gewählt werden können, daß $\det(\alpha_{ik})$ von Null verschieden ausfällt, d. h. daß zu $\|\alpha_{ik}\|$ keine Eigenlösung gehört; und zugleich auch derart, daß diese Elimination der Eigenlösungen durch weniger als $r + r$ aus diesen Zahlenfolgen nicht geleistet werden kann.

IV. Periodische Lösungen der ersten Klasse. Der reguläre Fall.

Es sei die Differentialgleichnng

$$\ddot{z} + \varphi(t) z = x \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) z^n \tag{1}$$

vorgelegt; t ist die reelle unabhängige Veränderliche, x ist ein Parameter,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp(kt\sqrt{-1}), \\ \varphi_n(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^{(n)} \exp(kt\sqrt{-1}), \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{2}$$

sind gegebene Funktionen. Wir setzen voraus, daß

$$\begin{aligned} &\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k| < +\infty; \\ &\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k^{(n)}| < +\infty \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \end{aligned} \tag{3}$$

und daß die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \Big(\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k^{(n)}| \Big) z^n$ einen von Null verschiedenen Konvergenzradius besitzt. Da eine Ähnlichkeitstransformation von z die Gestalt von (1) unverändert läßt, können wir gleich voraussetzen, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k^{(n)}| \Big) \Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \Big)^n < +\infty; \tag{4}$$

statt $\frac{1}{0}$ soll immer 1 gelesen werden.

Versucht man den Ansatz

$$z = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{y_k(x)}{k^2} \exp(kt\sqrt{-1}) \tag{5}$$

und setzt man (2) und (5) in (1) ein, so ergibt die Vergleichung der Koeffizienten der darin beiderseits stehenden Fourierreihen das folgende unendliche nicht lineare System von Bedingungsgleichungen:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{ik} y_k = x \psi_i(y_0, y_1, y_{-1}, \ldots) \qquad (i = 0, \pm 1, \ldots), \tag{6}$$

worin

$$\begin{aligned} a_{0k} &= -\frac{c_{-k}}{k^2} && (k = 0, \pm 1, \ldots), \\ a_{ik} &= -\frac{c_{i-k}}{k^2} && (i, k = \pm 1, \pm 2, \ldots; i \neq k), \\ a_{ii} &= 1 - \frac{c_0}{i^2} && (i = \pm 1, \pm 2, \ldots); \\ \psi_i &= -c_i^{(0)} - \sum_k \frac{c_{i-k}^{(1)}}{k^2} y_k - \sum_k \sum_l \frac{c_{i-k-l}^{(2)}}{k^2 l^2} y_k y_l - \ldots && (i = 0, \pm 1, \ldots). \end{aligned} \tag{7}$$

Da $\{\psi_i\}$ so entsteht, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^{(n)} \exp(k t\sqrt{-1})\Big)\Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{y_k}{k^2}\exp(k t\sqrt{-1})\Big)^n$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\psi_k \exp(k t\sqrt{-1})$$

gesetzt wird, so ist nach (4)

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\overline{\psi}_k(1,1,1,\ldots)<+\infty,$$

um so mehr

$$\overline{\psi}_i(1,1,1,\ldots)=O(1). \tag{8}$$

Andererseits ist die Matrix $\|a_{ik}\|$ normal, da nach (7) und (3)

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|a_{ik}-\delta_{ik}|\leqq 1+|c_0|\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{i^2}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\frac{|c_{i-k}|}{k^2}$$
$$=1+|c_0|\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{i^2}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}|c_i|<+\infty.$$

Setzen wir zunächst voraus, daß

$$D=\det(a_{ik})\neq 0. \tag{9}$$

Dann können wir nach der Theorie der normalen Determinanten das System (6) in der Gestalt

$$y_i=x f_i;\qquad f_i=\frac{1}{D}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\psi_k a^{ki}\qquad (i=0,\pm 1,\ldots) \tag{10}$$

darstellen, wobei $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|a^{ki}|=O(1)$. Mit Rücksicht auf (8) ist also auch $\overline{f}_i(1,1,1,\ldots)=O(1)$. Nach dem Existenzsatze gibt es also ein solches β, daß durch (10) die y_i als solche, in dem Gebiete $|x|<\beta$ reguläre Funktionen definiert werden, daß in diesem Gebiete

$$|y_i(x)|\leqq 1 \qquad (i=0,\pm 1,\ldots). \tag{11}$$

Damit ist die formale Existenz und zugleich auch die Konvergenz von (5) bewiesen. Daß letztere zwei Sachen wesensgleich sind, hat bei einem anderen Problem schon Poincaré[18]) gefunden; bei Poincaré gibt es eine Rekursionsformel, bei uns nicht.

---

[18]) Journ. de Math. (4) 1 (1885), S. 172–196.

Die Existenz und die Stetigkeit der zweiten Ableitung von z folgt aus (5) und (11) unmittelbar noch nicht, wohl aber mit Heranziehung von

$$(1)' \qquad \ddot{z} = -\varphi(t)z + x\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(t)z^n,$$

da wir die Reihe (5) mit Rücksicht auf (4) und (11) in die rechte Seite von (1)′ einsetzen können.

Ist also (9) erfüllt, so sind die $y_i(x)$ eindeutig bestimmte reguläre Funktionen; ist im besonderen $\varphi_0(t)\equiv 0$, so ist mithin $y_i(x)\equiv 0$ $(i=0, \pm 1, \ldots)$, da dann $z\equiv 0$ eine Lösung von (1) darstellt. Anders wird die Sache stehen in dem folgenden Abschnitt, falls man die Zahlenfolgen gehörig normiert.

V. Periodische Lösungen der ersten Klasse. Der Verzweigungsfall.

Es sei jetzt $\det(a_{ik})=0$. Der Rang r von $\|a_{ik}\|$ ist also $\geqq 1$. Es sei zunächst $r=1$.

Es seien

$$(12) \qquad \{d_i\}; \quad \{\breve{d}_i\}$$

solche Zahlenfolgen, daß

$$(13) \qquad \sum_{i=-\infty}^{+\infty}|d_i| < +\infty; \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\breve{d}_k| < +\infty.$$

Setzt man dann

$$(14) \qquad \alpha_{ik} = a_{ik} - d_i\breve{d}_k \qquad (i, k = 0, \pm 1, \ldots),$$

so ist nach dem dritten Abschnitt die Matrix $\|\alpha_{ik}\|$ normal, und nach dem Prinzip der Transformation des Kernes können wir voraussetzen, daß

$$(15) \qquad \Delta = \det(\alpha_{ik}) \neq 0.$$

Es ist nach (14)

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{ik}y_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha_{ik}y_k + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_i\breve{d}_k y_k;$$

setzt man also

$$(16) \qquad x_1 = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\breve{d}_k y_k \qquad \text{(Verzweigungsgleichung)},$$

so kann (10) in der Gestalt

$$(17) \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha_{ik}y_k = x\psi_i + x_1 d_i \qquad (i=0, \pm 1, \ldots)$$

dargestellt werden. Das System (17) kann man aber nach der Theorie der normalen Determinanten mit Rücksicht auf (15) in der Gestalt

$$(18) \qquad y_i = x \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \psi_k \alpha^{ki} + x_1 \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k \alpha^{ki} \quad (i = 0, \pm 1, \ldots)$$

schreiben, wobei

$$(19) \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha^{ki}| = O(1).$$

Man hat nach (8), (13), (19)

$$\frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overline{\psi}_k(1, 1, 1, \ldots) |\alpha^{ki}| = O(1); \qquad \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k \alpha^{ki} = O(1).$$

Nach dem Existenzsatze gibt es also ein solches β, daß die y_i durch (18) als solche, in dem Gebiete $|x| < \beta$; $|x_1| < \beta$ reguläre Funktion von x und x_1 definiert werden, daß in diesem Gebiete

$$(20) \qquad |y_i(x, x_1)| \leqq 1 \qquad (i = 0, \pm 1, \ldots);$$

man hat ferner

$$(21) \qquad y_i(0, 0) = 0 \qquad (i = 0, \pm 1, \ldots).$$

Mit Rücksicht auf (13) und (20) können wir diese $y_i(x, x_1)$ in die Verzweigungsgleichung (16) einsetzen. Es ergibt sich so die Relation

$$(22) \qquad x_1 = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \breve{d}_k y_k(x, x_1).$$

In dem Punkte $x = x_1 = 0$ verschwinden nach (21) die beiden Seiten von (22). Durch (22) wird also x_1 als solche im kurventheoretischen Sinne analytische Funktion von x definiert, welche mit gehöriger Annäherung des Punktes $x = 0$ verschwinden kann bzw. für $x = 0$ erklärt ist und $= 0$. Es sei $x_1(x)$ diese Funktion.

Um feste Vorstellungen zu haben, setzen wir etwa voraus, daß $x_1(x)$ eine solche, bei $x = 0$ algebraisch verzweigte Funktion ist, deren alle bei $x = 0$ liegende Zweige verschwinden für $x = 0$. Es gibt dann ein solches γ, daß $|x_1(x)| < \beta$, wenn $|x| < \gamma$. Ist gleich $\gamma \leqq \beta$, und setzen wir $y_i(x) = y_i(x, x_1(x))$, so ist nach (20)

$$(23) \qquad |y_i|(x)| \leqq 1, \quad \text{wenn } |x| < \gamma \qquad (i = 0, \pm 1, \ldots).$$

Offenbar ist $\{y_i(x)\}$ eine Lösung von (18), also auch von (10). Daraus und aus (23) ergibt sich die Existenz der bei (6) versuchten periodischen Lösung wie vorher.

Ist $r > 1$, so setze man statt (14), (16), (17) usw. bzw.

$$(14)' \qquad \alpha_{ik} = a_{ik} - \sum_{s=1}^{r} d_i^{(s)} \breve{d}_k^{(s)},$$

$$(16)' \qquad x_s = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \breve{d}_k^{(s)} y_k,$$

$$(17)' \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{ik} y_k = x\psi_i + \sum_{s=1}^{r} x_s d_i^{(s)},$$

usw.

VI. Periodische Lösungen der zweiten Klasse.

Setzt man in (1) und (6) $x=0$, so erhält man bzw.

$$(24) \qquad \ddot{\zeta} + \varphi(t)\zeta = 0;$$

$$(25) \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{ik}\eta_k = 0 \qquad (i = 0, \pm 1, \ldots).$$

Nach der Theorie der linearen Differentialgleichungen besitzt (24) wenigstens eine Eigenlösung von der Gestalt

$$(26) \qquad \zeta = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{J_i}{i^2} \exp[(\varrho + i)t\sqrt{-1}].$$

ϱ ist der charakteristische Exponent. Ist $\varrho = 0$, so geht (26) in eine Reihe von der Gestalt

$$(27) \qquad \zeta = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{\eta_i}{i^2} \exp(it\sqrt{-1})$$

über; man überzeugt sich leicht, daß der Ansatz (27) für (24) zu den Bedingungsgleichungen (25) führt; der Fall des vorigen Abschnittes ist also der des verschwindenden charakteristischen Exponenten.

Es sei jetzt

$$\varrho = \frac{p}{q}; \quad 0 < p < q; \quad (p, q) = 1.$$

Zunächst führen wir in (1) neue Bezeichnungen ein; wir setzen

$$C_i = c_{\frac{i}{q}}; \; C_i^{(n)} = c_{\frac{i}{q}}^{(n)}, \quad \text{falls} \quad i \equiv 0 \pmod q;$$

$$C_i = 0; \; C_i^{(n)} = 0, \quad \text{falls} \quad i \not\equiv 0 \pmod q.$$

Dann können wir statt (1) und (2) schreiben:

$$\ddot{z} + \Phi(t)z = x\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(t) z^n;$$

$$(28) \qquad \Phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \exp\frac{kt\sqrt{-1}}{q};$$

$$\Phi_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k^{(n)} \exp\frac{kt\sqrt{-1}}{q}.$$

Wir versuchen den Ansatz

$$z = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{Y_k}{k^2} \exp \frac{k t \sqrt{-1}}{q}. \tag{29}$$

Bis auf die Wahl der t-Einheit, haben wir mit einem schon behandelten Probleme zu tun. Es bleibt zu beweisen übrig, daß die Lösungen, zu welchen der Ansatz (29) führt, sich nicht alle zu Lösungen der ersten Klasse entarten, d. h. daß (29) auch zu solchen Lösungen führt, bei denen ein solches i $[\not\equiv 0 \pmod q]$ existiert, daß $Y_i(x)$ nicht identisch verschwindet; also zu solchen Lösungen, deren primitive Periode größer ist als 2π.

Das System

$$\frac{1}{q^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{ik} Y_k = x \Psi_i \qquad (i = 0, \pm 1, \ldots) \tag{30}$$

soll so zu (28), (29) gehören, wie (6) zu (1), (5) gehört. Dann ist die Matrix $\| A_{ik} \|$ normal und das zu (30) gehörige homogene System, d. h. das System

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{ik} I_k = 0 \qquad (i = 0, \pm 1, \ldots) \tag{31}$$

gehört so zu der Differentialgleichung

$$\ddot{Z} + \Phi(t) Z = 0, \tag{32}$$

wie (25) zu (24); mit anderen Worten, der Ansatz

$$Z = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{I_i}{i^2} \exp \frac{i t \sqrt{-1}}{q} \tag{33}$$

führt zu den Bedingungsgleichungen (31).

Jede Lösung von (24) ist eine Lösung von (32). Daraus folgt, daß jede solche Lösung (24), die von der Gestalt (27) ist, identisch ist mit einer solchen Lösung (32), die von der Gestalt (33) ist. Es entspricht mithin einer jeden solchen Lösung von (25), welche der Bedingung $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{|\eta_k|}{k^2} < +\infty$ genügt, in eindeutiger Weise eine solche Lösung von (31), welche der Bedingung $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{|I_k|}{k^2} < +\infty$ genügt. Diejenigen Lösungen von (31), die in diesem Sinne aus den Lösungen von (25) abgeleitet werden können, sollen als *entartete* Lösungen von (31) bezeichnet werden.

Da $\frac{p}{q}$ $[p \not\equiv 0 \pmod q]$ ein charakteristischer Exponent ist, so besitzt (31) wenigstens eine nicht entartete Eigenlösung. Da eine solche von den entarteten Lösungen offenbar linear unabhängig ist, so ist mithin die

Matrix $\|A_{ik}\|$ von größerem Range als $\|a_{ik}\|$. Ist also $r (\geqq 0)$ der Rang von $\|a_{ik}\|$, so haben wir nach dem Prinzip der Transformation des Kernes (vgl. auch die Schlußbemerkungen der beiden vorigen Abschnitte) zur Behandlung des allgemeinen Ansatzes (29) wenigstens $r+1$ x_s-Parameter einzuführen, während zur vollständigen Behandlung des entarteten Ansatzes (6) r x_s-Parameter genügen. Mithin führt der Ansatz (29) auch zu solchen Lösungen, zu denen der Ansatz (6) nicht führt, q. e. d. Freilich sind dabei die von Herrn Schmidt erwähnten Ausnahmefälle nicht berücksichtigt.

Wir werden diese Schlußweise bei den asymptotischen Lösungen nicht wiederholen. Übrigens deckt sich dort der Begriff der nicht entarteten Lösung mit dem der zu $j=1$ gehörigen Eigenlösung. Auch vorher könnten wir *zwei* Stellenzeiger anwenden und es wäre dann auch hier dies der Fall.

VII. Asymptotische Lösungen. Aufstellung der Bedingungsgleichungen.

Wir gehen zu dem Falle über, wo der charakteristische Exponent nicht reell ist. Es sei

$$(1) \qquad \varrho = \sigma + \tau\sqrt{-1}, \quad \tau \gtrless 0, \quad \sigma = \frac{p}{q}, \quad 0 \leqq p < q.$$

In der Differentialgleichung

$$(2) \qquad \ddot{z} + \varphi(t) z = x \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) z^n,$$

worin

$$(3) \qquad \varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp(kt\sqrt{-1}),$$

$$(4) \qquad \varphi_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^{(n)} \exp(kt\sqrt{-1}) \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

sollen die Bedingungen

$$(5) \qquad |c_k| \leqq \frac{\Gamma}{k^2} \qquad (k = 0, \pm 1, \ldots),$$

$$(6) \qquad |c_k^{(n)}| \leqq \frac{\Gamma_n}{k^2} \qquad (n = 0, 1, \ldots;\ k = 0, \pm 1, \ldots)$$

erfüllt sein $\left(\text{statt } \frac{1}{0} \text{ ist } 1 \text{ zu lesen}\right)$; es soll ferner der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n z^n$ von Null verschieden sein. Dann können wir gleich voraussetzen, daß

$$(7) \qquad \Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n K^{2n} < +\infty,$$

wenn K eine absolute Konstante bedeutet; sie soll später, bei (42), definiert werden.

Setzt man den Ansatz

$$(8) \qquad z = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{y_{ji}(x)}{j^2 i^2} \exp[(j\varrho + i)t\sqrt{-1}],$$

sowie die Reihen (3) und (4) in die Differentialgleichung (2) ein, so ergibt die Vergleichung der Koeffizienten der darin beiderseits stehenden bedingtperiodischen Reihen die Bedingungsgleichungen

$$(9) \qquad \begin{aligned} [\varphi z]_{00} &= x\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n z^n\Big]_{00}, \\ -y_{0i} + [\varphi z]_{0i} &= x\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n z^n\Big]_{0i} \quad (i = \pm 1, +2, \ldots), \\ -\varrho^2 y_{j0} + [\varphi z]_{j0} &= x\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n z^n\Big]_{j0} \quad (j = 1, 2, \ldots), \\ -\Big(\frac{j\varrho + i}{ji}\Big)^2 y_{ji} + [\varphi z]_{ji} &= x\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n z^n\Big]_{ji} \\ & \qquad (j = 1, 2, \ldots;\ i = \pm 1, \pm 2, \ldots). \end{aligned}$$

Es bedeutet dabei $[Q]_{ji}$ den Koeffizient von $\exp[(j\varrho + i)t\sqrt{-1}]$ in der bedingtperiodischen Reihe Q.

Offenbar [vgl. (38)] ist $[\varphi z]_{ji}$ eine Linearform derjenigen y, deren erster Stellenzeiger gleich j ist; wir wollen setzen

$$(10) \qquad \begin{aligned} -y_{00} + [\varphi z]_{00} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (a_{0k}^{(0)} - \delta_{0k}) y_{0k}, \\ -[\varphi z]_{0i} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (a_{ik}^{(0)} - \delta_{ik}) y_{0k} \quad (i = \pm 1, \pm 2, \ldots), \\ -\frac{1}{\varrho^2}[\varphi z]_{j0} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (a_{0k}^{(j)} - \delta_{0k}) y_{jk} \quad (j = 1, 2, \ldots), \\ -\frac{[\varphi z]_{ji}}{\Big(\frac{j\varrho + i}{ji}\Big)^2} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (a_{ik}^{(j)} - \delta_{ik}) y_{jk} \\ & \qquad (j = 1, 2, \ldots;\ i = \pm 1, \pm 2, \ldots). \end{aligned}$$

Die a sind Konstanten, die durch die c bestimmt sind; $\delta_{ii} = 1$, sonst $\delta_{ik} = 0$.

Wir setzen ferner

$$(11) \qquad \begin{aligned} h_{00} &= \Big[\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n z^n\Big]_{00}, \\ h_{0i} &= \Big[\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n z^n\Big]_{0i} \qquad (i = \pm 1, \pm 2, \ldots), \end{aligned}$$

$$h_{j0} = -\frac{1}{\varrho^2}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n z^n\Big]_{j0} \qquad (j=1, 2, \ldots),$$

(11)
$$h_{ji} = -\frac{\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n z^n\Big]_{ji}}{\left(\frac{j\varrho+i}{ji}\right)^2}$$

$$(j=1, 2, \ldots;\ i=\pm 1, \pm 2, \ldots),$$

die h sind also gegebene Potenzreihen der y.

Wir können dann das System (9) folgendermaßen zusammenfassen:

(12)
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{ik}^{(j)} y_{jk} = x h_{ji} \quad (j=0, 1, \ldots;\ i=0, \pm 1, \ldots).$$

Es gelten dabei, wie nachträglich gezeigt werden soll, für alle Werte der Stellenzeiger die Abschätzungen

(13)
$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_{ik}^{(j)} - \delta_{ik}| \leqq \frac{\Theta}{j} \leqq \Theta < +\infty,$$

(14)
$$\bar{h}_{ji}(1, 1, 1, \ldots) \leqq \frac{H}{j} \leqq H < +\infty.$$

VIII. Asymptotische Lösungen. Zerspaltung der Bedingungsgleichungen.

Wir setzen

(15)
$$g_{ji}(x, y_{00}, y_{01}, y_{10}, \ldots) = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(a_{ik}^{(j)} - \delta_{ik}) y_{jk} + x h_{ji}$$

$$(j=0, 1, \ldots;\ i=0, \pm 1, \ldots).$$

Dann ist nach (13) und (14)

(16)
$$\bar{g}_{ji}(1, 1, 1, 1, \ldots) \leqq \sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_{ik}^{(j)} - \delta_{ik}| + \bar{h}_{ji}(1, 1, 1, \ldots) \leqq \frac{\Theta + H}{j}$$

$$(j=0, 1, \ldots;\ i=0, \pm 1, \ldots).$$

Es bedeute ε eine positive Zahl. Nach (16) gibt es ein solches N_ε, daß

(17)
$$\bar{g}_{ji}(1, 1, 1, 1, \ldots) \leqq \varepsilon \quad (j = N_\varepsilon + 1, N_\varepsilon + 2, \ldots;\ i=0, \pm 1, \ldots).$$

Es bedeute j_0 einen festen nicht negativen Stellenzeiger, der nicht größer ist als N_ε. Nach (13) ist die Matrix $\| a_{ik}^{(j_0)} \|$ gewiß normal. Da ϱ ein charakteristischer Exponent ist, so ist der Rang von $\| a_{ik}^{(1)} \|$ größer als Null. Um die Schreibweise zu vereinfachen, setzen wir voraus, daß die $N_\varepsilon + 1$ Matrizen $\| a_{ik}^{(j_0)} \|$ alle vom Range Eins sind. Es seien

(18)
$$\{d_{j_0 i}\};\quad \{\breve{d}_{j_0 i}\} \qquad (j_0 \text{ ist fest})$$

solche Zahlenfolgen, daß

$$(19)\qquad \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |d_{j_0 i}| < +\infty; \quad \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |\breve{d}_{j_0 i}| < +\infty \qquad (j_0 = 0, 1, \ldots, N_\varepsilon).$$

Setzt man also

$$(20)\qquad \alpha_{ik}^{(j_0)} = a_{ik}^{(j_0)} - d_{j_0 i}\, \breve{d}_{j_0 k},$$

so sind die $N_\varepsilon + 1$ Matrizen $\| \alpha_{ik}^{(j_0)} \|$ normal. Nach dem Prinzip der Transformation des Kernes können wir (18) derart wählen, daß

$$(21)\qquad \Delta_{j_0} = \det(\alpha_{ik}^{(j_0)}) \neq 0 \qquad (j_0 = 0, 1, \ldots, N_\varepsilon).$$

Man hat nach (20)

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{ik}^{(j_0)} y_{j_0 k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{ik}^{(j_0)} y_{j_0 k} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{j_0 i}\, \breve{d}_{j_0 k}\, y_{j_0 k}.$$

Setzt man also

$$(22)\qquad x_{j_0} = - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \breve{d}_{j_0 k}\, y_{j_0 k} \qquad (j_0 = 0, 1, \ldots, N_\varepsilon),$$

so hat man nach (12)

$$(23)\qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{ik}^{(j_0)} y_{j_0 k} = x\, h_{j_0 i} + x_{j_0} d_{j_0 i} \quad (j_0 = 0, 1, \ldots, N_\varepsilon;\ i = 0, \pm 1, \ldots),$$

also mit Rücksicht auf (21)

$$(24)\qquad y_{j_0 i} = x \frac{1}{\Delta_{j_0}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_{j_0 k}\, \alpha^{(j_0) k i} + x_{j_0} \frac{1}{\Delta_{j_0}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{j_0 k}\, \alpha^{(j_0) k i},$$
$$(j_0 = 0, 1, \ldots, N_\varepsilon;\ i = 0, \pm 1, \ldots),$$

wobei

$$(25)\qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha^{(j_0) k i}| = O(1) \quad (j_0 = 0, 1, \ldots, N_\varepsilon;\ |i| \to +\infty).$$

Bezeichnet man die rechte Seite von (24) durch

$$(26)\qquad f_{j_0 i}(x; x_{j_0}; y_{00}, y_{01}, \ldots) \qquad (0 \leqq j_0 \leqq N_\varepsilon),$$

so folgt aus (14), (19) und (25) unmittelbar, daß es eine Zahl Z_ε gibt, derart, daß für $|x| \leqq 1$, $|x_{j_0}| \leqq 1$

$$(27)\qquad |\bar{f}_{j_0 i}(x; x_{j_0}; 1, 1, \ldots)| \leqq (|x| + |x_{j_0}|)\, Z_\varepsilon \qquad (0 \leqq j_0 \leqq N_\varepsilon)$$

besteht. Setzt man noch der Symmetrie halber

$$(26)' \qquad f_{ji} = g_{ji} \qquad (j > N_\varepsilon),$$

so kann man das System (12) in der folgenden *gemischten* Gestalt darstellen:

$$(28)\qquad y_{ji} = f_{ji} \qquad (j = 0, 1, \ldots; i = 0, \pm 1, \ldots).$$

Hierbei sind die f_{ji} Potenzreihen der Veränderlichen

$$x;\, x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_{N_\varepsilon};\, y_{00},\, y_{01},\, y_{10},\, \ldots,$$

x ist der Parameter der Differentialgleichung (2), die x_{j_0} sind durch die Verzweigungsgleichungen (22) definiert; nach (27), (17), (26)′ bestehen die Abschätzungen

$$(29) \qquad |\bar{f}_{ji}(x;\, x_j;\, 1,\, 1,\, \ldots)| \leqq (|x| + |x_j|)\, Z_\varepsilon$$
$$(|x| \leqq 1,\, |x_j| \leqq 1;\; j = 0,\, 1,\, \ldots,\, N_\varepsilon;\; i = 0,\, \pm 1,\, \ldots),$$

$$(30) \qquad \bar{f}_{ji}(1,\, 1,\, 1,\, 1,\, \ldots) \leqq \varepsilon$$
$$(j = N_\varepsilon + 1,\, N_\varepsilon + 2,\, \ldots;\; i = 0,\, \pm 1,\, \ldots).$$

IX. Asymptotische Lösungen. Auflösung der Bedingungsgleichungen.

Es sei $0 < \vartheta \leqq 1$. Dann ist nach (29)

$$(31) \qquad \bar{f}_{ji}(\vartheta;\, \vartheta;\, 1,\, 1,\, \ldots) \leqq 2\,\vartheta\, Z_\varepsilon \qquad (0 \leqq j \leqq N_\varepsilon)$$

Wir wählen ε derart, daß $0 < \varepsilon \leqq 1$, legen dann N_ε und Z_ε fest und wählen ϑ so, daß $2\,\vartheta\, Z_\varepsilon \leqq 1$. Dann ist nach (30) und (31)

$$(32) \qquad |\bar{f}_{ji}| \leqq 1 \quad (j = 0,\, 1,\, \ldots;\; i = 0,\, \pm 1,\, \ldots),$$

wenn

$$(33) \qquad |x| \leqq \vartheta;\; |x_0| \leqq \vartheta,\; |x_1| \leqq \vartheta,\, \ldots,\; |x_{N_\varepsilon}| \leqq \vartheta;\; |y_{ji}| \leqq 1.$$

Betrachten wir statt (28) das System

$$(28)' \qquad y_{ji} = \xi\, f_{ji}.$$

Da ξ in die f_{ji} nicht eingeht, und da die b und die M des Hauptsatzes jetzt gleich der Einheit sind, so ist die Zahl $\min(a;\, \alpha)$ dieses Satzes bei dem Systeme (28)′ gleich der Einheit. Da also $\xi = 1$ erlaubt ist, so besitzt das System (28) im Bereiche (33) [die x sind jetzt die μ des Hauptsatzes] eine und nur eine Potenzreihenlösung $\{y_i(x;\, x_0,\, \ldots,\, x_{N_\varepsilon})\}$, derart, daß

$$(34) \qquad |y_{ji}(x;\, x_0,\, \ldots,\, x_{N_\varepsilon})| \leqq 1 \quad (j = 0,\, 1,\, \ldots;\; i = 0,\, \pm 1,\, \ldots).$$

Wir behandeln endlich die Verzweigungsgleichungen (22), ebenso, wie das in dem fünften Abschnitte angegeben ist. Es ergibt sich so, daß es ein Bereich $\mathfrak{B}$ von x gibt, derart, daß durch das System (9) die y_{ji} also solche analytische Funktionen $y_{ji}(x)$ definiert werden, daß in jedem Punkte von $\mathfrak{B}$ die Abschätzung

$$(35) \qquad |y_{ji}(x)| \leqq 1 \quad (j = 0,\, 1,\, \ldots;\; i = 0,\, \pm 1,\, \ldots)$$

besteht.

Nach (1) hat man $\tau \gtreqless 0$. Es sei z. B. $\tau < 0$. Wir setzen dann voraus, daß $t \leqq 0$. Dann hat man für $j > 0$

$$(36) \qquad |\exp[(j\varrho + i)t\sqrt{-1}]| = |\exp[-j\tau t + (j\sigma + i)t\sqrt{-1}]|$$
$$= \exp(-j\tau t) \leqq \exp(-\tau t) \leqq 1;$$

es ist also nach (35)

$$\left|\frac{y_{ji}(x)}{j^2 i^2}\exp[(j\varrho + i)t\sqrt{-1}]\right| \leqq \frac{1}{j^2 i^2} \quad (j = 0, 1, \ldots; i = 0, \pm 1, \ldots)$$

und die Reihe (8) ist auf der durch $\mathfrak{B}$ und durch $t \leqq 0$ bestimmten Punktmenge gleichmäßig konvergent.

Definieren wir eine periodische Funktionenschar $v(t; x)$ mittels der [wegen (35) gleichmäßig konvergenten] Fourierreihe

$$(37) \qquad v(t; x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{y_{0i}(x)}{i^2}\exp(it\sqrt{-1}),$$

so ist nach (8), (35) und (36)

$$|z(t; x) - v(t; x)| \leqq \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\left|\frac{y_{ji}(x)}{j^2 i^2}\exp[(j\varrho + i)t\sqrt{-1}]\right|$$
$$\leqq \exp(-\tau t)\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{j^2 i^2} \to 0, \; t \to -\infty.$$

Mithin ist (8) eine konvergente Darstellung einer asymptotischen Lösung.

Bei Briot-Bouquetschen Problemen, wo die y rekursiv berechnet werden können, gilt bekanntlich in wenigstens einem Blatte von $\mathfrak{B}$

$$(37)' \qquad v(t; x) \equiv 0,$$

doch ist das im allgemeinen nicht wahr.

X. Asymptotische Lösungen. Beweis der Abschätzung (13).

Bedeuten j, i beliebige Stellenzeiger, und nimmt man φ und z aus (3) bzw. (8), so ist

$$(38) \quad [\varphi z]_{ji} = \left[\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp(kt\sqrt{-1})\right)\sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{y_{lk}}{l^2 k^2}\exp[(l\varrho + k)t\sqrt{-1}]\right]_{ji}$$
$$= \left[\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp(kt\sqrt{-1})\right)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{y_{jk}}{j^2 k^2}\exp[(j\varrho + k)t\sqrt{-1}]\right]_{ji}$$
$$= \frac{1}{j^2}\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp(kt\sqrt{-1})\right)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{y_{jk}}{k^2}\exp(kt\sqrt{-1})\right]_{0i}$$
$$= \frac{1}{j^2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{c_{i-k}}{k^2}y_{jk},$$

oder ausführlich geschrieben

$$
\begin{aligned}
&[\varphi z]_{00} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_{-k}}{k^2} y_{0k}, \\
&-[\varphi z]_{0i} = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_{i-k}}{k^2} y_{0k} && (i = \pm 1, \pm 2, \ldots), \\
(39)\quad &-\frac{1}{\varrho^2}[\varphi z]_{j0} = -\frac{1}{\varrho^2 j^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_{-k}}{k^2} y_{jk} && (j = 1, 2, \ldots), \\
&-\frac{[\varphi z]_{ji}}{\left(\frac{j\varrho+i}{ji}\right)^2} = -\frac{i^2}{(j\varrho+i)^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_{i-k}}{k^2} y_{jk} \\
& && (j = 1, 2, \ldots;\ i = \pm 1, \pm 2, \ldots).
\end{aligned}
$$

Die Vergleichung davon mit (10) ergibt

$$
\begin{aligned}
&a_{00}^{(0)} = c_0, \\
&a_{0l}^{(0)} - \delta_{0l} = \frac{c_{-l}}{l^2} && (l = \pm 1, \pm 2, \ldots), \\
&a_{ik}^{(0)} - \delta_{ik} = -\frac{c_{i-k}}{k^2} && (i = \pm 1, \pm 2, \ldots), \\
(40)\quad &a_{0k}^{(j)} - \delta_{0k} = -\frac{c_{-k}}{\varrho^2 j^2 k^2} && (j = 1, 2, \ldots), \\
&a_{ik}^{(j)} - \delta_{ik} = -\frac{i^2 c_{i-k}}{(j\varrho+i)^2 k^2} \quad (j = 1, 2, \ldots;\ i = \pm 1, \pm 2, \ldots), \\
& (k = 0, \pm 1, \ldots).
\end{aligned}
$$

Es ist bekanntlich

$$
(41)\qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{i^2}{k^2 (i-k)^2} = O(1)
$$

$\left(\text{statt } \frac{1}{0} \text{ ist 1 zu lesen}\right)$; es sei K die kleinste solche Zahl, daß

$$
(42)\qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 (i-k)^2} \leqq \frac{K}{i^2} \qquad (i = 0, \pm 1, \ldots)
$$

besteht.

Man hat nach (40), (5), (42) für $j = 0$

$$
\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_{ik}^{(0)} - \delta_{ik}| \leqq 1 + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{|c_{i-k}|}{k^2}
$$

$$
\leqq 1 + \Gamma \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 (i-k)^2} \leqq 1 + \Gamma K \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i^2},
$$

und für $j > 0$

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|a_{ik}^{(j)}-\delta_{ik}| \leqq \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{|c_{-k}|}{|\varrho|^2 j^2 k^2}+\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|\frac{i^2 c_{i-k}}{(j\varrho+i)^2 k^2}\right|$$

$$\leqq \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\Gamma}{|\varrho|^2 j^2 k^4}+\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{i^2\Gamma}{|j\varrho+i|^2 k^2 (i-k)^2}$$

$$\leqq \frac{|\varrho|^{-2}\Gamma\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}k^{-4}}{j^2}+\Gamma K\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|j\varrho+i|^2}.$$

Um (13) zu beweisen, haben wir uns noch mit der letzten Summe zu beschäftigen. Es ist nach (1)

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|j\varrho+i|^2}=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(j\sigma+i)^2+j^2\tau^2}=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(j\frac{p}{q}+i\right)^2+j^2\tau^2}$$

$$=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(\frac{\nu}{q}+i\right)^2+j^2\tau^2},$$

wobei durch ν eine gehörig gewählte Restklasse modulo q repräsentiert wird; es gibt nun nur endlich viele solche Summen, und offenbar sind sie alle $< \frac{\text{konst.}}{j}$, da q und τ^2 feste positive Zahlen bedeuten.

XI. Asymptotische Lösungen. Beweis der Abschätzung (14).

Es ist nach (42)

$$(43)\qquad \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{l^2(j-l)^2k^2(i-k)^2}\leqq\frac{K^2}{j^2 i^2}\qquad (j=0,1,\ldots;\ i=0,\pm 1,\ldots).$$

Sind Q_1 und Q_2 solche Funktionen, für welche die Operationen $[\ ]_{ji}$ erklärt sind, so sind die letzteren offenbar auch für das Produkt $Q_1\cdot Q_2$ erklärt und wir können (43) folgendermaßen deuten[19]): Ist

$$|[Q_1]_{ji}|\leqq\frac{1}{j^2 i^2},\quad |[Q_2]_{ji}|\leqq\frac{1}{j^2 i^2}\quad \text{(natürlich für alle } j \text{ und } i\text{)},$$

so ist

$$|[Q_1\cdot Q_2]_{ji}|\leqq\frac{K^2}{j^2 i^2}.\quad \text{Also}$$

---

[19]) Vgl. analoge Anwendungen von (41) bei Riemann, Werke, 2. Aufl. (1892), S. 250 und bei Lütkemeyer, Diss. Göttingen (1902).

A) Ist $|[Q_\nu]_{ji}| \leqq \frac{1}{j^2 i^2}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, so ist

$$|[Q_1 \cdot Q_2 \cdots Q_n]_{ji}| \leqq \frac{K^{2(n-1)}}{j^2 i^2}.$$

B) Ist $|[Q_\nu]_{ji}| \leqq \frac{L_\nu}{j^2 i^2}$ $(\nu = 1, 2)$, so ist

$$|[Q_1 \cdot Q_2]| \leqq \frac{L_1 L_2 K^2}{j^2 i^2}.$$

Wir setzen

$$(8)' \qquad \tilde{z}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{j^2 i^2} \exp\left[(j\varrho + i)\, t \sqrt{-1}\right]$$

und

$$(4)' \qquad \tilde{\varphi}_n(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |c_i^{(n)}| \exp\left(i t \sqrt{-1}\right) \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Dann ist nach A)

$$(44) \qquad [\tilde{z}^n]_{ji} \leqq \frac{K^{2(n-1)}}{j^2 i^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Andererseits hat man nach (5) und (4)′

$$(45) \qquad [\tilde{\varphi}_n]_{ji} \leqq \frac{\Gamma_n}{j^2 i^2} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Aus (44) und (45) ergibt sich nach B)

$$(46) \qquad [\tilde{\varphi}_n \tilde{z}^n]_{ji} \leqq \frac{\Gamma_n K^{2n}}{j^2 i^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Da (46) nach (45) auch für $n = 0$ besteht, so ist

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [\tilde{\varphi}_n \tilde{z}^n]_{ji} \leqq \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n K^{2n}}{j^2 i^2},$$

d. h. nach (7) offenbar

$$(47) \qquad \left[\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_n \tilde{z}^n\right]_{ji} \leqq \frac{\Omega}{j^2 i^2},$$

da alle Koeffizienten $\geqq 0$.

Es ist also nach (11)

$$\bar{h}_{0i}(1, 1, 1, \ldots) \leqq \left[\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_n \tilde{z}^n\right]_{0i} \leqq \frac{\Omega}{i^2} \qquad (i = 0, \pm 1, \ldots),$$

$$\bar{h}_{j0}(1, 1, 1, \ldots) \leqq |\varrho|^{-2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_n \tilde{z}^n\right]_{j0} \leqq \frac{|\varrho|^{-2}\, \Omega}{j^2} \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

und für die übrigen h

$$\bar{h}_{ji}(1,1,1,\ldots) \leqq \frac{\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_n \tilde{z}^n\right]_{ji}}{\left|\frac{j\varrho+i}{ji}\right|^2} \leqq \frac{\Omega}{|j\varrho+i|^2}$$

$$= \frac{\Omega}{(j\sigma+i)^2+j^2\tau^2} \leqq \frac{\Omega}{j^2\tau^2} < \frac{\text{konst}}{j}.$$

Anhang.

Zur Hilbertschen Theorie der unendlich vielen Veränderlichen.

Es bedeute $\{f_i(x; y_1, y_2, \ldots)\}$ eine solche Folge von reellen Potenzreihen, daß

$$(1) \qquad \sum_i [\bar{f}_i(a; b, b, \ldots)]^2 < +\infty, \qquad a > 0, \quad b > 0.$$

Es bedeute $\|a_{ik}\|$ die Matrix einer reellen beschränkten[20]) Bilinearform, die eine (eindeutig bestimmte, reelle) beschränkte Reziproke besitzen soll; es bezeichne $\|b_{ik}\|$ die Matrix der letzteren. — Wir behaupten, daß das nicht lineare System

$$(2) \qquad \sum_k a_{ik} y_k(x) = x f_i(x; y_1(x), y_2(x), \ldots)$$

in einem gewissen Intervalle

$$(3) \qquad -\beta < x < \beta \qquad (\beta \leqq a)$$

eine und nur eine reelle reguläre Lösung besitzt, derart, daß

$$(4) \qquad \sum_i [y_i(x)]^2 < \text{konst},$$

falls (3) erfüllt ist.

Betrachten wir das lineare System

$$(5) \qquad \sum_k a_{ik} y_k = x f_i(x; \eta_1, \eta_2, \ldots),$$

wobei x und die η reelle, den Ungleichungen

$$(6) \qquad |x| \leqq a; \quad |\eta_1| \leqq b, \quad |\eta_2| \leqq b, \ldots$$

genügende Zahlen bedeuten. Man hat nach (1)

$$(7) \qquad \sum_i [f_i(x; \eta_1, \eta_2, \ldots)]^2 < \text{konst},$$

falls (6) erfüllt ist. (5) wird nach bekannten Sätzen durch

$$(8) \qquad y_i = x \sum_k b_{ik} f_k(x; \eta_1, \eta_2, \ldots)$$

---

[20]) Vgl. E. Schmidt, Rend. Palermo 25 (1908), S. 74–77.

aufgelöst, wobei

(9) $$\sum_k b_{ik}^2 = O(1).$$

Nach bekannten Sätzen ist dabei

(10) $$\sum_i y_i^2 < \text{konst},$$

falls (6) erfüllt ist. Wir setzen

(11) $$\Phi_i(x; \eta_1, \eta_2, \ldots) = \sum_k b_{ik} f_k(x; \eta_1, \eta_2, \ldots).$$

Das System (2) kann nach (8) und (11) in der Gestalt

(12) $$y_i(x) = x\, \Phi_i(x; y_1(x), y_2(x), \ldots)$$

geschrieben werden, wobei nach (11), (1) und (9)

(13) $$\overline{\Phi}_i(a; b, b, \ldots) = O(1).$$

Nach dem Existenzsatze besitzt also (12) in einem Gebiete (3) eine und nur eine reguläre Lösung; (4) ergibt sich aus (10), da nach dem Existenzsatze $|y_i(x)| \leqq b$; die Realität ergibt sich daraus, daß die Teilsummen der $y_i(x)$ aus (12) rekursiv berechnet werden können.

Man beachte, daß die Φ_i nicht eine *gemeinsame* Majorente zu besitzen brauchen [vgl. die Andeutungen von Herrn Schmidt[5])].

Der Fall, wo das System $\sum_k a_{ik} y_k = 0$ eine endliche Anzahl von linear unabhängigen Eigenlösungen besitzt (Punktspektrum), läßt sich mit Hilfe der Transformation des Kernes auf den regulären Fall zurückführen. Es hängt freilich dann von den Verzweigungsgleichungen ab, ob man zum Schluß Reelles erhält.

In den nicht behandelten Fällen (Häufungsstelle und Streckenspektrum) können analoge Sätze nach Herrn Hellinger[21]) nicht bestehen.

Wegen Anwendungen verweise ich auf eine Arbeit von Herrn Lichtenstein[22]), worin auf Grund der Hilbertschen linearen Sätze lineare Differentialgleichungen behandelt werden.

---

[21]) Diss., Göttingen (1907), S. 20.

[22]) Rend. Palermo 38 (1914), S. 113–166. Vgl. Gött. Nachr. 1919, S. 171.

(Eingegangen am 1. 8. 1925.)