Über die Transzendenz gewisser dyadischer Brüche.

Von

P. E. Böhmer in Dresden.

Einleitung.

Eine nur aus Nullen und Einsen gebildete unendliche Folge α_k, $[k = 0, 1, 2, \ldots]$, definiert eine Zahl

$$(\mathrm{I}) \qquad u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^{k+1}}$$

des abgeschlossenen Intervalles $(0, 1)$ und weiter eine zweite unendliche Folge $w^{(m)}$, $[m = 1, 2, 3, \ldots]$, deren Glieder

$$(\mathrm{II}) \qquad w^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k, \qquad 0 \leqq w^{(m)} \leqq 1,$$

die relative Abschnittshäufigkeit der Eins in der Folge α_k bedeuten[1]). Umgekehrt bilden die Koeffizienten der dyadischen Entwicklung einer reduzierten Irrationalzahl u, $[0 < u < 1]$,

$$(\mathrm{III}) \qquad \alpha_k = [2^{k+1} u] - 2[2^k u],$$

unter $[x]$ die größte ganze Zahl $\leqq x$ verstanden, eine unendliche Folge von Nullen und Einsen, der vermöge (II) eine $w^{(m)}$-Folge zugeordnet ist. Von besonderem Interesse ist nun der Fall, daß die $w^{(m)}$-Folge einen Grenzwert

$$(\mathrm{IV}) \qquad w = \lim_{m=\infty} w^{(m)}$$

besitzt.

Es sei w eine beliebig vorgegebene reduzierte Irrationalzahl, $[0 < w < 1]$; *dann ist*[2])

$$\alpha_k = [k w + w] - [k w] = \begin{cases} 0 \ \textit{oder} \\ 1 \end{cases}$$

---

[1]) Vgl. Böhmer, Berichte der math.-phys. Kl. d. Sächs. Akademie **75** (1923), S. 91f.

[2]) Vgl. dieselben Berichte **76** (1924), S. 149f.

und somit

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[k w + w] - [k w]}{2^{k+1}} \tag{1}$$

ein dyadischer Bruch; da hier

$$w^{(m)} = \frac{[m w]}{m}$$

ist, besitzt die Folge $w^{(m)}$ den Grenzwert w.

In der nachfolgenden Untersuchung beweise ich das

Theorem. *Sind die Teilnenner des regelmäßigen Kettenbruches für w unbeschränkt, so ist die durch* (1) *definierte Zahl u transzendent.*

§ 1.

Hilfssätze über $[r w]$.

Der regelmäßige Kettenbruch für die reduzierte Irrationalzahl w habe die Gestalt

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1|}{|a_n} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}, \tag{2}$$

wo die a_n natürliche Zahlen sind. Werden die Zahlen p_n und q_n durch die Differenzengleichungen

$$\begin{cases} p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1}, \\ q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1} \end{cases} \tag{3}$$

und die Nebenbedingungen

$$\begin{cases} p_0 = 0, \quad p_1 = 1, \\ q_0 = 1, \quad q_1 = a_1 \end{cases} \tag{3a}$$

bestimmt, so ist

$$w_n = \frac{p_n}{q_n} \tag{4}$$

der n-te Näherungsbruch von w; es gelten dann bekanntlich die Darstellungen

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}} \tag{5}$$

und

$$w = w_n + (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{q_{n+k} q_{n+k+1}}, \tag{6}$$

so daß stets die Ungleichungen

$$w_{2\nu} < w < w_{2\nu+1}$$

erfüllt sind. Aus (6) folgt die wichtige Formel

$$(7) \qquad w = \frac{p_n}{q_n} + \frac{(-1)^n}{(1+\eta)\, q_n\, q_{n+1}}, \qquad [0 < \eta < 1],$$

auf die sich die drei nachfolgenden Hilfssätze stützen.

Hilfssatz 1. *Ist* $0 < r \leqq q_{n+1}$ *und* $r \not\equiv 0 \pmod{q_n}$, *so ist*

$$(8\text{a}) \qquad [r\,w] = \left[\frac{r\,p_n}{q_n}\right].$$

Beweis. Da nach Voraussetzung

$$0 < \frac{r}{(1+\eta)\, q_{n+1}} < \varepsilon < 1$$

ist, folgt aus (7)

$$r\,w = \frac{r\,p_n + (-1)^n \varepsilon}{q_n};$$

da ferner nach Voraussetzung $r\,p_n : q_n$ eine gebrochene Zahl, also

$$\left[\frac{r\,p_n}{q_n}\right] + \frac{1}{q_n} \leqq \frac{r\,p_n}{q_n} \leqq \left[\frac{r\,p_n}{q_n}\right] + \frac{q_n - 1}{q_n}$$

und

$$\left[\frac{r\,p_n}{q_n}\right] + \frac{1 + (-1)^n \varepsilon}{q_n} \leqq r\,w \leqq \left[\frac{r\,p_n}{q_n}\right] + \frac{q_n - 1 + (-1)^n \varepsilon}{q_n}$$

ist, ergibt sich die Behauptung (8a). Insbesondere gilt also (8a) stets, wenn $r < q_n$ ist.

Hilfssatz 2. *Ist* $0 < r \leqq q_{n+1}$ *und* $r = m\,q_n$, *so ist*

$$(8\text{b}) \qquad [r\,w] = m\,p_n - \frac{1-(-1)^n}{2}.$$

Beweis. Aus (7) folgt hier

$$r\,w = m\,p_n + \frac{(-1)^n\, m}{(1+\eta)\, q_{n+1}};$$

nun ist aber nach Voraussetzung $m\,q_n \leqq q_{n+1}$, daher

$$\frac{m}{q_{n+1}} \leqq \frac{1}{q_n}$$

und

$$r\,w = m\,p_n + \frac{(-1)^n \varepsilon}{q_n} \qquad [0 < \varepsilon < 1].$$

Somit erhalten wir

$$[r\,w] = \begin{cases} m\,p_n & \text{für gerades } n, \\ m\,p_n - 1 & \text{für ungerades } n, \end{cases}$$

in Übereinstimmung mit der Behauptung (8b).

Hilfssatz 3. *Ist* $0 < r \leqq q_{n+1}$, *und sind* r' *und* m *durch die Bedingungen*

$$r = r' + m\,q_n, \quad 0 < r' \leqq q_n$$

bestimmt, so gilt

(8c) $$[rw] = [r'w] + m p_n.$$

Beweis. Für $0 < r' < q_n$ gelten nach Hilfssatz 1 die Gleichungen

$$\begin{cases} \left[(r' + m q_n) w\right] = \left[(r' + m q_n) \frac{p_n}{q_n}\right] = \left[\frac{r' p_n}{q_n}\right] + m p_n, \\ [r' w] \hphantom{+ m q_n) w] = \left[(r' + m q_n) \frac{p_n}{q_n}\right]} = \left[\frac{r' p_n}{q_n}\right]; \end{cases}$$

hingegen bestehen für $r' = q_n$ nach Hilfssatz 2 die Gleichungen

$$\begin{cases} [(m+1) q_n w] = (m+1) p_n - \frac{1-(-1)^n}{2}, \\ [q_n w] \qquad = \qquad p_n - \frac{1-(-1)^n}{2}. \end{cases}$$

In jedem der beiden Fälle liefert die Differenz des Gleichungspaares die behauptete Gleichung (8c).

§ 2.

Die Funktion $\Phi(w)$.

Die im Einheitskreis erklärte und über diesen Kreis nicht fortsetzbare analytische Funktion

(9) $$\begin{cases} \varphi(z) = (1-z) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k, & |z| < 1, \\ \alpha_k = [kw + w] - [kw] \end{cases}$$

nimmt an der Stelle $z = \frac{1}{2}$ den Wert

(9a) $$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = u$$

an und strebt bei Annäherung an die Stelle $z = 1$ unbeschränkt dem Grenzwerte

(9b) $$\lim_{z=1} \varphi(z) = w$$

zu. Durch (9) ist $\varphi(z)$ nicht nur für die irrationalen reduzierten, sondern für alle reellen Werte von w eindeutig erklärt; indem wir von jetzt an w als das Argument, z aber als einen positiven echt gebrochenen Parameter ansehen, schreiben wir nunmehr $\overline{\Phi}(w)$ für $\varphi(z)$. Eine naheliegende Umformung von (9) liefert die Darstellung

(10) $$\overline{\Phi}(w) = \frac{(1-z)^2}{z} \sum_{k=1}^{\infty} [kw] z^k;$$

sie lehrt, daß $\overline{\Phi}(w)$ für positives z eine monoton wachsende Funktion von w ist, die an den Stellen 0 und 1 die Werte

$$\overline{\Phi}(0) = 0 \quad \text{und} \quad \overline{\Phi}(1) = 1$$

annimmt und jede rationale Stelle zur Sprungstelle hat. Ist nämlich

(11a) $$w_0 = \frac{p}{q}, \qquad (p < q \text{ und } p, q \text{ teilerfremd}),$$

so wachsen, wenn das Argument wachsend den Wert w_0 annimmt, gleichzeitig die Glieder

$$[mqw], \qquad [m = 1, 2, 3, \ldots],$$

je um die Einheit; die Sprunggröße beträgt also

(11b) $$\frac{(1-z)^2 z^{q-1}}{1-z^q}.$$

Indem wir die Menge der rationalen echten Brüche mit Einschluß der 1 nach Nennern q ordnen und jetzt unter $\varphi(q)$ die Anzahl der positiven echten teilerfremden Reste von q verstehen, erhalten wir für die Summe aller Sprünge im halboffenen Intervalle $0 < w \leqq 1$ den Wert [3])

$$\frac{(1-z)^2}{z} \sum_{q=1}^{\infty} \varphi(q) \frac{1-z^q}{z^q} = 1.$$

Da die gesamte Zunahme der Funktion also mit der Summe ihrer Sprünge übereinstimmt, ist $\overline{\Phi}(w)$ an allen irrationalen Argumentstellen stetig; da $\overline{\Phi}(w)$ weiter an allen rationalen Stellen den oberen Grenzwert annimmt, ist $\overline{\Phi}(w)$ obere Limesfunktion. Die zugehörige untere Limesfunktion $\underline{\Phi}(w)$ wird an der Stelle $w_0 = \frac{p}{q}$ auf Grund von (11) durch

(12) $$\underline{\Phi}\left(\frac{p}{q}\right) = \overline{\Phi}\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{(1-z)^2 z^{q-1}}{1-z^q}$$

dargestellt; an irrationalen Argumentstellen hingegen ist $\underline{\Phi}(w)$ mit $\overline{\Phi}(w)$ identisch und kann deshalb einfacher mit $\Phi(w)$ bezeichnet werden.

Durchläuft das Argument eine konvergente Folge rationaler echt gebrochener Werte w_n $[n = 1, 2, 3, \ldots]$ mit dem irrationalen Grenzwerte w, so haben die beiden Funktionenfolgen $\overline{\Phi}(w_n)$ und $\underline{\Phi}(w_n)$ den gemeinsamen Grenzwert $\Phi(w)$; denselben Grenzwert besitzt auch eine Funktionenfolge $\Phi(w_n)$, wenn $\Phi(w_n)$ bei jedem einzelnen n in beliebiger Weise entweder gleich $\overline{\Phi}(w_n)$ oder gleich $\underline{\Phi}(w_n)$ gewählt wird [4]).

---

[3]) Vgl. etwa K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Berlin 1922, S. 435.

[4]) Man erkennt leicht, daß der Wertevorrat des Funktionenpaares $\overline{\Phi}(w)$, $\underline{\Phi}(w)$ im Argumentintervalle $0 < w < 1$ eine perfekte nirgends dichte Untermenge des Kontinuums von 0 bis 1 bildet, die die Mächtigkeit des Kontinuums und das Maß Null besitzt.

§ 3.

Die Funktion $\Phi\left(\frac{p}{q}\right)$.

Die Funktionen Φ eines rationalen Arguments $\frac{p}{q}$ sind rationale Funktionen des Parameters z; denn man findet aus (10), wenn $k = r + mq$ gesetzt wird,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{kp}{q}\right]z^k = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{q}\left(mp + \left[\frac{rp}{q}\right]\right)z^{r+mq} = \frac{1}{1-z^q}\left\{\frac{pz^{q+1}}{1-z} + \sum_{r=1}^{q}\left[\frac{rp}{q}\right]z^r\right\},$$

also

$$\bar{\Phi}\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{(1-z)^2}{z(1-z^q)}\left\{\frac{pz^{q+1}}{1-z} + \sum_{r=1}^{q}\left[\frac{rp}{q}\right]z^r\right\}. \tag{13a}$$

Ist $p:q$ unkürzbar, so erhält man aus (11a) und (11b)

$$\underline{\Phi}\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{(1-z)^2}{z(1-z^q)}\left\{\frac{pz^{q+1}}{1-z} + \sum_{r=1}^{q}\left[\frac{rp}{q}\right]z^r - z^q\right\}. \tag{13b}$$

Wir betrachten nun $\Phi(w)$ als Grenzwert einer Funktionenfolge $\Phi(w_n)$, deren Argumente die Näherungsbrüche der Irrationalzahl w sind. Da aus den Ungleichungen

$$w_{2\nu} < w < w_{2\nu+1}$$

wegen der Monotonie von $\Phi(w)$ auch die Ungleichungen

$$\Phi(w_{2\nu}) < \Phi(w) < \Phi(w_{2\nu+1})$$

folgen, erhalten wir die besten Näherungen an $\Phi(w)$, wenn wir

$$\begin{cases} \Phi(w_{2\nu}) \quad = \bar{\Phi}(w_{2\nu}), \\ \Phi(w_{2\nu+1}) = \underline{\Phi}(w_{2\nu+1}) \end{cases}$$

wählen. Die dieser Wahl entsprechenden Darstellungen (13a) und (13b) lassen sich vermöge der Hilfssätze 1 und 2 auf eine gemeinsame Gestalt bringen. Man hat nämlich nach (8a)

$$\left[\frac{rp}{q}\right] = [rw] \quad \text{für } r < q,$$

dagegen nach (8b)

$$\left[\frac{qp}{q}\right] = p = [rw] + \frac{1-(-1)^n}{2} \quad \text{für} \quad r = q;$$

das liefert aber in (13a bzw. b) eingesetzt beidemale denselben Ausdruck

$$\Phi\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{(1-z)^2}{z(1-z^q)}\left\{\frac{pz^{q+1}}{1-z} + \sum_{r=1}^{q}[rw]z^r\right\}. \tag{13}$$

Endlich gewinnen wir durch Einführung des Parameters ζ

$$\zeta = \frac{1}{z}$$

an Stelle von z die Darstellung

$$\zeta\,\Phi\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\zeta - 1}{\zeta^q - 1}\left\{(\zeta - 1)\sum_{r=1}^{q}[r\,w]\,\zeta^{q-r} + p\right\} = \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)}, \tag{14}$$

wo

$$\begin{cases} P(\zeta) = (\zeta - 1)\displaystyle\sum_{r=1}^{q}[r\,w]\,\zeta^{q-r} + p, \\ Q(\zeta) = \dfrac{\zeta^q - 1}{\zeta - 1} \end{cases} \tag{14a}$$

Polynome in ζ sind.

§ 4.

Der Kettenbruch für $\Phi(w)$.

Zwischen den Zählern $P(\zeta)$, die zu drei aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen von w gehören, besteht eine lineare Beziehung, die wir durch eine Umformung des Ausdruckes

$$P_{n+1}(\zeta) = (\zeta - 1)\sum_{r=1}^{q_{n+1}}[r\,w]\,\zeta^{q_{n+1}-r} + p_{n+1}$$

gewinnen können; wir stützen uns dabei auf die Gleichungen (3) und den Hilfssatz 3 des § 1. Setzt man

$$r = r' + m\,q_n, \qquad [0 < r' \leqq q_n],$$

so erhält man, wenn der Akzent nach der Ersetzung wieder weggelassen wird,

$$\sum_{r=1}^{q_{n+1}}[r\,w]\,\zeta^{q_{n+1}-r} = \sum_{r=1}^{q_n}\sum_{m=0}^{a_{n+1}-1}[(r + m\,q_n)\,w]\,\zeta^{q_{n+1}-r-m\,q_n}$$
$$+ \sum_{r=1}^{q_{n-1}}[(r + a_{n+1}\,q_n)\,w]\,\zeta^{q_{n-1}-r}$$

und daraus durch Anwendung der Gleichung (8c)

$$\sum_{r=1}^{q_{n+1}} = \sum_{r=1}^{q_n}[r\,w]\,\zeta^{q_n-r}\sum_{m=0}^{a_{n+1}-1}\zeta^{q_{n+1}-(m+1)\,q_n} + \sum_{r=1}^{q_{n-1}}[r\,w]\,\zeta^{q_{n-1}-r}$$
$$+ p_n\sum_{r=1}^{q_n}\zeta^{q_n-r}\sum_{m=0}^{a_{n+1}-1}m\,\zeta^{q_{n+1}-(m+1)\,q_n} + a_{n+1}\,p_n\sum_{r=1}^{q_{n-1}}\zeta^{q_{n-1}-r}.$$

Wird jetzt

$$\sum_{m=0}^{a_{n+1}-1}\zeta^{q_{n+1}-(m+1)\,q_n} = \frac{\zeta^{q_{n+1}} - \zeta^{q_{n-1}}}{\zeta^{q_n} - 1} = A_{n+1}(\zeta)$$

gesetzt, so ergibt sich

$$\sum_{m=0}^{a_{n+1}-1} m\,\zeta^{q_{n+1}-(m+1)q_n} = \frac{\zeta^{q_{n+1}}-\zeta^{q_{n-1}}}{(\zeta^{q_n}-1)^2} - \frac{a_{n+1}\zeta^{q_{n-1}}}{\zeta^{q_n}-1} = \frac{A_{n+1}-a_{n+1}\zeta^{q_{n-1}}}{\zeta^{q_n}-1},$$

und es erscheint nach gehöriger Zusammenfassung

$$\sum_{r=1}^{q_{n+1}} = A_{n+1}\left(\sum_{r=1}^{q_n}[rw]\,\zeta^{q_n-r} + \frac{p_n}{\zeta-1}\right) + \sum_{r=1}^{q_{n-1}}[rw]\,\zeta^{q_{n-1}-r} - \frac{a_{n+1}p_n}{\zeta-1},$$

also

$$P_{n+1} = A_{n+1}\left((\zeta-1)\sum_{r=1}^{q_n} + p_n\right) + (\zeta-1)\sum_{r=1}^{q_{n-1}} + p_{n-1},$$

oder mit Rücksicht auf (14a)

$$(3^*,\ P) \qquad P_{n+1} = A_{n+1}P_n + P_{n-1};$$

und damit ist die zu Beginn dieses Paragraphen angekündigte lineare Relation aufgestellt. Man erkennt unmittelbar aus der Gestalt von A_{n+1} und der Definition (14a) von Q_n, daß für die Q dieselbe lineare Relation

$$(3^*,\ Q) \qquad Q_{n+1} = A_{n+1}Q_n + Q_{n-1}$$

besteht; da sich ferner aus den Gleichungen (14a) wegen (3a) die Sonderwerte

$$(3^*\,a) \qquad \begin{cases} P_0 = 0, & P_1 = 1, \\ Q_0 = 1, & Q_1 = \dfrac{\zeta^{q_1}-1}{\zeta-1} = A_1 \end{cases}$$

ergeben, bilden die A_n die Teilnenner, die P_n und Q_n die Näherungszähler bzw. Näherungsnenner der Kettenbruchentwicklung von $\zeta\,\Phi(w)$. Das gesamte Ergebnis zusammenfassend können wir sagen:

Bedeutet $\varphi(z)$ *die durch* (9) *erklärte Funktion und stellt* (2) *den regelmäßigen Kettenbruch für die Irrationalzahl* w *dar, dann wird* $\zeta\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ *durch den Kettendruch*

$$(15) \qquad \zeta\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1|}{|A_n} = \cfrac{1}{A_1+\cfrac{1}{A_2+\cfrac{1}{A_3+\dots}}}$$

mit den Teilnennern

$$(15a) \qquad A_n(\zeta) = \frac{\zeta^{q_n}-\zeta^{q_{n-2}}}{\zeta^{q_{n-1}}-1} = \frac{\zeta^{a_n q_{n-1}}-1}{\zeta^{q_{n-1}}-1}\,\zeta^{q_{n-2}}$$

formal dargestellt. Die Teilnenner sind also Polynome in ζ *und gehen für* $\zeta = 1$ *in die Teilnenner von* w *über; der Kettenbruch* (15) *konvergiert daher für* $\zeta = 1$ *mit dem Werte* w.

§ 5.

Konvergenz des Kettenbruches.

Die Differenz zwischen $\zeta\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ und dem n-ten Näherungsbruche der Kettenbruchdarstellung (15) läßt sich auf Grund der Definition von $\Phi\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ und der Darstellung (10) in der Gestalt

$$(16)\quad \frac{P_n(\zeta)}{Q_n(\zeta)} - \zeta\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right) = (\zeta-1)^2\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[k\frac{p_n}{q_n}\right]-[kw]}{\zeta^k} - \frac{1-(-1)^n}{2}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{\zeta^{h q_n}}\right\}$$

schreiben. Für gerades n fällt die zweite Summe fort und die Koeffizienten der ersten Summe sind Null oder negativ. Da

$$[kw] < kw \quad\text{und}\quad k\frac{p_n}{q_n} - 1 < \left[k\frac{p_n}{q_n}\right]$$

ist, findet man nach (7)

$$[kw] - \left[k\frac{p_n}{q_n}\right] < k\left(w - \frac{p_n}{q_n}\right) + 1 < \frac{k}{q_n q_{n+1}} + 1.$$

Dagegen erhält man bei ungeradem n, wo die Koeffizienten der ersten Summe Null oder positiv sind, aus den Ungleichungen

$$\left[k\frac{p_n}{q_n}\right] \leqq k\frac{p_n}{q_n} \quad\text{und}\quad kw - 1 < [kw]$$

die Beziehung

$$\left[k\frac{p_n}{q_n}\right] - [kw] < k\left(\frac{p_n}{q_n} - w\right) + 1 < \frac{k}{q_n q_{n+1}} + 1.$$

Nun sind hier aber die Koeffizienten der abzuziehenden Summe Null oder Eins; die rechte Seite der vorstehenden Ungleichung ist also eine Majorante der Koeffizienten des gesamten Klammerausdruckes.

In diesem Klammerausdrucke verschwinden aber nach den Hilfssätzen 1 und 2 alle Glieder, für die der Exponent von ζ die Zahl q_{n+1} nicht übertrifft; und damit gelangen wir zu der Abschätzung

$$\left|\frac{P_n(\zeta)}{Q_n(\zeta)} - \zeta\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right| < \frac{|\zeta-1|^2}{|\zeta|^{q_{n+1}}}\sum_{h=1}^{\infty}\left(1 + \frac{q_{n+1}+h}{q_n q_{n+1}}\right)|\zeta|^{-h}.$$

Die Reihe rechter Hand konvergiert für $1 < |\zeta|$ und hat zur Summe

$$\frac{(q_n q_{n+1} + q_{n+1} + 1)|\zeta| - (q_n q_{n+1} + q_{n+1})}{q_n q_{n+1}(|\zeta|-1)^2} < \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)\left(1 + \frac{1}{q_{n+1}}\right)\frac{|\zeta|}{(|\zeta|-1)^2}.$$

Aus der so bewiesenen Ungleichung

$$(17)\quad \left|\frac{P_n(\zeta)}{Q_n(\zeta)} - \zeta\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right| < \left(1+\frac{1}{q_n}\right)\left(1+\frac{1}{q_{n+1}}\right)\frac{1}{|\zeta|^{q_{n+1}}}\cdot\frac{|\zeta-1|^2|\zeta|}{(|\zeta|-1)^2} \quad \text{für } 1<|\zeta|$$

folgt der Satz:

Im Bereiche $1<|\zeta|$ *konvergiert der Kettenbruch* (15) *gleichmäßig und stellt dort die Funktion* $\zeta\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ *dar.*

§ 6.

Beweis des Theorems.

Wählt man ζ als eine natürliche Zahl gleich oder größer als 2, dann werden die Teilnenner A_n und die Näherungsnenner Q_n sämtlich natürliche Zahlen; daher stellt dann die rechte Seite von (15) die regelmäßige Kettenbruchentwicklung des Zahlwerts der linken Seite dar.

Hilfssatz 4. *Für* $0<n$ *besteht die Ungleichung*

$$(18)\qquad Q_n^{a_{n+1}-1} < A_{n+1}.$$

Beweis. Aus den Darstellungen

$$Q_n = \frac{\zeta^{q_n}-1}{\zeta-1} \quad \text{und} \quad A_{n+1} = \frac{\zeta^{a_{n+1}q_n}-1}{\zeta^{q_n}-1}\zeta^{q_{n-1}}$$

ergibt sich

$$\frac{Q_n^{a_{n+1}-1}}{A_{n+1}} = \frac{(\zeta^{q_n}-1)^{a_{n+1}}}{(\zeta-1)^{a_{n+1}-1}\zeta^{q_{n-1}}(\zeta^{a_{n+1}q_n}-1)}$$

$$= \frac{(1-\zeta^{-q_n})^{a_{n+1}-1}}{(\zeta-1)^{a_{n+1}-1}\zeta^{q_{n-1}}(1+\zeta^{-q_n}+\ldots+\zeta^{-(a_{n+1}-1)q_n})}.$$

Für $1<a_{n+1}$ ist der Zähler kleiner als 1, während der zweite und der dritte Nennerfaktor größer als 1 sind; der erste Nennerfaktor endlich nimmt nur für $\zeta=2$ den Wert 1 an und ist sonst stets größer als 1. Ist dagegen $a_{n+1}=1$, so geht der ganze Bruch in $\zeta^{-q_{n-1}}$ über, ist also kleiner als 1, da für $0<n$ stets $1\leqq q_{n-1}$ ist. Der Bruch ist also in jedem Falle kleiner als 1, w. z. b. w.

Die Teilnenner a_n *des regelmäßigen Kettenbruches für* w *seien jetzt unbeschränkt, d. h. es lasse sich zu jeder vorgegebenen natürlichen Zahl* ν *ein Zeiger* n *so finden, daß*

$$\nu < a_{n+1}$$

ist. Nun heißt eine Zahl

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1|}{|A_n}$$

mit den Näherungsnennern Q_n eine Liouvillesche, wenn zu jeder noch so großen natürlichen Zahl ν ein Zeiger n gefunden werden kann, für den die Ungleichung

$$Q_n^\nu < A_{n+1}$$

gilt[5]). Da nach Hilfssatz 4

$$\nu = a_{n+1} - 1$$

die Ungleichung erfüllt, stellt $\zeta\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ für jede natürliche Zahl ζ, die 1 übertrifft, eine Liouvillesche Zahl dar; und das gleiche gilt von $\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ selbst. Nach einem bekannten Satze von Liouville[6]) ist aber jede Liouvillesche Zahl transzendent; *die in unserem Theorem behauptete Transzendenz von $u = \varphi\left(\frac{1}{2}\right)$ ist damit bewiesen,* darüber hinaus aber, daß auch die Zahlen $\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ mit $\zeta = 3, 4, 5, \ldots$, insbesondere also auch die dyadischen Brüche

$$\varphi\left(\frac{1}{2^m}\right) \qquad [m = 1, 2, 3, \ldots]$$

transzendente Zahlen sind. Man sieht endlich leicht ein, daß die sämtlichen Ergebnisse dieser Arbeit auch dann bestehen bleiben, wenn $[w]$ von Null verschieden ist; denn in diesem Falle ändert sich die Darstellung (15) nur dahin ab, daß rechts die Zahl

$$[w]\,\zeta = A_0$$

als nullter Teilnenner hinzutritt.

Dresden, im August 1925.

---

[5]) Vgl. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig u. Berlin 1913, S. 140 f.

[6]) J. de math. **16**, 1851.

(Eingegangen am 6. 11. 1925.)