Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes.

Von

H. Brandt in Aachen.

Durch Probleme aus der Theorie der quaternären quadratischen Formen bin ich schon vor längerer Zeit auf eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes geführt worden[1]), die auch auf anderen Gebieten von Bedeutung sein dürfte — erscheint sie doch überhaupt als eine naturgemäße und sogar notwendige Ergänzung zur gewöhnlichen Gruppentheorie —, weshalb ich mir erlaube, diese Begriffsbildungen im folgenden zu entwickeln. Dabei wird von den Untersuchungen aus der Zahlentheorie der quadratischen Formen, die dazu die Veranlassung gaben, nichts gebraucht werden, sondern alles auf einfache Postulate gegründet.

Es sei also eine endliche[2]) Menge von Elementen $A, B, C \dots$ und zwischen ihnen ein *Verknüpfungsgesetz* (*Komposition*, *Multiplikation*) gegeben, das, auf gewisse geordnete Paare von Elementen A, B angewandt, ein drittes Element C liefert, auf gewisse andere geordnete Paare von Elementen A, B dagegen nicht angewandt werden kann. Im ersten Fall heißt *A mit B komponierbar*, und C heißt *das aus A und B komponierte Element* oder auch *das Produkt aus A und B* und wird durch $C = AB$ bezeichnet. Im zweiten Falle heißt *A nicht mit B komponierbar* und ein komponiertes Element oder ein Produkt AB existiert nicht. (Hier wäre die Einführung eines neuen Elementes Null als Symbol für bisher nicht existierende Produkte möglich, aber im allgemeinen doch von geringem Vorteil, weshalb wir davon absehen.)

[1]) Vgl. hierzu „Der Kompositionsbegriff bei den quaternären quadratischen Formen", Math. Ann. 91 (1924), S. 313, sowie einen Vortrag auf der Tagung der Schweizer Naturforschenden Gesellschaft am 2. Oktober 1924, Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft 1924, II. Teil, S. 102 oder L'Enseignement mathématique 24 (1925), S. 130.

[2]) Die meisten Sätze gelten auch für abzählbar unendlich viele Elemente.

Eine solche Menge miteinander verknüpfter Elemente soll *Gruppoid* heißen, wenn die folgenden vier Postulate erfüllt sind.

I. *Wenn zwischen drei Elementen A, B, C eine Beziehung $AB = C$ besteht, so ist jedes der drei Elemente A, B, C durch die beiden andern eindeutig bestimmt.*

II. *Wenn AB und BC existiert, so existiert auch $(AB)C$ und $A(BC)$, wenn AB und $(AB)C$ existiert, so existiert auch BC und $A(BC)$, wenn BC und $A(BC)$ existiert, so existiert auch AB und $(AB)C$, und jedesmal ist $(AB)C = A(BC)$, so daß dafür auch ABC geschrieben werden kann.*

Aus diesen *Assoziationsgesetzen* schließt man leicht, daß bei Produkten aus beliebig vielen Elementen sowohl Existenz wie Wert allein durch die Reihenfolge der Elemente bestimmt sind, so daß keine Klammern gesetzt zu werden brauchen.

III. *Für irgendein Element A existieren stets die folgenden eindeutig bestimmten Elemente, die Rechtseinheit E, die Linkseinheit E' und das inverse Element $\bar{A}$, derart, daß die Beziehungen bestehen: $AE = A$, $E'A = A$, $\bar{A}A = E$.*

Wegen II kommen dazu noch die weiteren $A\bar{A} = E'$, $E\bar{A} = \bar{A}$, $\bar{A}E' = \bar{A}$ sowie $EE = E$ und $E'E' = E'$. Demnach ist A das inverse Element von $\bar{A}$, so daß man auch von *zwei zueinander inversen Elementen* sprechen kann, und Rechtseinheit und Linkseinheit vertauschen sich beim Übergang zum inversen Element.

Die Gleichung $EE = E$ ist offenbar für die Einheiten charakteristisch. In Verbindung mit II und I zeigt sie, daß jede Einheit E Rechtseinheit ist für alle Elemente A, für die AE, und Linkseinheit für alle Elemente B, für die EB existiert.

Die Anzahl r der verschiedenen Einheiten des Gruppoids wird als *Rang* bezeichnet. Gruppoide vom Rang 1 sind offenbar Gruppen.

Die Einheiten gestatten die Bedingungen der Komponierbarkeit sehr einfach zu formulieren:

Zwei Elemente A, B sind in dieser Reihenfolge dann und nur dann komponierbar, wenn die Rechtseinheit von A mit der Linkseinheit von B identisch ist.

Die Existenz des inversen Elementes ergibt: Wenn für drei Elemente A, B, C eine Gleichung $AB = C$ besteht, so gilt gleichzeitig $\bar{A}C = B$, $C\bar{B} = A$, $\bar{B}\bar{A} = \bar{C}$, $\bar{C}A = \bar{B}$, $B\bar{C} = \bar{A}$. Demnach darf das inverse Element $\bar{A}$ auch durch A^{-1} bezeichnet werden, und die Produkte AA^{-1} oder $A^{-1}A$ sind nur da zu berücksichtigen, wo sie für sich allein stehen, während sie sonst immer fortgelassen werden dürfen. Ist $AB \ldots M = N$ ein Produkt aus beliebig vielen Elementen, so hat man offenbar für das inverse Element $N^{-1} = M^{-1} \ldots B^{-1} A^{-1}$.

Aus dem Bestehen einer Kompositionsgleichung $AB = C$ ergeben sich eine Reihe von Folgerungen für die zugehörigen Einheiten von A, B, C, $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$. Man findet nämlich die sechs Tatsachen, deren jede auch umgekehrt für die Möglichkeit der Gleichung $AB = C$ hinreicht: B und C, $\bar{C}$ und $\bar{A}$, A und $\bar{B}$ haben paarweise gleiche Rechtseinheiten, $\bar{B}$ und $\bar{C}$, C und A, $\bar{A}$ und B haben paarweise gleiche Linkseinheiten (die übrigens den drei Rechtseinheiten entsprechend gleich sind).

Der bequemeren Ausdrucksweise wegen nennen wir Elemente, welche dieselbe Rechtseinheit haben, *einander rechts*, Elemente, welche dieselbe Linkseinheit haben, *einander links* und Elemente, welche dieselbe Rechts- und dieselbe Linkseinheit haben, *einander doppelt zugehörig*.

Endlich wird noch die Forderung erhoben:

IV. *Für irgend zwei Einheiten E, E' gibt es stets Elemente A, so daß E Rechtseinheit und E' Linkseinheit von A ist.*

Die sämtlichen derartigen Elemente A sind nach der eben eingeführten Bezeichnung einander doppelt zugehörig. Sind P und Q zwei feste Elemente derartig gewählt, daß P die Rechtseinheit E' und Q die Linkseinheit E hat, so existiert PAQ, wie auch immer A der obigen Bedingung gemäß gewählt ist. Alle die Elemente $PAQ = B$ sind aber verschieden voneinander und haben mit P die Links- und mit Q die Rechtseinheit gemeinsam. Ist andererseits B ein beliebiges Element, so wähle man nach dem letzten Postulat unter den B links zugehörigen Elementen P so aus, daß die Rechtseinheit E' ist, und unter den B rechts zugehörigen Elementen Q so, daß die Linkseinheit E ist. Dann existiert das Element $P^{-1} B Q^{-1}$ und ist unter den A enthalten, so daß B durch die Formel PAQ geliefert wird.

Verschiedene Komplexe einander doppelt zugehöriger Elemente lassen sich also stets eineindeutig aufeinander beziehen. Die Anzahl der einem Element doppelt zugehörigen Elemente hat daher für jedes Element denselben Wert. Diese Anzahl g wird als *Ordnung* des Gruppoids bezeichnet. Die Anzahl der rechts und auch der links zugehörigen Elemente ist ebenfalls für jedes Element dieselbe und gleich rg, die Anzahl aller Elemente des Gruppoids also $r^2 g$.

Die sämtlichen einer Einheit doppelt zugehörigen Elemente bilden offenbar eine Gruppe. Wir nennen daher solche Elemente *Gruppenelemente*. Die verschiedenen Gruppen, welche auf diese Weise den verschiedenen Einheiten entsprechen, sind zueinander homomorph. Sind nämlich E, E'

zwei beliebige Einheiten, ist P ein Element, das die Rechtseinheit E, die Linkseinheit E' hat und durchläuft A die Gruppe der sämtlichen der Einheit E doppelt zugehörigen Elemente, so durchläuft $PA\bar{P}$ eine isomorphe Gruppe, nämlich die Gruppe der der Einheit E' doppelt zugehörigen Elemente.

Ersetzt man in einer Kompositionsgleichung $AB = C$ A durch A', B durch B', wobei A und A', ebenso B und B' einander doppelt zugehörig sind, so existiert auch $A'B' = C'$, und C und C' sind ebenfalls einander doppelt zugehörig. Demnach bilden die Komplexe einander doppelt zugehöriger Elemente selbst ein Gruppoid, und zwar ein solches von der Ordnung 1. Die Einheiten in diesem Gruppoid sind die Gruppen der den Einheitselementen doppelt zugehörigen Elemente.

Ein Gruppoid von derselben Struktur läßt sich auch aus einzelnen Elementen konstruieren. Wählt man nämlich, von einem Einheitselement E ausgehend, unter den rechts zugehörigen Elementen für jede Einheit E_i' gerade ein links zugehöriges Element A_i aus, so bilden die Elemente $A_i\bar{A}_k$ offenbar ein Gruppoid von der Ordnung 1, das wir *homomorph* zu dem vorigen Gruppoid nennen können, weil sich die Elemente beider Gruppoide eineindeutig in einfacher Weise entsprechen und dies gegenseitige Entsprechen bei Kompositionen erhalten bleibt.

Wenn die Elemente eines Gruppoids $\mathfrak{H}$ sämtlich in dem Gruppoid $\mathfrak{G}$ enthalten sind, so soll $\mathfrak{H}$ ein *Teilgruppoid* von $\mathfrak{G}$ heißen; sind dabei alle Einheiten von $\mathfrak{G}$ auch in $\mathfrak{H}$ enthalten, so wird das Teilgruppoid auch *Untergruppoid* genannt. Wählt man in der Gruppe $\mathfrak{g}$ der der Einheit E doppelt zugehörigen Elemente eine Untergruppe $\mathfrak{h}$ von der Ordnung h aus, und haben die Elemente A_i die vorhin angegebene Bedeutung, so bilden die in den sämtlichen Komplexen $A_i\mathfrak{h}\bar{A}_k$ enthaltenen Elemente ein Untergruppoid von der Ordnung h. Man sieht auch leicht, daß jedes Untergruppoid bei geeigneter Auswahl der Untergruppe $\mathfrak{h}$ und der Elemente A_i in dieser Weise darstellbar ist. Die Komplexe $A_i\mathfrak{h}\bar{A}_k$ selbst bilden natürlich wieder ein Gruppoid von der Ordnung 1, das zu den früheren Gruppoiden von der Ordnung 1 homomorph ist.

Die Komplexe $A_i\mathfrak{h}\bar{A}_k$ bilden aber auch ein Gruppoid, wenn die A_i ganz beliebige zu E rechts zugehörige Elemente sind. Man darf dann aber zwei Komplexe noch nicht komponierbar nennen, wenn die Elemente des ersten mit den Elementen des zweiten komponiert werden können, sondern erst dann, wenn die komponierten Elemente selbst wieder gerade einen dieser Komplexe bilden. Die Rolle der Einheiten spielen offenbar die Komplexe $A_i\mathfrak{h}\bar{A}_i$. Einem beliebigen Komplex $A_i\mathfrak{h}\bar{A}_k$ ist der Einheitskomplex $A_i\mathfrak{h}\bar{A}_i$ links, der Einheitskomplex $A_k\mathfrak{h}\bar{A}_k$ rechts zugehörig, während der Komplex $A_k\mathfrak{h}\bar{A}_i$ dazu invers ist. Die Gültigkeit der vier

Postulate für das aus den Komplexen gebildete Gruppoid ergibt sich durch Zurückgehen auf die in den Komplexen enthaltenen Elemente.

Es soll noch die Ordnung γ und der Rang ϱ bei diesem Gruppoid bestimmt werden. Das Produkt $\varrho\gamma$ gibt an, wieviel verschiedene der Komplexe $A_i \mathfrak{h} \bar{A}_k$ demselben Einheitskomplex, z. B. $\mathfrak{h}$ rechts zugehören. Ist A ein Element aus einem derartigen Komplex, so muß dieser mit dem Komplex $A\mathfrak{h}$, also auch mit einem Komplex $A_j\mathfrak{h}$ identisch sein. Da nun jeder Komplex $A_j\mathfrak{h}$ h verschiedene zu E rechts zugehörige Elemente enthält, zwei dieser Komplexe aber entweder dieselben oder gar kein gemeinsames Element enthalten und es im ganzen rg zu E rechts zugehörige Elemente gibt, so ist die Anzahl der verschiedenen Komplexe $A_j\mathfrak{h}$ gleich $\frac{rg}{h}$, demnach gilt

$$\varrho\gamma = \frac{rg}{h}.$$

Die Ordnung γ ist gleich der Anzahl derjenigen dieser Komplexe $A_j\mathfrak{h}$, welche dem Einheitskomplex $\mathfrak{h}$ gleichzeitig auch links zugehören, so daß $\mathfrak{h} A_j \mathfrak{h} = A_j \mathfrak{h}$, welche Beziehung gleichwertig ist mit $\mathfrak{h} A_j = A_j \mathfrak{h}$. Alle dieser Bedingung genügenden Elemente A_j gehören der Gruppe $\mathfrak{g}$ der der Einheit E doppelt zugehörigen Elemente an und bilden selbst eine Gruppe $\mathfrak{n}$, nämlich den Normalisator[3]) von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$. Die Anzahl γ der verschiedenen Komplexe $A_j\mathfrak{h}$ ist also gleich dem Index von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{n}$. Wird die Ordnung von $\mathfrak{n}$ durch n bezeichnet, so hat man daher

$$\gamma = \frac{n}{h}$$

und wegen des Ausdruckes für $\varrho\gamma$

$$\varrho = \frac{rg}{n}.$$

Diese Betrachtungen gelten auch, wenn das ursprüngliche Gruppoid $\mathfrak{G}$ den Rang $r = 1$ hat, also mit der Gruppe $\mathfrak{g}$ der der Einheit E doppelt zugehörigen Elemente zusammenfällt. Ist dann noch $n = g$, $\mathfrak{h}$ also Normalteiler von $\mathfrak{g}$, so wird $\varrho = 1$, das entstehende Gruppoid ist also ebenfalls eine Gruppe, nämlich die zu $\mathfrak{h}$ komplementäre Gruppe oder Faktorgruppe $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Wenn $\mathfrak{h}$ nicht Normalteiler von $\mathfrak{g}$ ist, tritt an die Stelle der Faktorgruppe ein Gruppoid, dessen Begriff somit hier als Verallgemeinerung des Begriffs der Faktorgruppe erscheint.

Wir werden deshalb allgemein das von den Komplexen $A_i \mathfrak{h} \bar{A}_k$ gebildete Gruppoid das zur Gruppe $\mathfrak{h}$ im Gruppoid $\mathfrak{G}$ *komplementäre Gruppoid* oder *Faktorgruppoid* nennen und durch $\mathfrak{G}/\mathfrak{h}$ bezeichnen.

[3]) Siehe etwa A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung (1923), S. 38.

Wenn man die Elemente des Gruppoids 𝔊 in geeigneter Weise in ein quadratisches Schema von $rg \times rg$ Feldern, und zwar jedes der rg Elemente g-mal einträgt, so erhält man eine *Kompositionstafel*, welche folgende bemerkenswerte Eigenschaft hat: Wählt man in dem Schema vier Felder, welche nicht notwendig voneinander verschieden zu sein brauchen, mit den Elementen E, A, B, C, von denen E Einheit ist[4]), so aus, daß das erste und zweite, ebenso das dritte und vierte Feld je einer Zeile, das erste und dritte, ebenso das zweite und vierte Feld je einer Spalte angehören, so ist A mit B komponierbar, und das komponierte Element AB ist gleich C [5]).

Man kann nämlich das Schema so ausfüllen, daß diese Eigenschaft gewiß immer dann gilt, wenn das erste Feld ein ganz bestimmtes ist. Man braucht nur in dies Feld eine beliebige Einheit, in dessen Zeile die rechts, in dessen Spalte die links zugehörigen Elemente einzutragen. Ist dann aus der Zeile ein erstes, aus der Spalte ein zweites Element gegeben, so trägt man das offenbar existierende, aus beiden Elementen komponierte Element da ein, wo sich die Spalte des ersten und die Zeile des zweiten Elements treffen. Füllt man das ganze Schema in dieser Weise aus, so ergeben die Assoziationsgesetze leicht die allgemeine Gültigkeit der obigen Regel.

In der Kompositionstafel enthält eine Zeile einander rechts, eine Spalte einander links zugehörige Elemente, und zwar diese immer sämtlich und jedes Element nur einmal. Zwei Spalten oder zwei Zeilen unterscheiden sich entweder nur durch die Anordnung ihrer Elemente oder haben überhaupt kein Element gemeinsam. Irgend g Elemente, die einander doppelt zugehören, finden sich in g Zeilen und in g Spalten, also genau in den g^2 Feldern, in denen diese Zeilen und Spalten zusammentreffen.

Da man in der Kompositionstafel die Zeilen und auch die Spalten beliebig anordnen darf, so kann man die rg Felder, welche Einheitselemente enthalten, in die von links oben nach rechts unten verlaufende Diagonale bringen. Dann enthalten Felder, welche spiegelbildlich zur Diagonale stehen, zueinander inverse Elemente. Trifft man dabei die Anordnung so, daß immer die g Felder mit derselben Einheit in der Diagonale aufeinander folgen, so ist damit eine Einteilung des Schemas in quadratische Bezirke von je g^2 Feldern gegeben, und jeder Bezirk enthält g verschiedene einander doppelt zugehörige Elemente. Die Einteilung in Bezirke gibt zugleich die Kompositionstafel für das von den Komplexen dieser Elemente gebildete Gruppoid.

---

[4]) Ist E beliebig, so gilt $A\bar{E}B = C$.

[5]) Vgl. hierzu [1]).

Die Anordnung der Kompositionstafel läßt sich aber noch weiter verfeinern. Ist nämlich $\mathfrak{h}$ wieder eine Untergruppe der Ordnung h aus der Gruppe $\mathfrak{g}$ der der Einheit E doppelt zugehörigen Elemente, so permutiere man die Spalten so, daß in einer das Element E enthaltenden Zeile die Elemente nach den Komplexen $A_i \mathfrak{h}$ geordnet werden. Permutiert man gleichzeitig die Zeilen in derselben Weise, so daß die Einheitselemente in der Diagonale bleiben, so sind auch in der Spalte, welche die ausgewählte Zeile in einem Diagonalfeld trifft, die Elemente nach den Komplexen $\mathfrak{h} \bar{A}_i$ geordnet. Damit ist eine quadratische Einteilung in Unterbezirke von je h^2 Feldern gegeben, und jeder Unterbezirk enthält die h Elemente eines Komplexes $A_i \mathfrak{h} \bar{A}_k$. Diese Einteilung in Unterbezirke kann gleichzeitig wieder als Kompositionstafel für das komplementäre Gruppoid $\mathfrak{G} / \mathfrak{h}$ angesehen werden.

Bei den Gruppen ist die Kompositionstafel unter dem Namen Gruppentafel bekannt. Man sollte hier aber die Elemente fortlassen, welche die Eingänge der Zeilen und Spalten bezeichnen[6]), weil sonst unter den Einheitselementen der Tafel eins in unnötiger Weise bevorzugt wird und somit ihre eleganten Eigenschaften verdunkelt werden.

---

[6]) Siehe etwa a. a. O. [3]), S. 3.

(Eingegangen am 12. 12. 1925.)