

Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen.

II. Teil¹⁾. Funktionen mehrerer Variablen.

Von

S. Bochner in Berlin.

Inhaltsverzeichnis.

- § 6. Einleitung.
 - § 7. Einige Definitionen.
 - § 8. Die Approximierbarkeit durch Exponentialpolynome.
 - § 9. Fourierreihen.
 - § 10. Die Zurückführung auf grenzperiodische Funktionen.
 - § 11. Integralgleichungen.
- Verzeichnis der zitierten Literatur.

§ 6.

Einleitung.

Die Behandlung der mehrvariablen Funktionen wird sich auf Grund der Definition der Fastperiodizität, von der wir ausgehen werden, sehr einfach gestalten.

Es sei eine (gleichmäßig stetige) Funktion zweier Variablen $f(\xi, \eta)$ gegeben. Zu jedem ε seien relativ dichte Werte $\varrho(\varepsilon)$ des Intervalls $-\infty < \varrho < +\infty$ und relativ dichte Werte $\sigma(\varepsilon)$ des Intervalls $-\infty < \sigma < +\infty$ gegeben, so daß jede Kombination aus einem solchen $\varrho(\varepsilon)$ und einem solchen $\sigma(\varepsilon)$ einen zu ε gehörigen Verschiebungsvektor der Funktion $f(\xi, \eta)$ liefert:

$$|f(\xi + \varrho, \eta + \sigma) - f(\xi, \eta)| \leq \varepsilon \quad \left(\begin{array}{l} -\infty < \xi < +\infty \\ -\infty < \eta < +\infty \end{array} \right).$$

¹⁾ Der I. Teil dieser Arbeit, mit dem Untertitel: „Funktionen einer Variablen“, erschien in den Math. Ann. 96, S. 119. Die Paragraphen und Sätze sind fortlaufend nummeriert; alle Bezeichnungen und Abkürzungen haben dieselbe oder eine (jeweils aus dem Zusammenhang unmittelbar ersichtliche) analoge Bedeutung wie im I. Teil.

Die eben gegebene Charakterisierung läuft offenbar darauf hinaus, daß die Funktion $f(\xi, \eta)$ in jeder Variablen (bei Festhalten der anderen) eine fp. Funktion ist, und daß die zu den Parametern η und ξ gehörigen Funktionenmengen

$$\varphi_\eta(\xi) = f(\xi, \eta)$$

$$\psi_\xi(\eta) = f(\xi, \eta)$$

ausgezeichnete Mengen sind. Nach Satz V kann man dann die Funktionen $\psi_\xi(\eta)$ gleichartig durch ein Polynom in η

$$\sum a_n(\xi) e^{i\mu_n \eta}$$

approximieren, in welchem $a_n(\xi)$, von einem konstanten Faktor abgesehen, den Wert des „Fourierkoeffizienten“

$$A_{\mu_n}(\xi) = M\{f(\xi, t) e^{-i\mu_n t}\}$$

hat. Jede solche Funktion $a_n(\xi)$ ist aber, wie unschwer zu zeigen, fast-periodisch in ξ , also durch Polynome in ξ approximierbar, woraus dann endgültig folgt, daß man bei jedem ε Approximationspolynome von $f(\xi, \eta)$ der Gestalt $\sum a_n e^{i(\lambda_n \xi + \mu_n \eta)}$ angeben kann:

$$|f(\xi, \eta) - \sum a_n e^{i(\lambda_n \xi + \mu_n \eta)}| \leq \varepsilon.$$

Die eben skizzierte Zurückführbarkeit des „mehrvariablen“ Approximationssatzes auf den „einvariablen“ schließt in sich, daß der Bohrsche „Fundamentalsatz“ nicht nur für die einvariablen, sondern auch für die mehrvariablen fp. Funktionen das „Fundament“ abgibt. Der Approximationseigenschaft ist es zuzuschreiben, daß auch *alle* anderen Eigenschaften der einvariablen Funktionen sich in analoger Weise auch von den mehrvariablen behaupten lassen.

Die Gesamtheit der fp. Funktionen, die wir behandeln werden, wird (im Falle zweier Variablen) nicht größer sein als die eben umschriebene, nur daß wir eine (scheinbar) allgemeinere Definition zugrunde legen werden, indem wir nur verlangen werden, daß die Verschiebungsvektoren (ϱ, σ) flächenhaft relativ dicht in der ϱ - σ -Ebene liegen sollen, derart, daß sie in jedem Rechteck von den Längen $l_1(\varepsilon)$ und $l_2(\varepsilon)$ mit irgendeinem Vektor vertreten sein sollen.

Die Zurückführung dieser Definition auf die obige Charakterisierung, die man auch in einfacher Weise nach der Beweismethode zu Satz III aus Abh. I vornehmen kann²⁾, wird sich auf dem Wege über die Normalitätseigenschaften der fp. Funktionen ergeben.

Unsere Definition der Fastperiodizität wird sich von vornherein auf Funktionen unendlich vieler Variablen erstrecken. Die Behandlung der

²⁾ Diese Bemerkung rührt von Herrn H. Bohr her.

mehrvariabliigen Funktionen ist gar nicht anders als die der zweivariabliigen, bei den unendlichvariabliigen tritt noch hinzu, daß eine solche Funktion sich in erster Linie durch endlichvariabliige fastperiodische approximieren läßt.

Durch passende Wahl der Bezeichnungen und Begriffe gelangen wir zu einer *wörtlichen* Übertragung fast aller Sätze über einvariabliige Funktionen. Unter anderem existieren Fourierreihen, mit denen formal gerechnet werden kann, Sätze über Summation durch Fejérpolynome, gleichartige Summation, ausgezeichnete Mengen, Zurückführung der allgemeinen Funktionen auf grenzperiodische usw.

Im letzten Paragraphen bemerken wir noch, wie sich Integralgleichungen mit fp. Kernen wörtlich ebenso wie die mit periodischen behandeln lassen.

§ 7.

Einige Definitionen.

Jede Zahl im üblichen Sinne werden wir zur Unterscheidung von noch einzuführenden anderen Zahlen als „skalar“ bezeichnen.

1. Unter einer Funktion $f(x)$ schlechthin verstehen wir von nun an *eine Funktion von endlich oder abzählbar unendlich vielen Variablen*. Der zugrunde gelegte Variablenraum

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

umfaßt alle Punkte

$$-\infty < x_\nu < +\infty \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots).$$

Die Zahl x_ν heißt die ν -te Komponente des Punktes x . Im Falle eines nicht als endlichvariabliig spezialisierten Raumes ist eine endlichvariabliige Funktion eine solche, die in allen Komponenten von einem bestimmten Index an konstant ist.

2. Wenn irgendwo im folgenden eine ganze Zahl, z. B. N , als variabler Index der Komponente x unendlich groß werden kann oder soll, dann heißt das im Spezialfalle eines endlichvariabliigen Raumes oder einer endlichvariabliigen Funktion, daß von einer gewissen Stelle ab diese ganze Zahl, z. B. N , dem konstanten Wert n der Dimension des zugrunde liegenden Raumes gleich sein kann oder soll.

3. Es gelten die Abkürzungen

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3, \dots),$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots),$$

$$c = (c_1, c_2, c_3, \dots),$$

$$x_v = (x_{1v}, x_{2v}, x_{3v}, \dots),$$

$$x' = (x'_1, x'_2, x'_3, \dots),$$

$$f(x_1 + x_2) = f(x_{11} + x_{21}, x_{12} + x_{22}, x_{13} + x_{23}, \dots).$$

Nur für *numerisch* ausgedrückte Zahlen (z. B. $-\frac{2}{3}$ und 17) gelten die Abkürzungen

$$(1) \quad \begin{aligned} -\frac{2}{3}x + 17 &= \left(-\frac{2}{3}x + 17, -\frac{2}{3}x + 17, -\frac{2}{3}x + 17, \dots\right), \\ -x &= (-1)x = (-x_1, -x_2, -x_3, \dots), \\ 0 &= (0, 0, 0, \dots), \\ \infty &= (\infty, \infty, \infty, \dots). \end{aligned}$$

4. Wenn zwei Punkte a und b , mit $a < b$, $v = 1, 2, 3, \dots$, gegeben sind, dann verstehen wir unter dem offenen Intervall

$$(2) \quad a < x < b$$

bzw. dem abgeschlossenen Intervall

$$(3) \quad a \leq x \leq b$$

die Punktmengen

$$a < x < b \quad \text{bzw.} \quad a \leq x \leq b \quad (v = 1, 2, \dots),$$

und unter der Länge $l = b - a$ des Intervalls $a \leq x \leq b$ ist die „Zahl“

$$(b - a, b - a, b - a, \dots)$$

(vgl. 12) gemeint. Ein Intervall (2) oder (3) heiße endlich, wenn alle Skalare a und b endlich sind.

5. Wir legen unserem Variablenraume den in Abh. II, § 7 eingeführten Konvergenzbegriff zugrunde, wonach zwei Punkte als „nahe gelegen“ aufzufassen sind, wenn sie für „genügend großes“ N in den N ersten Komponenten nur wenig differieren, und führen demgemäß die folgende Terminologie ein. Unter einer „Entfernungszahl“ δ (wir werden das Symbol δ auch für skalare Zahlen verwenden) ist eine Doppelzahl (δ', N) zu verstehen, wobei $\delta' \geq 0$ und N eine ganze Zahl ≥ 1 ist. Die Relation $\delta_1 \leq \delta_2$ ist gleichbedeutend mit

$$\delta'_1 \leq \delta'_2 \quad \text{und} \quad N_1 \geq N_2,$$

und die Addition von Entfernungszahlen und ihre Multiplikation mit positiven Skalaren geschieht nach der Vorschrift

$$\delta_1 + \delta_2 = (\delta'_1 + \delta'_2, \text{Min}(N_1, N_2))$$

$$k\delta = (k\delta', N).$$

Eine Folge von Entfernungszahlen δ_ν , $\nu = 1, 2, 3, \dots$, heiße *gegen Null konvergent*, falls

$$\delta'_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0 \quad \text{und} \quad N_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \infty \quad (\text{vgl. 2}).$$

6. Von zwei Punkten x_1 und x_2 sagen wir, daß sie einen Abstand $\leq \delta$ haben,

$$|x_1 - x_2| \leq \delta,$$

falls

$$|x_1 - x_2| \leq \delta' \quad (\nu = 1, 2, \dots, N).$$

Aus $|x_1 - x_2| \leq \delta$ und $\delta \leq \delta_1$ folgt $|x_1 - x_2| \leq \delta_1$, aus $|x_1 - x_2| \leq \delta$ und $k > 0$ folgt $|kx_1 - kx_2| \leq k\delta$ und aus $|x_1 - x_2| \leq \delta_1$ und $|x_2 - x_3| \leq \delta_2$ folgt $|x_1 - x_3| \leq \delta_1 + \delta_2$.

7. Die δ -Umgebung des Punktes x besteht aus allen Punkten y , für welche $|y - x| \leq \delta$ und die δ -Umgebung der Punktmenge X aus den δ -Umgebungen aller Punkte x aus X . Eine Punktfolge x_1, x_2, \dots konvergiert gegen x_0 , wenn in jeder Umgebung von x_0 nur endlich viele Punkte x_ν *nicht* enthalten sind, wofür notwendig und hinreichend ist, daß komponentenweise Konvergenz statthat

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu = x_0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Nach Cantor-Hilbert besitzt demnach eine in einem endlichen Intervall gelegene Punktmenge mindestens einen Häufungspunkt.

8. Es bedeute P^ν ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) die Gesamtheit der Punkte $(\frac{g_1}{\nu}, \frac{g_2}{\nu}, \dots, \frac{g_\nu}{\nu}, 0, 0, 0, \dots)$ mit irgendwelchen ganzen Zahlen g_1, g_2, \dots, g_ν , dann bildet die Vereinigungsmenge $P = P^{(1)} + P^{(2)} + P^{(3)} + \dots$ eine *abzählbare, überall dicht gelegene* Punktmenge, von der schärfer folgendes ausgesagt werden kann.

Es gibt eine (abzählbare) Punktmenge P derart, daß zu jedem endlichen Intervall $a \leq x \leq b$ und jeder Entfernungszahl δ eine endliche Teilmenge P_δ von P so angegeben werden kann, daß die δ -Umgebung von P_δ das Intervall $a \leq x \leq b$ vollständig überdeckt. Denn man wähle ν so groß, daß

$$\delta_\nu = \left(\frac{1}{\nu}, \nu\right) \leq \delta$$

ist, dann leisten diejenigen (endlich vielen) Punkte aus $P^{(\nu)}$, die in $a \leq x \leq b$ gelegen sind, das Gewünschte.

9. Eine Funktion $f(x)$ ist stetig in x_0 , wenn zu jedem ε alle Punkte x einer $\delta(\varepsilon)$ -Umgebung von x_0 der Ungleichung

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

genügen. Die Funktion $f(x)$ heißt gleichmäßig stetig, wenn ein für alle Punkte x_0 gültiges $\delta(\varepsilon)$ angegeben werden kann. Eine überall stetige Funktion ist in jedem endlichen Intervall beschränkt, weil sonst in einem solchen Intervall mindestens ein Unstetigkeitspunkt liegen müßte.

10. Es liege eine in einer Punktmenge E des x -Raumes definierte Funktion $\varphi(x)$ und eine Teilmenge E' von E vor. Wir nennen $\varphi(x)$ gleichmäßig stetig

a) in E' , wenn für irgend zwei Punkte aus E'

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq \varepsilon \quad \text{für} \quad |x_1 - x_2| \leq \delta(\varepsilon)$$

besteht;

b) auf E' , wenn für einen Punkt x_1 aus E' und einen Punkt x_2 aus E die Relation

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq \varepsilon \quad \text{für} \quad |x_1 - x_2| \leq \delta(\varepsilon)$$

besteht.

Nach bekannter Schlußweise (vgl. z. B. Abh. II, S. 136) ist eine stetige Funktion $f(x)$ auf jedem endlichen Intervall

$$a \leq x \leq b$$

gleichmäßig stetig.

11. Den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz verstehen wir im üblichen Sinne. Der gleichmäßige Limes gleichmäßig stetiger Funktionen ist eine gleichmäßig stetige Funktion. Jede gleichmäßig stetige Funktion $f(x)$ ist durch ebensolche endlichvariablige, z. B. die Funktionen

$$f_n(x) = f(x, x, \dots, x, 0, 0, \dots),$$

gleichmäßig approximierbar.

12. Unter einer (Punkt-)Zahl

$$\alpha = (\alpha, \alpha, \dots)$$

verstehen wir eine mit reellen Skalaren aufgebaute Zahl von derselben Dimension wie der zugrunde liegende Variablenraum. Wegen der Punkt-Null vgl. (1). Eine Zahl heißt *finit*, wenn nur endlich viele Komponenten von Null verschieden sind. Eine ganze Punktzahl γ bzw. eine rationale Punktzahl ϱ ist eine Zahl, deren Komponenten ganz bzw. rational sind. Unter einer ganzen Zahl g bzw. einer rationalen Zahl r , ohne weiteren Zusatz, ist immer nur ein Skalar gemeint. Zwei Zahlen sind gleich

$$\alpha = \beta,$$

wenn sie komponentenweise gleich sind

$$\alpha = \beta, \quad (v = 1, 2, 3, \dots),$$

weiterhin gilt die Rechenregel

$$r_1 \alpha + r_2 \beta = (r_1 \alpha_1 + r_2 \beta_1, r_1 \alpha_2 + r_2 \beta_2, r_1 \alpha_3 + r_2 \beta_3, \dots).$$

Wenn von zwei Zahlen, α und β , (mindestens) eine finit ist, so verstehen wir unter dem Produkt $\alpha \beta = (\alpha \beta)$ das Skalar

$$\sum_{v=1}^{\infty} \alpha \beta_v.$$

Wo immer ein Produkt der Gestalt λt auftritt, wo „die Variable“ t als Punkt des Variablenraumes gemeint ist, wird der Faktor λ als finit vorausgesetzt.

Für beliebige Punktzahlen α und β verstehen wir unter $[\alpha \beta]$ die Punktzahl $[\alpha \beta, \alpha \beta, \alpha \beta, \dots]$.

13. Auf Punktzahlen übertragen sich wörtlich alle Betrachtungen aus § 1, 14 bis 19, die wir gedrängt resümieren. Als (finite) Zahlenmenge bezeichnen wir immer eine endliche oder abzählbare Menge von untereinander verschiedenen (finiten) Zahlen. Jede im folgenden vorzunehmende Operation führt bei finiten Zahlenmengen immer nur auf finite Zahlenmengen. Unter einer reduzierten Zahlenmenge verstehen wir eine Zahlenmenge, deren Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ keine lineare Verbindung mit rationalen r

$$r_1 \alpha_1 + r_2 \alpha_2 + \dots + r_k \alpha_k = 0 \quad (|r_1| + |r_2| + \dots + |r_k| > 0),$$

also kein simultanes Gleichungssystem

$$r_1 \alpha_1 + r_2 \alpha_2 + \dots + r_k \alpha_k = 0 \quad (v = 1, 2, 3, \dots)$$

zulassen. Weiterhin erinnern wir an die Begriffe: Basis einer Zahlenmenge, linear unabhängige Zahlenmengen, Modul, ganzer Modul $G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, Vereinigungsmodul, und an den Satz: Jeder Modul läßt sich durch endliche ganze approximieren. Ebenso wie im einvariablen Falle (vgl. Abh. II, S. 122) sprechen wir von einer ganzen Basis $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$ der (beliebigen) Zahlenmenge (ξ_1, ξ_2, \dots) , wenn in den Darstellungen

$$\xi_v = r_1^{(v)} \alpha_1 + r_2^{(v)} \alpha_2 + \dots \quad (v = 1, 2, 3, \dots)$$

alle Koeffizienten $r_\mu^{(v)}$ ganz sind.

14. Die stetige Funktion $f(x)$ soll reinperiodisch mit der Periode

$$p = (p_1, p_2, p_3, \dots) \quad (p_v \neq 0)$$

heißen, wenn für jede ganze Punktzahl γ

$$f(x + [\gamma p]) = f(x),$$

wozu genügt, daß $f(x)$ in jeder Komponente x reinperiodisch mit der Periode p_m ist

$$f(\dots, x + p_m, \dots) = f(\dots, x, \dots).$$

Unter einer grenzperiodischen Funktion $f(x)$ mit der Grenzperiode

$$p = (p_1, p_2, \dots)$$

ist eine Funktion gemeint, die sich gleichmäßig durch reinperiodische mit Perioden der Gestalt $[\varrho p]$ (ϱ beliebig rational; vgl. 12) approximieren läßt, wozu notwendig und hinreichend ist, daß sie sich durch reinperiodische Funktionen mit Perioden rp (r beliebig rational; vgl. 12) beliebig approximieren läßt (vgl. Abh. II, S. 146, § 12).

15. Zum Schluß noch eine Bemerkung. Es ist ganz klar, daß auf Grund unserer Definitionen, insbesondere der des Umgebungs- (d. h. des Konvergenz-)Begriffs alle Eigenschaften unserer Funktionen (Stetigkeit, Periodizität, Endlichvariablichkeit usw.) erhalten bleiben, wenn man von einer festen Anordnung der Variablen zu einer beliebig anderen festen Anordnung übergeht. Der Einfachheit halber denken wir uns im folgenden eine Anordnung der Variablen beliebig gewählt und festgehalten.

§ 8.

Die Approximierbarkeit durch Exponentialpolynome.

1. Definition. Eine (überall im x -Raume definierte und) stetige Funktion $f(x)$ soll *fastperiodisch* heißen, falls es zu jedem ε eine „Intervalllänge“ $l = l(\varepsilon)$ ($l > 0$) derart gibt, daß jedes Intervall $\alpha < \tau < \beta$ der Länge $\beta - \alpha = l$ mindestens eine Verschiebungszahl $\tau(f, \varepsilon)$ enthält, d. h. eine Punktzahl τ , welche der Relation

$$|f(x + \tau) - f(x)| \leq \varepsilon \quad (-\infty < x < +\infty)$$

genügt.

Wir werden uns dahin ausdrücken, daß die Verschiebungszahlen $\tau(f, \varepsilon)$ relativ dicht liegen, und werden im allgemeinen unter dem relativ dichten Auftreten von Punkten einer gegebenen Menge die Existenz einer Länge l meinen, so daß jedes Intervall dieser Länge mindestens einen der fraglichen Punkte enthält.

2. Satz XXV. Jede f_p -Funktion $f(x)$ ist beschränkt und gleichmäßig stetig.

Beweis. Man bestimme zu $\varepsilon = 1$ die Verschiebungslänge $l = l(1)$. Im Intervall $0 \leq x \leq l$ hat $|f(x)|$ eine Schranke G (vgl. § 7, 9.), also ist

$$|f(x)| \leq G + 1 \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Um zu einem ε ein Stetigkeits- $\delta(\varepsilon)$ zu erhalten, bestimme man zu $\frac{\varepsilon}{4}$ das $l\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$ und zum Intervall

$$(1) \quad 0 \leq x \leq l\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$$

ein zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehöriges δ_1 für die gleichmäßige Stetigkeit auf diesem Intervall. Dann kann man $\delta(\varepsilon) = \delta_1$ setzen. Von zwei Punkten $|x_1 - x_2| \leq \delta_1$ kann man nämlich x_1 durch eine Verschiebungszahl $\tau\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$ nach (1) verschieben: $0 \leq x_1 + \tau\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) \leq l\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$, woraus folgt

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &\leq |f(x_1 + \tau) - f(x_2 + \tau)| + |f(x_1 + \tau) - f(x_1)| \\ &\quad + |f(x_2 + \tau) - f(x_2)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Satz XXVI. Die Limesfunktion $f(x)$ von gleichmäßig konvergenten fp. Funktionen $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ ist wieder fastperiodisch.

Beweis. Wenn $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ ist, ist jedes $\tau\left(f_n, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ ein $\tau(f, \varepsilon)$.

Satz XXVII. Jede (stetige) reinperiodische Funktion (demnach auch jede grenzperiodische Funktion) ist fastperiodisch.

Beweis. Wenn $p = (p_1, p_2, p_3, \dots)$ eine Periode der Funktion ist, kann man jedem ε die Verschiebungslänge $l = 2p$ zuordnen.

Korollar. Jeder Exponentialausdruck $a e^{i\lambda x}$, d. h. jeder (endlichvariablige) Ausdruck der Gestalt $a e^{i\left(\frac{\lambda_1 x}{1} + \frac{\lambda_2 x}{2} + \dots\right)}$ ist fastperiodisch.

Es kommt jetzt der Satz an die Reihe, daß die Summe zweier fp. Funktionen wieder fastperiodisch ist. Dieser Satz wird sich auf dem Wege über die Normalitätseigenschaft ergeben, der wir uns nunmehr zuwenden.

3. Unter der Verschiebungsfunktion $v_f(\tau)$ einer (beliebigen) beschränkten Funktion $f(x)$ verstehen wir die in $-\infty < \tau < +\infty$ ($-\infty < x < +\infty$; $\nu = 1, 2, 3, \dots$) definierte reelle Funktion

$$v_f(\tau) = \text{Ob. Gr.}_{-\infty < x < +\infty} |f(x + \tau) - f(x)|.$$

Bei fp. Funktionen werden wir wiederum die Bezeichnung $e(\tau)$ gebrauchen.

Satz XXVIII. Damit eine Funktion $e(\tau)$ eine (fp.) Verschiebungsfunktion ist, ist notwendig und hinreichend, daß sie die nachfolgenden

Bedingungen a), b), c), d) oder a), b), c), d*) erfüllt. Die Verschiebungsfunktion von $e(\tau)$ ist wiederum $e(\tau)$.

- a) $e(\tau) \geq 0$, $e(0) = 0$,
 b) $e(\tau) = e(-\tau)$,
 c) $e(\tau_1 + \tau_2) \leq e(\tau_1) + e(\tau_2)$ bzw. $|e(\tau_1 + \tau_2) - e(\tau_1)| \leq e(\tau_2)$,
 d) $e(\tau)$ ist fastperiodisch,
 d*) $e(\tau)$ ist stetig im Punkte $\tau = 0$

und für jedes ε liegen die Punkte $e(\tau) \leq \varepsilon$ relativ dicht in $-\infty < \tau < +\infty$.

Beweis: Wörtlich wie in § 4, 1.

Satz XXIX. Die Verschiebungsfunktionen $e_{f_1}(\tau)$, $e_{f_2}(\tau)$, $e_{f_3}(\tau)$, ... von gleichmäßig konvergenten fp. Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... konvergieren gleichmäßig gegen die Verschiebungsfunktion der Limesfunktion $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Beweis. Wie zu Satz XII und XIII.

4. Eine ausgezeichnete Menge (vgl. § 1, 8.) ist eine Gesamtheit von fp. Funktionen, die für jedes ε gemeinsame Stetigkeits- $\delta(\varepsilon)$ und gemeinsame relativ dichte Verschiebungszahlen $\tau(\varepsilon)$ besitzen.

Eine fp. Funktion $f(x)$ ist Majorante der Funktion $g(x)$, falls

$$e_f(\tau) \geq e_g(\tau).$$

Im Falle $e_f(\tau) = e_g(\tau)$ heißen die Funktionen ähnlich. Funktionen mit gemeinsamer Majorante bilden eine majorisierbare Menge.

Satz XXX. Jede ausgezeichnete Menge ist majorisierbar und jede majorisierbare Menge ist ausgezeichnet. Für jede majorisierbare Menge

$$e_i(\tau) \quad (i \text{ durchläuft eine Indexmenge } D)$$

ist die Funktion

$$e(\tau) = \text{Ob. Gr. } (e_i(\tau))_{i \in D}$$

die kleinstmögliche (Verschiebungs-)Majorante.

Beweis. Man überzeugt sich leicht, daß der Beweis zu den Sätzen XIX und XX wörtlich herübergenommen werden kann.

5. Eine stetige Funktion $f(x)$ soll eine Normalfunktion heißen, wenn aus jeder Folge $f(x + k_\nu)$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) mit irgendwelchen Punktzahlen k_ν eine gleichmäßig konvergente Teilfolge ausgewählt werden kann.

Satz XXXI. Jede fp. Funktion ist eine Normalfunktion und jede Normalfunktion ist eine fp. Funktion.

Beweis. Wir haben zuerst zu zeigen, daß aus jeder Folge $f(x + k_\nu)$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) eine gleichmäßig konvergente Teilfolge ausgewählt werden kann. Ähnlich wie in § 5, 3. werden wir die Auswählbarkeit schon für

den Fall einer beliebigen (gleichartig) beschränkten ausgezeichneten Folge nachweisen. Es liege eine derartige Folge

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$$

vor. Wir bestimmen eine Teilfolge

$$(2) \quad f'_1(x), f'_2(x), f'_3(x), \dots$$

derart, daß sie in jedem Punkte der Punktmenge P aus § 7, 8. konvergent ist. Die Folge (2) ist dann gleichmäßig konvergent. Sie ist nämlich in jedem endlichen Intervall $a \leq x \leq b$ gleichmäßig konvergent. Denn bestimmt man zu $\frac{\varepsilon}{4}$ ein δ der gleichartig gleichmäßigen Stetigkeit und zu diesem δ die (endlich vielen) in $a \leq x \leq b$ gelegenen Punkte P_δ (vgl. § 7, 8.) und ein so großes N , daß in den Punkten P_δ

$$|f'_m(y) - f'_n(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{für } m \geq N, n \geq N,$$

dann ist für jeden Punkt aus $a \leq x \leq b$

$$\begin{aligned} |f'_m(x) - f'_n(x)| &\leq |f'_m(\xi) - f'_n(\xi)| + |f'_m(\xi) - f'_m(x)| \\ &\quad + |f'_n(\xi) - f'_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon, \end{aligned}$$

wobei ξ den x nächstgelegenen Punkt aus P_δ bedeutet. — Und nun schließt man wörtlich wie in § 5, 3., daß jede ausgezeichnete Folge, die auf jedem endlichen Intervall gleichmäßig konvergiert, auch schlechthin gleichmäßig konvergent ist.

Es sei umgekehrt eine Normalfunktion $f(x)$ gegeben, wir haben zu zeigen, daß sie fastperiodisch ist. Aus der Auswählbarkeit folgt, daß $|f(x)|$ beschränkt und $f(x)$ gleichmäßig stetig ist. Ganz wie in § 5, 4. schließen wir, daß auch die Verschiebungsfunktion

$$v_f(\tau) = v(\tau) = v(\tau, \tau, \tau, \dots)$$

eine Normalfunktion ist. Daraus folgt sehr leicht, daß jede μ -variablige Funktion

$$(3) \quad v^{(\mu)}(\tau) = v(\tau, \tau, \dots, \tau, 0, 0, \dots),$$

und insbesondere jede einvariablige Funktion

$$v^{(1)}(\tau) = v(0, 0, \dots, \tau, 0, 0, \dots)$$

eine Verschiebungs- und Normalfunktion ihres (bezüglichen) Variablenraumes ist. Von einvariabligem Normalfunktionen wissen wir aber (§ 5, 4.),

daß sie fastperiodisch sind, also liegen für jede Funktion $e^{(1)}(\tau)$ die Punkte $e^{(1)}(\tau) \leq \varepsilon$ relativ dicht. Aus der wegen c) bestehenden Ungleichung

$$v^{(u)}(\tau) \leq \sum_{v=1}^u e^{(1)}(\tau)$$

folgt aber, daß auch $v^{(u)}(\tau)$ fastperiodisch ist (nach d*)), und daher ist auch $v(\tau)$ selbst, wegen der Approximierbarkeit durch Funktionen (3), fastperiodisch.

6. Satz XXXII. *Die Summe und das Produkt zweier fp. Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sind wieder fastperiodisch.*

Beweis. Es ist einzusehen, daß $f(x) + g(x)$ eine Normalfunktion ist. Denn man kann aus $f(x + k_v) + g(x + k_v)$ ($v = 1, 2, \dots$) „auswählen“, wenn man aus jeder Unterfolge von $f(x + k_v)$ und $g(x + k_v)$ auswählen kann.

7. Wegen

$$fg = \frac{1}{4} [(f+g)^2 - (f-g)^2]$$

ist auch das Produkt von $f(x)$ und $g(x)$ wiederum fastperiodisch.

Korollar. *Jedes Exponentialpolynom $\sum a_m e^{i\lambda_m x}$ und auch jede gleichmäßig konvergente Reihe $\sum a_n e^{i\lambda_n x}$ stellen durch ihre Summen fp. Funktionen dar.*

8. Wir kommen jetzt zur Zurückführung unserer Definition der Fastperiodizität auf die in § 6 angegebene „Charakterisierung“.

Satz XXXIII. *Es seien eine fp. Funktion*

$$(4) \quad f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots)$$

und ihre Verschiebungsfunktion $e_f(\tau)$ gegeben. Für jedes k und jede Wahl der konstanten Werte $x_{k+1} = c, x_{k+2} = c, \dots$ ist die Funktion

$$(5) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_k, c, c, \dots)$$

eine fp. Funktion in (x_1, x_2, \dots, x_k) . Läßt man bei konstantem k die Parameter c, c, \dots beliebig variieren, dann ist diese Gesamtheit von Funktionen in (x_1, x_2, \dots, x_k) majorisierbar mit

$$(6) \quad e_f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, 0, 0, \dots)$$

als Majorante. Insbesondere ist bei jedem v die Gesamtheit der Funktionen

$$(7) \quad f(c_1, c_2, \dots, c_{v-1}, x_v, c_{v+1}, c_{v+2}, \dots)$$

majorisierbar mit $e_f(0, 0, \dots, \tau_v, 0, 0, \dots)$ als Majorante.

Sind umgekehrt für eine gleichmäßig stetige Funktion (4) bei jedem v und jeder Wahl der Konstanten $(c_1, c_2, \dots, c_{v-1}, c_v, \dots)$ die Funktionen (7) fastperiodisch und bei festem v majorisierbar, dann ist die Funktion $f(x)$ auch fastperiodisch.

Beweis. Es sei k gegeben. Es besteht die Gleichung

$$(8) \quad e_f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, 0, 0, \dots) = \text{Ob. Gr. } |f(x_1 + \tau_1, \dots, x_k + \tau_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots) - f(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots)|_{-\infty < x < +\infty}$$

Bildet man die rechte Seite von (8) bei festgehaltenen $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots$, dann entsteht eine Funktion

$$(9) \quad v(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, x_1, \dots, x_k),$$

die als Funktion in $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ den Bedingungen a), b), c) genügt und $\leq e_f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, 0, 0, \dots)$ und daher eine fastperiodische Verschiebungsfunktion mit (6) als Majorante ist. Also ist jede Funktion (9) fastperiodisch. Die Relation

$$\begin{aligned} & \text{Ob. Gr. } |f(x_1 + \tau_1, \dots, x_k + \tau_k, x_{k+1}, \dots) - f(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots)|_{-\infty < x < +\infty} \\ &= \text{Ob. Gr. } \left[\text{Ob. Gr. } |f(x_1 + \tau_1, \dots, x_k + \tau_k, x_{k+1}, \dots) - f(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots)|_{\substack{x_1, \dots, x_{k+1} \\ k+1, k+2}} \right] \end{aligned}$$

zeigt, daß wirklich die Funktion (6) die genaue Majorante aller Funktionen (9) und demnach auch aller Funktionen (5) ist.

Die Umkehrung ist evident: man kann mit Leichtigkeit eine Verschiebungslänge $l(\epsilon)$ der Funktion $f(x)$ angeben.

9. Hauptsatz A. *Damit eine Funktion $f(x)$ eine fp. Funktion ist, ist nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig, daß sie sich durch Exponentialpolynome $\sum a_n e^{i\lambda_n x}$ (mit finiten Punktzahlen λ_n) gleichmäßig approximieren läßt.*

Beweis. Jede fp. Funktion läßt sich nach dem vorigen Satze durch endlichvariablige fastperiodische approximieren, z. B. durch die Funktionen

$$f_n(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots).$$

Es liege nun die k -variablige fp. Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ vor. Nach dem letzten Satze ist sie fastperiodisch in x und die Gesamtheit der Funktionen

$$(10) \quad \Phi_{x_1, x_2, \dots, x_k}(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_k, x)$$

majorisierbar. Nach Satz V kann man daher die Funktionen (10) gleichartig in $(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$ durch ein Exponentialpolynom in x_k (mit skalaren λ_v)

$$\sum p_{\lambda_v} A_{\lambda_v}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) e^{i\lambda_v x_k}$$

approximieren,

$$|f(x) - \sum p_{\lambda_v} A_{\lambda_v}(x_1, \dots, x_{k-1}) e^{i\lambda_v x_k}| \leq \varepsilon,$$

wobei p_{λ_v} Konstante sind und die Koeffizienten A_{λ_v} die „Fourierkoeffizienten“

$$A_{\lambda_v} = M\{\Phi_{x_1, \dots, x_{k-1}}(t) e^{-i\lambda_v t}\} = M\{f(x_1, \dots, x_{k-1}, t) e^{-i\lambda_v t}\}$$

darstellen. Wenn wir noch gezeigt haben werden, daß A_{λ_v} eine fp. Funktion in x_1, x_2, \dots, x_{k-1} ist, dann ist der Hauptsatz durch Induktionsschluß bewiesen. Wegen 7. genügt es generell zu zeigen, daß für eine fp. Funktion $h(x_1, x_2, \dots, x_k)$ in k Variablen der „Mittelwert“

$$g(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) = M\{h(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, t)\}$$

eine fp. Funktion ist. Es sei nun $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1})$ eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der $(k-1)$ -variablen Verschiebungsfunktion

$$e_h(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}, 0),$$

wo $e_h(\tau)$ die Verschiebungsfunktion von $h(x_1, \dots, x_k)$ ist. Dann ist nach dem letzten Satze

$$\begin{aligned} & |g(x + \tau) - g(x)| \\ & \leq \text{Ob. Gr. } |h(x_1 + \tau_1, \dots, x_{k-1} + \tau_{k-1}, t) - h(x_1, \dots, x_{k-1}, t)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Und damit sind wir mit dem Beweis zu Ende.

10. Bevor wir uns auf Grund des eben bewiesenen Satzes den „Schwingungseigenschaften“ zuwenden, wollen wir noch einiges zu den „Verschiebungseigenschaften“ bemerken.

Fp. Funktionen $f_1(x), \dots, f_n(x)$ in endlicher Anzahl haben immer Majoranten, unter denen die Funktion $e(\tau) = \text{Max}(e_{f_1}(\tau), e_{f_2}(\tau), \dots, e_{f_n}(\tau))$ die „kleinste“ ist. — Normalklasse und beschränkte ausgezeichnete Menge sind ein und dasselbe (vgl. § 5, 2.)

Gegeben seien fp. Funktionen

$$f_1(x), f_2(x), \dots$$

und irgendeine Funktion $F(u_1, u_2, \dots)$, welche in einem Teil U des

Raumes (u_1, u_2, \dots) , $(u_\nu = v_\nu + i w_\nu)$, definiert und gleichmäßig stetig ist. Wenn die Punktmenge

$$u_\nu = f_\nu(x) \quad (-\infty < x < +\infty, \nu = 1, 2, 3, \dots)$$

ganz in U enthalten ist, dann ist die Funktion $F(x) = F(f_1(x), f_2(x), \dots)$ eine fp. Funktion der Variablen x .

§ 9.

Fourierreihen.

An Hand des Hauptsatzes A können wir die weitestgehende Angleichung unserer Funktionen an die einvariabli gen betreiben. Für den Spezialfall von rein- und grenzperiodischen (mehrvariabli gen) Funktionen sind die Begriffe „Mittelwert“ und „Fourierreihe“, um welche die folgenden Betrachtungen zentrieren, bereits in Abh. II, Anhang II, eingehend entwickelt worden.

1. Es sei eine beliebige fp. Funktion $f(x)$ gegeben. Für jede Komponente x existiert (vgl. § 8, 9.) der Mittelwert

$$M_k \{f\} = M \{f(x, \dots, x, t, x, \dots)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x, \dots, x, t, x, \dots) dt$$

und ist eine fp. Funktion in

$$(x, \dots, x, x, x, \dots)$$

(mit $e_f(\tau, \tau, \dots, \tau, 0, \tau, \tau, \dots)$ als Majorante). Es besteht die Relation

$$|M_k \{f\}| \leq \text{Ob. Gr. } |f(x)|,$$

also auch

$$|M_k \{f\} - M_k \{g\}| \leq \text{Ob. Gr. } |f(x) - g(x)|.$$

2. Es seien untereinander verschiedene Indizes k_1, k_2, \dots, k_n gegeben. Wir bilden von $f(x)$ den Mittelwert über x , von der so entstehenden fp. Funktion den Mittelwert über x und so fort bis x . Der so entstandene Mittelwert

$$M_{k_1, k_2, \dots, k_n} \{f\}$$

ist eine in (x, x, \dots, x) konstante, fp. Funktion in x und genügt wiederum den Relationen

$$(1) \quad |M_{k_1, k_2, \dots, k_n} \{f\}| \leq \text{Ob. Gr. } |f(x)|,$$

$$(2) \quad |M_{k_1, \dots, k_n} \{f\} - M_{k_1, \dots, k_n} \{g\}| \leq \text{Ob. Gr. } |f(x) - g(x)|.$$

Für ein Exponentialpolynom $p(x) = \sum a_n e^{i\lambda_n x}$ erhält man den Mittelwert $M_{k_1, \dots, k_n} \{p\}$ einfach dadurch, daß in der Summe $\sum a_n e^{i\lambda_n x}$ alle diejenigen Terme, die im Exponenten eine der Komponenten x, x, \dots, x tatsächlich enthalten, gestrichen werden, woraus insbesondere folgt, daß eine Vertauschung der Indizes k_1, k_2, \dots, k_n untereinander den Wert der Funktion $M_{k_1, \dots, k_n} \{p\}$ nicht ändert. Aus der Approximierbarkeit durch Polynome und der Relation (2) ergibt sich aber unmittelbar, daß diese „Invarianz“-eigenschaft einer *jeden* fp. Funktion $f(x)$ zukommt.

3. Es sei nunmehr eine beliebige unendliche Folge von Indizes

$$(3) \quad k_1, k_2, k_3, \dots$$

gegeben. Für ein Polynom $p(x)$ sind die Mittelwerte $M_{k_1, k_2, \dots, k_n} \{p\}$ von einem genügend großen n ab, $n \geq n_0$, alle einander gleich und zwar entsteht diese „Limes“-funktion durch Streichung aller Terme, die eine der Variablen x, x, \dots faktisch enthalten. Approximiert man eine beliebige Funktion $f(x)$ durch ein Polynom $p(x)$ bis auf ε , dann ist für $n_1, n_2 \geq n_0$

$$\left| M_{k_1, \dots, k_{n_1}} \{f\} - M_{k_1, \dots, k_{n_2}} \{f\} \right| \leq 2\varepsilon,$$

woraus folgt, daß die Funktionen

$$M_{k_1, k_2, \dots, k_n} \{f\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

gleichmäßig gegen eine mit

$$(4) \quad M_{k_1, k_2, \dots} \{f\}$$

zu bezeichnende, in den Komponenten x, x, \dots konstante, fp. Funktion konvergieren. An der Polynomapproximation ist auch folgendes zu erkennen. Teilt man die Indizes (3) in irgendeiner Reihenfolge auf endlich oder unendlich viele Gruppen

$$k'_1, k'_2, \dots$$

$$k''_1, k''_2, \dots$$

$$k'''_1, k'''_2, \dots$$

$$\vdots$$

von je endlich oder unendlich vielen Indizes auf, dann konvergieren die Funktionen

$$f_1 = M_{k'_1, k'_2, \dots} \{f\}$$

$$\begin{aligned} f_2 &= M_{k_1'', k_2'', \dots} \{f_1\} \\ f_3 &= M_{k_1''', k_2''', \dots} \{f_2\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

gleichmäßig gegen (4).

4. Besonders bemerkenswert ist derjenige Mittelwert, der über *alle* Komponenten genommen ist und also einer (absoluten) Konstanten gleich ist.

Satz XXXIV. *Jede fp. Funktion besitzt einen Mittelwert*

$$M \{f(t)\} = M \left\{ f \left(t, \underset{1}{t}, \underset{2}{t}, \dots \right) \right\},$$

welcher eine (endliche) skalare Zahl ist und (beispielsweise) als gleichmäßiger Limes der Folge der *k*-fachen Mittelwerte

$$(5) \quad M \left\{ f \left(t, \underset{1}{t}, \underset{2}{t}, \dots, \underset{k}{t}, \underset{k+1}{x}, \dots \right) \right\} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

erhalten werden kann.

Wir wollen noch bemerken, daß man den Mittelwert (5) beliebig genau durch das Integral

$$\frac{1}{T_1 T_2 \dots T_k} \int_{\xi_1}^{\xi_1 + T_1} \int_{\xi_2}^{\xi_2 + T_2} \dots \int_{\xi_k}^{\xi_k + T_k} f \left(t, \dots, \underset{k}{t}, \underset{k+1}{x}, \dots \right) dt, \dots, dt$$

approximieren kann (sogar gleichmäßig in (ξ_1, \dots, ξ_k) und in $(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots)$, wovon wir aber keinen Gebrauch machen werden), wenn man die Werte T_1, T_2, \dots, T_k unabhängig voneinander beliebig groß werden läßt.

5. Da mit $f(x)$ auch $|f(x)|^2$ fastperiodisch ist, existiert auch der Mittelwert $M \{|f(t)|^2\}$.

Man denke sich alle Exponentialausdrücke $e^{i\lambda x}$ mit irgendwelchen finiten Punktzahlen λ aufgestellt und für die gegebene Funktion $f(x)$ die Mittelwerte

$$a(\lambda) = M \{f(t) e^{-i\lambda t}\}$$

gebildet.

Satz XXXV. *Zu jeder fp. Funktion $f(x)$ gibt es nur abzählbar viele Werte λ , für welche der Mittelwert*

$$a(\lambda) = M \{f(t) e^{-i\lambda t}\}$$

von Null verschieden ist.

Mit den so herauspringenden Exponenten λ (den *Fourierexponenten*), die wir in irgendeiner Anordnung mit A_1, A_2, \dots bezeichnen, und den dazugehörigen Mittelwerten

$$A_{A_1} = a(A_1), \quad A_{A_2} = a(A_2), \dots$$

(den Fourierkoeffizienten) bilden wir formal die zu $f(x)$ gehörige Fourierreihe

$$f(x) \sim \sum A_{\lambda_n} e^{i\lambda_n x}.$$

Die Fourierreihe einer durch die Summe einer gleichmäßig konvergenten Reihe $\sum A_{\lambda_n} e^{i\lambda_n x}$ dargestellten Funktion stimmt mit eben dieser Reihe überein; jede Folge von finiten Zahlen λ kann die Exponentenfolge einer fp. Funktion sein.

Es bestehen die üblichen Gesetze für das Rechnen mit Fourierreihen (Abh. I, § 5), insbesondere, daß aus der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen $f_m(x) \sim \sum A_{\lambda_n}^{(m)} e^{i\lambda_n x}$ gegen die Funktion $f(x) \sim \sum A_{\lambda_n} e^{i\lambda_n x}$ (nach entsprechender „Ergänzung“) die Relationen

$$A_{\lambda_n}^{(m)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} A_{\lambda_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

folgen.

Bei festgehaltenen Exponenten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ist der Mittelwert

$$M \left\{ \left| f(t) - \sum_{v=1}^n a_v e^{i\lambda_v t} \right|^2 \right\}$$

am kleinsten für

$$a_v = a(\lambda_v) = A_{\lambda_v}.$$

Es besteht die Parsevalsche Gleichung

$$\sum |A_{\lambda_n}|^2 = M \{ |f(t)|^2 \},$$

d. h. die Limesrelation

$$M_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left| f(t) - \sum_{v=1}^N A_{\lambda_n} e^{i\lambda_n t} \right|^2 \right\} \rightarrow 0.$$

Beweis. Der Beweis verläuft bis auf den letzten Absatz ganz ebenso wie im Falle einvariabliher Funktionen; man vergleiche Abh. I, § 3 und 5, und (unseren) § 1. Bezüglich des letzten Absatzes ist zu bemerken, daß jede Funktion, die sich durch Polynome gleichmäßig approximieren läßt, sich erst recht durch Polynome im Mittel approximieren läßt, woraus dann unmittelbar die Parsevalsche Relation folgt.

6. Satz XXXVI. Es sei $f(x)$ fastperiodisch. Aus

$$M \{ |f(t)|^2 \} = 0$$

folgt

$$f(x) \equiv 0.$$

Beweis. Wir werden folgendes zeigen. Es sei irgendeine fp. Funktion $g(x) \geq 0$ gegeben, und es sei z. B. $g(0) = c > 0$. Dann gibt es einen Index N und eine Konstante $C > 0$, so daß für alle Werte $(x, x, \dots)_{N+1, N+2}$

$$M_N \{ g \} = M \{ g(t_1, t_2, \dots, t_N, x, x, \dots) \} \geq C.$$

Der Mittelwert von $M_N\{g\}$ über $(x_{N+1}, x_{N+2}, \dots)$ ist dann offenbar $\geq C$, und daraus folgt nach 3. („Invarianz“-eigenschaft)

$$M\{g(t)\} \geq C.$$

Wir bestimmen für $g(x)$ ein zu $\varepsilon = \frac{c}{4}$ gehöriges Stetigkeits- $\delta(\varepsilon)$

$$\delta = (\delta', N) \quad \left(\delta' < \frac{1}{2}\right),$$

eine zu $\varepsilon = \frac{c}{4}$ gehörige Verschiebungslänge

$$l = (l_1, l_2, \dots)$$

und ein $l_0 > 1$, so daß

$$l_0 \geq l_v \quad (v = 1, 2, \dots, N).$$

Wir fügen ein, daß die aus irgendeiner zu $\frac{c}{4}$ gehörigen Verschiebungszahl

$$\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N, \tau_{N+1}, \tau_{N+2}, \dots)$$

hervorgegangene Zahl

$$\tau^* = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N, 0, 0, \dots)$$

nach der Bestimmung von N jedenfalls eine zu $\frac{c}{4} + \frac{c}{4} = \frac{c}{2}$ gehörige Verschiebungszahl ist.

Die Komponenten $(x_{N+1}, x_{N+2}, \dots)$ mögen *irgendwelche*, aber *feste* Werte (a_1, a_2, a_3, \dots) haben. Für die Menge X_0 aller Punkte

$$x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0N}, a_1, a_2, \dots)$$

mit

$$0 \leq x_{0v} \leq \delta' \quad (v = 1, 2, \dots, N)$$

besteht die Abschätzung

$$g(x_0) \geq c - \frac{c}{4} = \frac{3c}{4}.$$

Für irgendwelche ganze Zahlen $n_v \geq 0$ ($v = 1, 2, \dots, N$) gibt es eine zu $\frac{c}{2}$ gehörige Verschiebungszahl

$$\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N, 0, 0, \dots),$$

so daß

$$\left(2n_v + \frac{1}{2}\right) l_0 \leq \tau_v \leq \left(2n_v + \frac{3}{2}\right) l_0 \quad (v = 1, 2, \dots, N).$$

Die aus X_0 durch Verschiebung um τ hervorgehende Punktmenge X_J

$$x_J = (x_{J1}, x_{J2}, \dots, x_{JN}, a_1, a_2, \dots)$$

ist gänzlich im Intervall

$$(J) \quad 2n_\nu l \leq x \leq 2(n_\nu + 1)l \quad (\nu = 1, 2, \dots, N)$$

enthalten und genügt der Relation

$$g(x_J) \geq \frac{c}{4}.$$

Das N -dimensionale Volumen von X_J ist $(\delta')^N$, des Intervalls J selbst $= (2l)^N$. Wegen $g(x) \geq 0$ ist dann

$$M\{g(t_1, t_2, \dots, t_N, x_{N+1}, \dots)\} \geq \frac{c}{4} \left(\frac{\delta'}{2l}\right)^N > 0.$$

Wir bemerken noch folgendes. Weiß man von irgendeinem Punkte $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots)$, daß $g(\xi) = c > 0$, dann wird man zu derselben Schranke

$$C = \frac{c}{4} \left(\frac{\delta'}{2l}\right)^N \text{ geführt.}$$

Aus der Parsevalschen Gleichung erhält man in Verbindung mit Satz XXXVI den

Satz XXXVII. Eindeutigkeitssatz. *Jede fp. Funktion, die keine wesentlichen Terme enthält,*

$$f(x) \sim 0,$$

ist identisch Null:

$$f(x) \equiv 0.$$

7. Wir wollen noch etwas zu 3. nachtragen. Wegen der formalen Konvergenz der Fourierreihen von gleichmäßig konvergenten Funktionen folgt aus der Polynomapproximation, daß auch für eine beliebige fp. Funktion die Fourierreihe des Mittelwertes über die Indizes (k_1, k_2, \dots) aus der ursprünglichen Fourierreihe durch gliedweise Mittelwertbildung, d. h. durch Streichung der Terme mit einer der Komponenten x_{k_1}, x_{k_2}, \dots entsteht. (Für den Spezialfall grenzperiodischer Funktionen vgl. Abh. II, Anhang II, S. 188, 202).

8. Wir sprechen ganz im Sinne von § 1, 6. von „Mittelkonvergenz“ und „Mittelkonvergenz gegen eine vorgegebene fp. Funktion“.

Satz XXXVIII. *Eine ausgezeichnete Folge*

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots,$$

die im Mittel konvergent ist, ist gleichmäßig konvergent³⁾.

³⁾ Man kann sogar folgendes beweisen. Eine ausgezeichnete Folge

$$\varphi_\nu(x) \sim \sum A_{A_n}^{(\nu)} e^{iA_n x} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

(Fortsetzung der Fußnote 3 auf der nächsten Seite.)

Beweis. Es genügt nachzuweisen (vgl. Abh. II, S. 108), daß zu jedem $c > 0$ ein $C > 0$ so zugeordnet werden kann, daß je zwei Funktionen, für die in einem einzigen Punkte ξ die Ungleichung

$$|\varphi_\mu(\xi) - \varphi_\nu(\xi)| \geq c$$

besteht, auch

$$M\{|\varphi_\mu(t) - \varphi_\nu(t)|\} \geq C$$

erfüllt ist (weil doch dann auf Grund der Schwarzschen Ungleichung $M\{|f|^2\} \geq (M\{|f|\})^2$ erst recht $M\{|\varphi_\mu(t) - \varphi_\nu(t)|^2\} \geq C^2$ ist). Offenbar ist die Gesamtheit von Funktionen $|\varphi_\mu(x) - \varphi_\nu(x)|$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3, \dots$) ausgezeichnet. Bestimmt man zu $\varepsilon = \frac{c}{4}$ ein Stetigkeits- $\delta(\varepsilon)$, $\delta = (\delta', N)$, (mit $\delta' < \frac{1}{2}$) und eine Verschiebungslänge $l(\varepsilon) = (l_1, l_2, l_3, \dots)$ ihrer Majorante, dann erhält man wörtlich wie in 6.

$$C = \frac{c}{4} \left(\frac{\delta'}{2l}\right)^N > 0.$$

9. Auf Grund des letzten Satzes kann man durch wörtliche Wiederholung der Überlegungen in § 2, 1. nachweisen, daß die Polynomapproximation der Funktion $f(x) \sim \sum A_{A_n} e^{iA_n x}$ durch Fejérrpolynome geschehen kann, d. h. durch Ausdrücke der Gestalt

$$S_{n_1, \dots, n_k}^{\alpha_1, \dots, \alpha_k} = \sum_{v_1=-n_1}^{+n_1} \dots \sum_{v_k=-n_k}^{+n_k} \left(1 - \frac{|v_1|}{n_1}\right) \dots \left(1 - \frac{|v_k|}{n_k}\right) A_{v_1 \alpha_1 + \dots + v_k \alpha_k} e^{i(v_1 \alpha_1 + \dots + v_k \alpha_k) x},$$

wobei die Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ linear unabhängige finite Zahlen sind (und, wie üblich, der Ausdruck $(v_1 \alpha_1 + \dots + v_k \alpha_k) x$ durch die *insgesamt endliche* Summe $v_1 \sum_{\sigma=1}^{\infty} \alpha_1 x + \dots + v_k \sum_{\sigma=1}^{\infty} \alpha_k x$ definiert ist). Denn bildet man für irgendeine finite Zahl α den Kern

$$H_n(\alpha t) = \sum_{v=-n}^{+n} \left(1 - \frac{|v|}{n}\right) e^{-i v \alpha t} = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin \frac{n}{2} \alpha t}{\sin \frac{1}{2} \alpha t}\right)^2 \quad \left(v \alpha t = v \sum_{\sigma=1}^{\infty} \alpha t\right),$$

dann hat man wieder die Darstellung

$$S_{n_1, \dots, n_k}^{\alpha_1, \dots, \alpha_k} = M\{f(x+t) H_{n_1}(\alpha_1 t) \dots H_{n_k}(\alpha_k t)\},$$

aus welcher wiederum folgt, daß die Gesamtheit der Fejérrpolynome von

ist schon dann gleichmäßig konvergent, wenn die Fourierreihen formal konvergieren, derart, daß für jedes n

$$\lim_{v \rightarrow \infty} A_{A_n}^{(v)}$$

vorhanden und endlich ist.

$f(x)$ durch $f(x)$ majorisiert wird und daß daher jede ihrer im Mittel konvergenten Folgen auch schon gleichmäßig konvergent ist.

10. Wörtlich übertragbar sind auch Wortlaut und Beweise der Sätze III und IV, wonach Funktionen mit gemeinsamen Exponenten auch gemeinsame approximierende Fejéropolynome besitzen, welche im Falle ausgezeichnetener Mengen sogar *gleichartig* approximieren. Analog zu Satz V haben wir auch den

Satz XXXIX. *Jede ausgezeichnete Menge besitzt eine gemeinsame (sogar gleichartig) approximierende Folge von Fejéropolynomen.*

Denn der Beweis des Satzes V beruht auf zwei Tatsachen: auf der Majorisierbarkeit einer ausgezeichneten Folge und (vgl. § 1, 17. Bemerkung) auf dem „Satz B“ über diophantische Approximationen aus Abh. II, S. 113. Nun überzeugt man sich leicht, daß der Wortlaut und der Beweis des Satzes B unverändert zu Recht bestehen, wenn man die dort vorkommenden Zahlen μ_1, \dots, μ_M und λ *finite* Zahlen sein läßt.

11. Zum Schluß bemerken wir noch, daß die Sätze VII, VIII, IX über absolute Konvergenz von gewissen Fourierreihen (linear unabhängige Exponenten, allgemeinere Zerlegungen in linear unabhängige Bestandteile, positive Koeffizienten) gleichfalls wörtlich richtig bleiben.

§ 10.

Die Zurückführung auf grenzperiodische Funktionen.

In § 2, 7. haben wir einen auf dem Approximationssatz beruhenden Beweis für das bemerkenswerte Ergebnis aus Abh. II gegeben, daß es zu jeder einvariablen fp. Funktion $\varphi(\xi)$ grenzperiodische Funktionen $f(x) = f(x_1, x_2, \dots)$ gibt, von denen die Funktion $\varphi(\xi)$ die „Diagonalfunktion“ ist, d. h. aus denen sie durch die Substitution $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = \xi$ hervorgeht

$$\varphi(\xi) = f(\xi, \xi, \xi, \dots).$$

Auf ganz analogem Wege werden wir zeigen, daß allgemeiner auch jede mehrvariablen fp. Funktion sich als „Diagonalfunktion“ von *grenzperiodischen* auffassen läßt, womit dann innerhalb der Gesamtheit aller mehrvariablen fp. Funktionen den grenzperiodischen Funktionen, die ja nur einen Teil dieser Gesamtheit ausmachen, der Charakter „primärer“ Funktionen verliehen wird, auf welche alle anderen in einfacher Weise zurückführbar sind.

1. Man kann die rein- und grenzperiodischen Funktionen, die wir durch Verschiebungseigenschaften definiert haben, in eindeutiger Weise auch durch Schwingungseigenschaften charakterisieren. Die fp. Funktion

$f(x) \sim \sum A_{A_n} e^{i A_n x}$ (alle $A_{A_n} \neq 0$) ist dann und nur dann reinperiodisch mit der Periode $p = (p_1, p_2, \dots)$, wenn

$$f(x_1, \dots, x_m + p_m, x_{m+1}, \dots) = f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots) \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

d. h. auf Grund des formalen Kalküls mit Fourierreihen und des Eindeutigkeitsatzes, dann und nur dann, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{A_n} e^{i A_n p_m} e^{i A_n x} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} A_{A_n} e^{i A_n x} \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

also wenn jedes A_n ein ganzzahliges Multiplum von $\frac{2\pi}{p_m}$ ist, also dann und nur dann, wenn die Funktion $f(x)$ die ganze Basis (vgl. § 7, 13.)

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$$

mit

$$\alpha_v = \left(0, 0, \dots, \frac{2\pi}{p_v}, 0, 0, \dots\right)$$

besitzt. Damit $f(x)$ grenzperiodisch mit der Grenzperiode $p = (p_1, p_2, \dots)$ ist, ist notwendig und hinreichend, daß sie durch reinperiodische mit Perioden $[p]$ approximierbar ist, d. h. daß jede Zahl A_n ein rationales

Multiplum von $\frac{2\pi}{p_m}$ ist, d. h. es ist notwendig und hinreichend, daß $f(x)$ die (im allgemeinen: nicht ganze) Basis

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$$

mit

$$\alpha_v = \left(0, 0, \dots, \frac{2\pi}{p_v}, 0, 0, \dots\right)$$

besitzt.

Aus eben Bewiesenem folgt, daß unsere „allgemeinen“ Fourierreihen im Spezialfalle rein- und grenzperiodischer Funktionen dasselbe sind, was in Abh. II, Anhang II im direkten Zuschnitt auf diese Funktionen als Fourierreihe definiert wird.

2. Es seien der x -Raum (x_1, x_2, \dots) , der ξ -Raum (ξ_1, ξ_2, \dots) und irgendwelche finite Punktzahlen C_1, C_2, \dots des x -Raumes in der Anzahl der Dimension des ξ -Raumes gegeben. Wenn man in eine beliebige fp. Funktion des ξ -Raumes $\varphi(\xi)$ die Substitution

$$(1) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= C_1 x \\ \xi_2 &= C_2 x \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\xi = Cx)$$

vornimmt, so entsteht eine Funktion des x -Raumes

$$f(x) = \varphi(Cx),$$

welche, wie man auf dem Wege über approximierende Polynome sofort einsieht, eine fp. Funktion ihres Raumes ist. Wir nennen $f(x)$ eine Transformierte von $\varphi(\xi)$. Den Fourierreihen ist es „anzusehen“, daß jede ganzbasige Funktion als Transformierte einer reinperiodischen und jede beliebige als Transformierte einer grenzperiodischen dargestellt werden kann. Wir wollen diese Aussage gleich in einer präziseren Form beweisen. Wenn in der Substitution (1) jede Punktzahl C_ν in einer Komponente = 1, in allen übrigen = 0 ist, so wollen wir diese Substitution eine Diagonalsubstitution, die Funktion $f(x)$ eine Diagonalfunktion von $\varphi(\xi)$, und $\varphi(\xi)$ eine Verräumlichung von $f(x)$ nennen. Man kann nun präziser behaupten, daß jede ganzbasige Funktion die Diagonalfunktion einer reinperiodischen und jede beliebige die Diagonalfunktion einer grenzperiodischen ist.

Es liege ein Polynom

$$(2) \quad \sum a_n e^{i\lambda_n x}$$

vor, und die (skalaren) reduzierten Zahlenmengen

$$A_\nu = (\alpha_{\nu 1}, \alpha_{\nu 2}, \alpha_{\nu 3}, \dots)$$

seien bezügliche Basen der Komponentenmengen

$$K_\nu = (\lambda_{\nu 1}, \lambda_{\nu 2}, \lambda_{\nu 3}, \dots).$$

An Hand der Darstellungen

$$\lambda_{\nu \mu} = \sum c_{\nu \mu \sigma} \alpha_{\nu \sigma} \quad (c_{\nu \mu \sigma} \text{ rational})$$

$$\lambda_{\nu \mu} x = \sum c_{\nu \mu \sigma} \alpha_{\nu \sigma} x$$

bilden wir die linearen Formen

$$\lambda_{\nu \mu} x \sim \sum c_{\nu \mu \sigma} \alpha_{\nu \sigma} \zeta_{\nu \sigma}$$

mit der zweifach unendlichen Schar von Variablen $\zeta_{\nu \sigma}$, indem einfach x überall, wo es mit dem Faktor $\alpha_{\nu \sigma}$ auftritt, durch $\zeta_{\nu \sigma}$ ersetzt wird, und substituieren

in $\sum a_n e^{i\sum \lambda_{\nu n} x}$ statt der Formen in x die Formen in ζ . Das so entstandene Exponentialpolynom ist offenbar grenzperiodisch in den Variablen $\zeta_{\nu \sigma}$ mit der Grenzperiode $\left(\frac{2\pi}{\alpha_{\nu \sigma}}\right)$, ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) ($\sigma = 1, 2, 3, \dots$) und eine Verräumlichung von (2). Die benutzte Diagonaltransformation ist

$$\zeta_{\nu 1} = \zeta_{\nu 2} = \zeta_{\nu 3} = \dots = x, \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

Bei einer beliebigen Funktion $f(x)$ approximieren wir sie durch Polynome der Gestalt (2)

$$p_1(x), p_2(x), \dots, \quad (\rightarrow f(x)),$$

wählen *gemeinsame* Basen A_ν und verräumlichen eine jede Funktion $p_k(x)$ zu $P_k(\zeta)$. Wenn wir zeigen, daß auch die Folge $P_k(\zeta)$ gleichmäßig konvergiert, sind wir mit dem Beweis zu Ende. Die Verräumlichung von $p_{k_1}(x) - p_{k_2}(x)$ wird durch $P_{k_1}(\zeta) - P_{k_2}(\zeta)$ geliefert, und jetzt brauchen wir nur noch zu zeigen, daß bei einer Verräumlichung $P(\zeta)$ eines Polynoms $p(x)$ zu jedem Punkte $\zeta^{(0)}$ ein Punkt $x^{(0)}$ so zugeordnet werden kann, daß sich $P(\zeta^{(0)})$ beliebig wenig von $p(x^{(0)})$ unterscheidet. Daß das möglich ist, folgt aber nach Kronecker, weil man (vgl. Bohr [8]) die endlich vielen Kongruenzen

$$\left| \alpha_\sigma x - \zeta_{\nu\sigma}^{(0)} \right| \leq \varepsilon \pmod{\frac{2\pi}{\varrho}} \quad (\varrho \text{ rationale Zahl; } \nu, \sigma = 1, 2, 3, \dots)$$

in x auflösen kann. — Bei einer ganzbasigen Funktion $f(x)$ führt diese Verräumlichung zu einer reinperiodischen Funktion von ζ .

3. Wir können nun den Satz aussprechen:

Hauptsatz B. *Die allgemeinsten fp. Funktionen sind die allgemeinsten Diagonalfunktionen der allgemeinsten grenzperiodischen Funktionen.*

4. Unsere mehrvariablen fp. Funktionen sind insofern die „allgemeinsten“, als bei einer Iteration des Prozesses des Überganges zu mehrvariablen Funktionen eine Erweiterung der Funktionenklasse nicht herauskommt. D. h. faßt man unsere allgemeinen Begriffe: Punkt, Intervall, Intervalllänge, Verschiebungszahl, Periode usw. als „eindimensional“ auf, und baut auf ihnen auf dieselbe Weise, wie diese aus den „tatsächlich einvariablen“ Begriffen hergeleitet wurden, ihrerseits „mehrdimensionale“ Begriffe auf, so wird dadurch die Klasse der fp. Funktionen *nicht* vergrößert.

§ 11.

Integralgleichungen.

Wir wollen noch am Beispiel der Integralgleichungen sehen, in wie unmittelbarer Weise Betrachtungen über reinperiodische Funktionen auf fastperiodische übertragbar sein können.

Es liege eine reelle fp. Funktion zweier Variablen $K(x, y)$ und eine reelle fp. Funktion $f(x)$ vor. Gefragt wird nach allen fp. Funktionen $\varphi(x)$, welche für konstante Werte λ der Gleichung

$$(A) \quad \varphi(x) = f(x) - \lambda M \{ K(x, t) \varphi(t) \}$$

genügen. Wenn man der Gleichung (A) die Gleichung

$$(B) \quad \varphi^*(x) = f^*(x) - \lambda \int_0^1 K^*(x, t) \varphi^*(t) dt$$

gegenüberstellt, in welcher die Funktionen $\varphi^*(x)$, $f^*(x)$ und $K^*(x, y)$ als (durchweg) stetig und in jeder Variablen reinperiodisch mit der Periode 1 angenommen werden, dann kann man, überschlägig gesprochen, behaupten, daß jede Aussage über die Gleichung (B) unmittelbar und wörtlich auf die Gleichung (A) übertragbar ist, wenn man jede vorkommende Operation \int_0^1 durch die entsprechende Mittelwertbildung ersetzt. (Wir halten uns hinsichtlich der gegebenen und gesuchten Funktionen strikt an unsere Definition der Fastperiodizität, obwohl man auf Grund bereits bestehender Verallgemeinerungen des Fastperiodizitätsbegriffs (Stepanoff [1]) mit den üblichen Konzessionen an Unstetigkeiten im Falle (B) in gewisser Weise auch im Falle (A) Schritt halten kann). Z. B. berücksichtigt man, daß die Gesamtheit der Funktionen $M\{K(x, t)g(t)\}$ für alle möglichen fp. Funktionen $g(t)$ mit $M\{|g(t)|^2\} \leq 1$, weil doch nach der Schwarzschen Ungleichung auch $M\{|g(t)|\} \leq 1$, eine ausgezeichnete Menge (mit $e_K(\tau, 0)$ als Majorante) bilden, dann gelangt man (vgl. Courant-Hilbert [1], III, § 1 bis 4) wörtlich ebenso wie im Falle (B) zu dem Fredholmschen Satze: *Die Gleichung (A) besitzt bei festem λ entweder für jede Funktion $f(x)$ eine (einzige) Lösung $\varphi(x)$, oder die zugehörige homogene Gleichung*

$$\varphi(x) = \lambda M\{K(x, t)\varphi(t)\}$$

besitzt eine endliche Anzahl voneinander linear unabhängiger Lösungen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_r(x)$, in welchem Falle die Gleichung (A) nur für solche Funktionen $f(x)$ lösbar ist, für die $M\{f(t)\varphi_i(t)\} = 0$, $i = 1, 2, \dots, r$. Man kann zu diesem Satze auch auf jedem anderen im Falle (B) gangbaren Wege gelangen.

Weiterhin gelten z. B. die Zusammenhänge zwischen transponierten Gleichungen, die Sätze über symmetrische Kerne, Entwicklungen nach Eigenfunktionen usw. — Die iterierten Kerne sind zu definieren durch

$$K^{\mu+\nu}(x, y) = M\{K^\mu(x, t)K^\nu(t, y)\}.$$

Die Resolvente

$$K(x, y, \lambda) = \sum \lambda^n K^n(x, y),$$

für welche

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda M\{K(x, t; \lambda)f(t)\},$$

ist selbstverständlich auch fastperiodisch und gleich dem Quotienten von ganzen Funktionen $-\frac{D(x, y, \lambda)}{D(\lambda)}$ mit der Formel

$$D(\lambda) = \sum (-1)^n \frac{1}{n!} M\{\|K(t_\mu, t_\nu)\|_{\mu, \nu=1, 2, \dots, n}\}$$

und der entsprechenden Formel für $D(x, y, \lambda)$, wiederum kann man die Eigenfunktionen durch Minoren höherer Ordnung erhalten usw.

Selbstverständlich sind wir auch in unserem Falle keineswegs an die Eindimensionalität der Variablen x und y gebunden. Genau so und mit dem Ergebnis ganz analoger Resultate wie im Falle (B) können auch im Falle (A) die Variablen x und y zwei (untereinander gleiche) mehrdimensionale (sogar unendlichdimensionale) Räume durchlaufen (vgl. § 10, 4.).

Verzeichnis der zitierten Literatur.

- H. Bohr [8], Neuer Beweis eines allgemeinen Kroneckerschen Approximationssatzes, Kgl. Danske Videnskabernes Selskab **6** (1924), Nr. 8.
R. Courant u. D. Hilbert [1], Methoden der mathem. Physik I, 1924.
W. Stepanoff [1], Über einige Verallgemeinerungen der fastperiodischen Funktionen. Math. Annalen **95** (1926), S. 473.

(Eingegangen am 20. 10. 1925.)