

Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen.

Von

G. Szegő in Berlin.

(Auszug aus einem Briefe an H. Bohr.)

... In einer kürzlich in den Comptes Rendus erschienenen Note¹⁾ beweisen Sie das folgende interessante Theorem:

Wenn eine fastperiodische Funktion $f(x)$ der reellen Veränderlichen x eine beschränkte Exponentenfolge besitzt,

$$(1) \quad |A_\nu| < K \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots),$$

dann ist $f(x)$ eine ganze Funktion; d. h. es gibt dann eine ganze Funktion der komplexen Veränderlichen x , die sich auf der reellen Achse auf $f(x)$ reduziert.

Der a. a. O.¹⁾ für dieses Theorem gegebene Beweis beruht auf einem zentralen Resultat der II. Mitteilung Ihrer Arbeit *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen* aus den *Acta Mathematica*²⁾, nämlich auf dem sog. verschärften Approximationssatz³⁾. Es soll nun im folgenden für das obige Theorem ein kurzer Beweis angegeben werden, der von diesem Satze keinen Gebrauch macht und aus den Hauptergebnissen der Theorie der fastperiodischen Funktionen nur den sog. Eindeutigkeitssatz⁴⁾ heranzieht.

¹⁾ H. Bohr, Sur une classe de transcendentes entières [*Comptes Rendus* 181 (1925), S. 766–768].

²⁾ I. Mitteilung: 45 (1924), S. 29–127; II. Mitteilung: 46 (1925), S. 101–213; III. Mitteilung: 47 (1926), S. 237–281. — Diese drei Arbeiten werden im folgenden mit I, II, III zitiert.

³⁾ Vgl. II, S. 184. Man könnte übrigens den in Rede stehenden Satz auch aus einem Resultat von III (S. 265) schließen (vgl. H. Bohr, Über allgemeine Fourier- und Dirichletentwicklungen, Den Sjette Skandinaviske Matematikerkongres, S. 173–190, insb. S. 183), das jedoch in III ebenfalls mit Hilfe des verschärften Approximationssatzes bewiesen wird.

⁴⁾ Vgl. I, S. 54.

Dieser lautet: Wenn für eine fastperiodische Funktion $f(x)$ die (notwendig existierenden) Grenzwerte

$$(2) \quad \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{X} \int_0^X f(x) e^{-i\lambda x} dx \quad (\lambda \text{ reell})$$

für alle reellen Werte von λ verschwinden, dann ist $f(x)$ identisch gleich 0.

Als wesentliches Hilfsmittel wird ferner eine Integralbildung benutzt, die dem Fejérschen Integral analog ist und, auf eine fastperiodische Funktion angewendet, ein Analogon der Fejérschen Mittel der gewöhnlichen Fourierschen Reihe liefert. Schließlich werden die Ergebnisse mit einem Satz von S. Bernstein kombiniert; dies liefert eine weitere interessante Eigenschaft der fastperiodischen Funktionen, welche durch die Bedingung (1) charakterisiert sind.

1. Es sei zunächst $f(x)$ eine beliebige, im Intervall $-\infty < x < \infty$ definierte beschränkte und stetige (nicht notwendig fastperiodische) Funktion. Wir setzen für jedes positive (nicht notwendig ganze) n

$$(3) \quad f_n(x) = \frac{2}{n\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi + x) \left(\frac{\sin \frac{n}{2} \xi}{\xi} \right)^2 d\xi = \frac{2}{n\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \left(\frac{\sin \frac{n}{2} (\xi - x)}{\xi - x} \right)^2 d\xi. \quad ^5)$$

Das letzte Integral konvergiert auch für komplexes x und zwar gleichmäßig in jedem endlichen Bereiche der x -Ebene: $f_n(x)$ ist eine ganze Funktion von x .

2. Es sei jetzt $f(x)$ eine fastperiodische Funktion und

$$(4) \quad f(x) \sim \sum_{r=1}^{\infty} a_r e^{iA_r x}$$

⁵⁾ Solche Integrale sind in der Literatur öfters betrachtet worden. Vgl. z. B. G. H. Hardy, Notes on some points in the integral calculus, LVI: On Fourier's series and Fourier's integral [Messenger of Mathematics 52 (1922), S. 49–53], s. insb. S. 52, (11). — Im Falle einer periodischen Funktion reduziert sich (3) wegen

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\xi + 2k\pi)^2} = \frac{1}{\left(2 \sin \frac{\xi}{2}\right)^2}$$

auf die gewöhnlichen Fejérschen Mittel.

Es ist, wie man auf eine geläufige Weise zeigen kann,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

und zwar gleichmäßig in jedem endlichen Intervalle (bzw. gleichmäßig für $-\infty < x < \infty$ wenn $f(x)$ auf der ganzen reellen Achse gleichmäßig stetig ist).

ihre Fourier-Entwicklung. Dann ist, wie unmittelbar ersichtlich, $f_n(x)$ ebenfalls fastperiodisch⁶⁾. Ich behaupte, daß ihre Fourier-Entwicklung folgendermaßen lautet:

$$(5) \quad f_n(x) \sim \sum_{|A_\nu| < n} \left(1 - \frac{|A_\nu|}{n}\right) a_\nu e^{iA_\nu x},$$

wo, wie angedeutet, nur solche Glieder vorkommen, für die $|A_\nu| < n$ gilt. Es gilt, wenn λ eine beliebige reelle Zahl ist,

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \int_0^X f_n(x) e^{-i\lambda x} dx &= \frac{2}{n\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{X} \int_0^X f(\xi+x) e^{-i\lambda x} dx \right) \left(\frac{\sin \frac{n}{2} \xi}{\xi} \right)^2 d\xi \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda \xi} \left(\frac{1}{X} \int_{\xi}^{\xi+X} f(x) e^{-i\lambda x} dx \right) \left(\frac{\sin \frac{n}{2} \xi}{\xi} \right)^2 d\xi. \end{aligned}$$

Nun hat man gleichmäßig in ξ ⁷⁾

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{X} \int_{\xi}^{\xi+X} f(x) e^{-i\lambda x} dx = a(\lambda) = \begin{cases} a_\nu & \text{für } \lambda = A_\nu, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Folglich ist

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{X} \int_0^X f_n(x) e^{-i\lambda x} dx = a(\lambda) \cdot \frac{2}{n\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda \xi} \left(\frac{\sin \frac{n}{2} \xi}{\xi} \right)^2 d\xi.$$

Das letzte Integral kann wegen

$$(6) \quad \frac{2}{n\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{n}{2} \xi}{\xi} \right)^2 d\xi = \frac{1}{n\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos n\xi}{\xi^2} d\xi = 1$$

leicht ausgerechnet werden. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{2}{n\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda \xi} \left(\frac{\sin \frac{n}{2} \xi}{\xi} \right)^2 d\xi &= \frac{1}{n\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \lambda \xi (1 - \cos n\xi)}{\xi^2} d\xi \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \lambda \xi - 1}{\xi^2} d\xi - \frac{1}{2n\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\lambda+n)\xi - 1}{\xi^2} d\xi - \frac{1}{2n\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\lambda-n)\xi - 1}{\xi^2} d\xi \\ &= -\frac{|\lambda|}{n} + \frac{|\lambda+n|}{2n} + \frac{|\lambda-n|}{2n} = \begin{cases} 1 - \frac{|\lambda|}{n}, & \text{wenn } |\lambda| \leq n, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

womit (5) bewiesen ist.

⁶⁾ Die Funktionen $f_n(x)$ und $f(x)$ bilden sogar eine sog. ausgezeichnete Menge. Vgl. II, S. 107.

⁷⁾ I, Satz VIII, S. 45–46.

3. Betrachten wir nun eine fastperiodische Funktion $f(x)$, deren Exponentenfolge Λ_ν beschränkt ist,

$$|\Lambda_\nu| < K \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots).$$

Dann ist also für $n \geq K$

$$f_n(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{|\Lambda_\nu|}{n}\right) a_\nu e^{i\Lambda_\nu x}.$$

Hieraus folgt

$$(n+1)f_{n+1}(x) - nf_n(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{i\Lambda_\nu x},$$

so daß nach dem Eindeutigkeitssatz

$$(7) \quad f(x) = (n+1)f_{n+1}(x) - nf_n(x) \\ = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \left\{ \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2}(\xi-x)}{\xi-x} \right)^2 - \left(\frac{\sin \frac{n}{2}(\xi-x)}{\xi-x} \right)^2 \right\} d\xi.$$

Das Integral auf der rechten Seite stellt hier eine ganze Funktion von x dar, womit die Behauptung bewiesen ist.

4. Es gilt etwas allgemeiner als (7) für jedes $\alpha > 0$

$$(8) \quad f(x) = \frac{(n+\alpha)f_{n+\alpha}(x) - nf_n(x)}{\alpha} \\ = \frac{2}{\pi\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \left\{ \left(\frac{\sin \frac{n+\alpha}{2}(\xi-x)}{\xi-x} \right)^2 - \left(\frac{\sin \frac{n}{2}(\xi-x)}{\xi-x} \right)^2 \right\} d\xi \\ (n \geq K).$$

Wir wollen diese Darstellung benutzen, um die Funktion $f(x)$ und ihre Ableitungen auf den zu der reellen Achse parallelen Geraden abzuschätzen.

Es sei $x = u + iv$ gesetzt (u, v reell) und M bezeichne die obere Grenze von $|f(u)|$ für $-\infty < u < \infty$. Dann folgt aus (3) für $v \neq 0$

$$|f_n(x)| = |f_n(u + iv)| \leq \frac{2M}{n\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin \frac{n}{2}(\xi - u - iv)}{\xi - u - iv} \right|^2 d\xi \\ \leq \frac{2M}{n\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin \frac{n}{2}(\xi - iv)}{\xi - iv} \right|^2 d\xi \\ \leq \frac{M}{n\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh nv - \cos n\xi}{\xi^2 + v^2} d\xi \\ \leq M \frac{\cosh nv - 1}{n|v|} + M < MCe^{n|v|},$$

wo C eine absolute Konstante ist.

Aus (8) schließen wir also, daß

$$(9) \quad |f(u + iv)| < \frac{2(K + \alpha)MC}{\alpha} e^{(K + \alpha)|v|} \quad (\alpha > 0).$$

Für ganze Funktionen von dieser Art kann aber nach einem Satze von S. Bernstein $f'(u)$ für reelles u abgeschätzt werden⁸⁾. Es ist

$$|f'(u)| \leq (K + \alpha)M \quad (-\infty < u < \infty),$$

und da dies für jedes α gilt,

$$|f'(u)| \leq KM \quad (-\infty < u < \infty).$$

Eine ähnliche Abschätzung gilt für die höheren Ableitungen:

$$(10) \quad |f^{(m)}(u)| \leq K^m M \quad (-\infty < u < \infty; m = 0, 1, 2, \dots).$$

Hieraus folgt übrigens, daß schärfer wie (9)

$$(9') \quad |f(u + iv)| = \left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iv)^m}{m!} f^{(m)}(u) \right| \leq Me^{K|v|}$$

gilt⁹⁾. Es ist ferner, wie man auf dieselbe Weise zeigt,

$$(10') \quad |f^{(m)}(u + iv)| \leq K^m Me^{K|v|} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Aus (7) ersieht man schließlich, daß sämtliche Ableitungen von $f(x)$ auf der reellen Achse und auf allen dazu parallelen Geraden fastperiodisch sind.

Wir erhalten also das folgende Theorem:

Es sei $f(x)$ eine fastperiodische Funktion der reellen Veränderlichen x , deren Exponentialfolge beschränkt ist,

$$|A_v| < K \quad (v = 1, 2, 3, \dots).$$

Dann ist $f(x)$ eine ganze Funktion, die samt ihren sämtlichen Ableitungen auf allen zur reellen Achse parallelen Geraden fastperiodisch ist. Es gelten ferner bei beliebigem komplexem x die Ungleichungen

$$|f^{(m)}(x)| \leq K^m Me^{K|\Im x|} \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

wobei M die obere Grenze von $|f(x)|$ für reelle x bezeichnet¹⁰⁾.

Berlin, März 1926.

⁸⁾ S. Bernstein, Sur une propriété des fonctions entières [Comptes Rendus 176 (1923), S. 1603–1605]; vgl. G. Pólya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis [Berlin, J. Springer, 1925], Abschnitt III, Nr. 165, 1, S. 116–117, 289, Abschnitt IV, Nr. 201, 2, S. 35, 218–219.

⁹⁾ Vgl. G. Pólya und G. Szegö, a. a. O.⁸⁾, Abschnitt IV, Nr. 202, 2, S. 36, 219.

¹⁰⁾ Dieser Satz kann — abgesehen von der Abschätzung von $f^{(m)}(x)$ für $m = 1, 2, 3, \dots$ — auch mit Hilfe der Beweismethode der Bohrschen Note erhalten werden.