Über Potenzreihen, deren Koeffizienten fast alle ganzzahlig sind.

Von

M. Fekete in Budapest.

1. Man verdankt den unten folgenden interessanten Satz den Herren Pólya und Carlson, von denen der erstere ihn zuerst formuliert[1]), der zweite aber zuerst bewiesen[2]) hat:

I. *Wenn eine Potenzreihe*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{1}$$

mit ganzzahligen[3]) *Koeffizienten* a_n *im Einheitskreise konvergiert, so ist die dargestellte Funktion* $f(x)$ *entweder rational oder über den Rand des Einheitskreises hinaus nicht fortsetzbar. Im ersteren Falle hat* $f(x)$ *die Form*

$$\frac{P(x)}{(1-x^p)^q},$$

wobei $P(x)$ *ein Polynom,* p *und* q *ganze positive Zahlen bezeichnen.*

2. Den wichtigen speziellen Fall dieses Satzes, wo die Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ von (1) beschränkt ist, also nur endlich viele voneinander verschiedene ganze Zahlen enthält, hat Herr Szegö folgenderweise verallgemeinert[4]):

---

[1]) G. Pólya, Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten. Math. Ann. 77 (1916), S. 497–513.

[2]) F. Carlson, Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten. Math. Zeitschr. 9 (1921), S. 1–13.

[3]) Ganzzahlig heißt: von der Form $a+bi$, wobei a und b ganze rationale Zahlen sind.

[4]) G. Szegö, Über Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten. Sitzungsber. der Preußischen Akad. d. Wiss. 1922, S. 88–91.

II. *Wenn unter den Koeffizienten der Potenzreihe* (1) *nur endlich viele voneinander verschiedene komplexe Werte vorkommen, so ist die durch* (1) *dargestellte Funktion* $f(x)$ *entweder rational, oder über den Einheitskreis nicht fortsetzbar. Im ersten Falle hat* $f(x)$ *die Form*

$$f(x) = \frac{P(x)}{1 - x^p},$$

wobei $P(x)$ *ein Polynom,* p *eine natürliche Zahl bezeichnet.*

3. Herr Szegö hat auch allgemeinere Typen von Potenzreihen als der eben genannte untersucht, indem er die Bedingung der Endlichvielwertigkeit sämtlicher a_n fallen ließ und das Bestehen dieser Bedingung nur für „*fast alle*“ a_n forderte[5]). So gelangte er zum folgenden interessanten Resultat[6]):

III. *Die Koeffizienten* a_n *der Potenzreihe* (1) *mögen nur endlich viele verschiedene Werte* $d_1, d_2, \ldots, d_k$ *annehmen, mit Ausnahme einer Folge*

$$(2) \qquad a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_\nu}, \ldots$$

von Koeffizienten, die den folgenden Bedingungen unterworfen sind:

1. $\lim \frac{\nu}{n_\nu} = 0.$

2. *Sie sind beschränkt.*

Dann stellt diese Potenzreihe eine eindeutige Funktion dar, deren Existenzbereich durch einen Kreis $|x| = r \geqq 1$ *begrenzt ist; die singulären Punkte im Existenzbereiche, wenn solche überhaupt vorhanden sind, sind einfache Pole, die in Einheitswurzeln liegen. Der Fall* $r = \infty$ *ist so zu verstehen, daß die Funktion meromorph (eventuell rational) ist.*

Dieser Satz ist eine Erweiterung von II und enthält zugleich (bis auf die Bedingung der Beschränktheit der Koeffizienten) auch den sogenannten Fabryschen Lückensatz[7]).

---

[5]) Eine Teilfolge $\{u_{n_\nu}\}$ der unendlichen Folge $\{u_n\}$ enthält „fast alle“ Glieder von $\{u_n\}$, wenn $\lim\limits_{\nu \to \infty} \frac{\nu}{n_\nu} = 1$ ist, oder, anders ausgedrückt, wenn $\lim\limits_{m \to \infty} \frac{A(m)}{m} = 1$, wobei $A(m)$ die Anzahl derjenigen Glieder von $\{u_n\}$ bezeichnet, deren Index $\leqq m$ ist und die der Teilfolge $\{u_{n_\nu}\}$ angehören.

[6]) G. Szegö, Tschebyscheffsche Polynome und nichtfortsetzbare Potenzreihen. Math. Ann. **87** (1922), S. 90–111, Satz 3, S. 97–101.

[7]) Fabry, Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et l'impossibilité du prolongement analytique dans des cas très généraux. Ann. scient. de l'École Normale Supérieure (3) **13** (1896), S. 367–399; s. insbes. S. 381–382. Sur les séries de Taylor qui ont une infinité de points singuliers. Acta math. **22** (1899), S. 65–87.

4. Durch Herrn Szegö angeregt, habe ich mir nun die Frage gestellt, ob für Potenzreihen, deren Koeffizienten fast alle ganzzahlig sind, eine ähnliche simultane Erweiterung von I und des Fabryschen Lückensatzes gilt? Es ist mir leider bisher nicht gelungen, diese Frage völlig zu erledigen, doch bin ich zu einem Teilergebnis gelangt, das vielleicht auf einiges Interesse rechnen kann. Mein Resultat enthält gleichzeitig den Satz I und den Hadamardschen Spezialfall[8]) des Fabryschen Lückensatzes; es kann folgenderweise formuliert werden:

IV. *Es seien die Koeffizienten a_n der Potenzreihe* (1) *mit dem Konvergenzradius* 1 *ganzzahlig, mit Ausnahme einer Folge* (2) *von Koeffizienten, für welche*

$$\liminf_{\nu\to\infty} \frac{n_\nu}{n_{\nu-1}} > 1$$

besteht. Dann stellt diese Potenzreihe eine eindeutige Funktion dar, deren Existenzbereich durch einen Kreis $|x| = r \geqq 1$ begrenzt ist.

Die singulären Punkte im Existenzbereiche, wenn solche überhaupt vorhanden sind, sind Pole, die in Einheitswurzeln liegen. Der Fall $r = \infty$ ist so zu verstehen, daß die Funktion meromorph (*eventuell rational*) *ist.*

5. Ich beweise diesen Satz mit Hilfe einer Methode, welche Herr Szegö zu einem neuen Beweise des Hadamardschen Lückensatzes, ferner des Satzes I und verwandter Sätze benutzt hat[9]). Ich stütze mich dabei auf einen Hilfssatz, in welchem mein früheres Resultat[10]), betreffend die Annäherung der Null durch ganzzahlige Polynome, in verschärfter Form wiedergewonnen wird. Dieser Hilfssatz lautet:

V. *Es sei C eine Kurve in der komplexen x-Ebene von der Beschaffenheit, daß man Polynome*

$$t_n(x) = x^n + t_1^{(n)} x^{n-1} + \ldots + t_n^{(n)} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

finden kann, für welche auf C (*von einem gewissen n an*)

$$|t_n(x)| < \vartheta^n$$

gilt, wobei ϑ eine nur von C abhängige positive Zahl bedeutet, die kleiner als 1 *ist. Dann gibt es auch Polynome*

$$g_n(x) = x^n + g_1^{(n)} x^{n-1} + \ldots + g_n^{(n)} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

[8]) Vgl. E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. Berlin 1916. S. 73.

[9]) A. a. O. [4]).

[10]) 1°. A. a. O. [4]) S. 104. 2°. M. Fekete, Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. Math. Zeitschr. **17** (1923), S. 228–249; s. insbes. § 7, S. 246–249.

mit ganzzahligen Koeffizienten, für welche auf C (von einem gewissen n an)

$$|g_n(x)| < \vartheta_1^n$$

ist, wobei ϑ_1 eine feste positive Zahl kleiner als 1 bezeichnet.

Ich werde diesen Hilfssatz auf dieselbe Weise ableiten, wie ihn Herr Kakeya[11]) im Spezialfalle bewiesen hat, wo C ein reelles Intervall von der Länge < 4 ist. Ich betrachte mit Herrn Kakeya die linearen Kombinationen

$$L_{n,k}(x) = t_n(x) + \lambda_1^{(n)} t_{n-1}(x) + \lambda_2^{(n)} t_{n-2}(x) + \ldots + \lambda_{n-k}^{(n)} t_k(x)$$

der Polynome (3). Offenbar gibt es unter diesen linearen Kombinationen für jedes $n > k$ auch solche, in welchen die Faktoren $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \ldots, \lambda_{n-k}^{(n)}$ dem Betrage nach kleiner als 1 und die Koeffizienten der Potenzen $x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, \ldots, x^{k+1}, x^k$ ganzzahlig sind. Eine solche Kombination läßt die Zerlegung

$$L_{n,k}(x) = G_{n,k}(x) + H_{n,k}(x) \tag{4}$$

zu, wo

$$G_{n,k}(x) = x^n + g_1^{(n,k)} x^{n-1} + g_2^{(n,k)} x^{n-2} + \ldots + g_n^{(n,k)}$$

lauter ganzzahlige Koeffizienten hat, während

$$H_{n,k}(x) = h_0^{(n,k)} x^k + h_1^{(n,k)} x^{k-1} + \ldots + h_k^{(n,k)}$$

ein Polynom von höchstens k-tem Grade bedeutet, deren Koeffizienten dem Betrage nach kleiner als 1 sind. Außerdem genügt $L_{n,k}(x)$ überall auf C der Ungleichung

$$|L_{n,k}(x)| \leqq \vartheta^n + \vartheta^{n-1} + \vartheta^{n-2} + \ldots + \vartheta^k < \frac{\vartheta^k}{1-\vartheta}. \tag{5}$$

Sei nun k eine feste natürliche Zahl, für welche

$$\frac{\vartheta^k}{1-\vartheta} \leqq \frac{1}{3} \tag{6}$$

ist. Man kann aus der Gesamtheit der Polynome

$$H_{n,k}(x) \qquad (n = k+1, k+2, \ldots)$$

eine unendliche Folge

$$H_{n_1,k}(x),\ H_{n_2,k}(x), \ldots, H_{n_\nu,k}(x), \ldots$$

auswählen, welche für $\nu \to \infty$ auf C gleichmäßig konvergiert, da ja aus den beschränkten Folgen

$$h_i^{(n,k)} \qquad (i = 0, 1, \ldots, k;\ n = k+1, k+2, \ldots)$$

solche Teilfolgen

$$h_i^{(n_\nu,k)} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, k;\ \nu = 1, 2, \ldots)$$

[11]) Y. Okada, On Approximate Polynomials with Integral Coëfficients only. The Tohôku Math. Journal **23** (1923), S. 26—35.

sich aussondern lassen, für welche

$$\lim_{\nu \to \infty} h_i^{(n_\nu, k)}$$

existiert. Man kann also ein solches Zahlenpaar n_ϱ, n_σ finden, daß $n_\varrho > n_\sigma$ und auf C

$$(7) \qquad | H_{n_\varrho, k}(x) - H_{n_\sigma, k}(x) | \leqq \frac{1}{3}$$

ist. Dann ist aber nach (4), (5), (6) und (7) daselbst

$$| G_{n_\varrho, k}(x) - G_{n_\sigma, k}(x) |$$
$$\leqq | L_{n_\varrho, k}(x) | + | L_{n_\sigma, k}(x) | + | H_{n_\varrho, k}(x) - H_{n_\sigma, k}(x) | < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1,$$

folglich ist

$$\Gamma(x) \equiv G_{n_\varrho, k}(x) - G_{n_\sigma, k}(x) \equiv x^{n_\varrho} + \gamma_1 x^{n_\varrho - 1} + \ldots + \gamma_{n_\varrho}$$

ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, für welches

$$\underset{(C)}{\mathrm{Max}} | \Gamma(x) | = \theta < 1$$

ist. Nun konstruiert man mit Hilfe dieses Polynoms die $g_n(x)$ des Hilfssatzes mit größter Leichtigkeit. Ist nämlich

$$n = q \cdot n_\varrho + r,$$

wo q und r ganze rationale Zahlen sind, welche den Bedingungen

$$q \geqq 0, \qquad 0 \leqq r \leqq n_\varrho - 1$$

genügen, so setze man einfach

$$(8) \qquad g_n(x) = x^r [\Gamma(x)]^q .$$

Die durch (8) definierten Polynome haben ja ganzzahlige Koeffizienten, ihr höchstes Glied ist x^n und sie befriedigen auf C von einem gewissen n an die Ungleichung

$$| g_n(x) \leqq | x^r | \theta^q < K \theta^q = K \theta^{\frac{n-r}{n_\varrho}} \leqq \frac{K}{\theta} \left(\theta^{\frac{1}{n_\varrho}} \right)^n < \vartheta_1^n,$$

wo K eine von C und n_ϱ abhängende, von n unabhängige Konstante, ϑ_1 aber eine positive Zahl bedeutet, welche $> \theta^{\frac{1}{n_\varrho}}$ und < 1 ist.

6. Nun gehe ich zum Beweise von IV über. Da die Behauptungen dieses Satzes im Falle, wo die durch (1) dargestellte Funktion $f(x)$ über den Einheitskreis nicht fortsetzbar ist, offenbar richtig sind, so nehme ich an, daß sich am Einheitskreise eine reguläre Stelle x_0 von $f(x)$ befindet. Dann zeige ich, daß (1) die Zerlegung

$$(9) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{n_\nu} x^{n_\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n x^n = H(x) + P(x)$$

zuläßt, wo $H(x)$ eine Hadamardsche Reihe (d. h. eine Potenzreihe, für welche

$$\liminf_{\nu\to\infty}\frac{n_\nu}{n_{\nu-1}} > 1$$

besteht) bezeichnet, deren Konvergenzradius r größer als 1 ist, $P(x)$ aber eine Pólyasche Reihe ist, d. h. eine Potenzreihe mit ganzzahligen Koeffizienten und mit dem Konvergenzradius 1. Der obigen Annahme zufolge stellt $P(x)$ gemäß I eine rationale Funktion von der Form

$$\frac{g(x)}{(1-x^p)^q}$$

dar, wobei $g(x)$ ein Polynom, p und q natürliche Zahlen bezeichnen, während $H(x)$ eine für $|x| < r$ reguläre Funktion $h(x)$ definiert, deren Existenzbereich nach dem Hadamardschen Lückensatz durch den Kreis $|x| = r$ begrenzt ist. Die Funktion

$$f(x) = \frac{g(x)}{(1-x^p)^q} + h(x)$$

besitzt ja die in IV behaupteten sämtlichen Eigenschaften. Um nun die Möglichkeit der Zerlegung (9) zu beweisen, werde ich den „Bruchteil" derjenigen Koeffizienten a_{n_ν} der Reihe (1) abschätzen, welche ausnahmsweise nicht ganzzahlig sind. Zu diesem Zwecke werde ich gewisse lineare Kompositionen

$$a_{n_\nu} + \lambda a_{n_\nu - 1} + \mu a_{n_\nu - 2} + \dots + \varrho a_{n_{\nu-1}+1} \tag{10}$$

der Koeffizienten $a_{n_\nu}, a_{n_\nu-1}, a_{n_\nu-2}, \dots, a_{n_{\nu-1}+1}$ mit den ganzzahligen Faktoren $1, \lambda, \mu, \dots, \varrho$ bilden.

Es wurde vorausgesetzt, daß $f(x)$ im Punkte x_0 des Einheitskreises regulär ist. Sei $\operatorname{arc} x_0 = \varphi_0$. Sind $\varphi_1 < \varphi_0$, $\varphi_2 > \varphi_0$, $R > 1$, $\delta_0 > 0$ geeignet gewählt, so ist gemäß dieser Voraussetzung $f(x)$ regulär im Innern und auf der Kurve $\Gamma(\delta)$, bestehend aus den Kreisbögen

$$\begin{aligned} &|x| = R, && \varphi_1 \leqq \operatorname{arc} x \leqq \varphi_2, \\ &|x| = 1-\delta, && \varphi_2 \leqq \operatorname{arc} x \leqq \varphi_1 + 2\pi \end{aligned} \tag{11}$$

und aus den geradlinigen Strecken

$$\begin{aligned} &1-\delta \leqq |x| \leqq R, && \operatorname{arc} x = \varphi_1, \\ &1-\delta \leqq |x| \leqq R, && \operatorname{arc} x = \varphi_2, \end{aligned} \tag{12}$$

sobald

$$\delta > 0, \qquad \delta \leqq \delta_0$$

ist. Man hat alsdann

$$(13) \qquad k_{n_\nu} = a_{n_\nu} + \lambda\, a_{n_\nu - 1} + \mu\, a_{n_\nu - 2} + \cdots + \varrho\, a_{n_{\nu-1}+1}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma(\delta)} \frac{f(\xi)}{\xi^{n_{\nu-1}+2}} \left(\frac{1}{\xi^{n_\nu - n_{\nu-1} - 1}} + \frac{\lambda}{\xi^{n_\nu - n_{\nu-1} - 2}} + \frac{\mu}{\xi^{n_\nu - n_{\nu-1} - 3}} + \cdots + \varrho \right) d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma(\delta)} \frac{f(\xi)}{\xi^{n_{\nu-1}+2}}\, Q\left(\frac{1}{\xi}\right) d\xi,$$

wo $Q(x)$ ein Polynom $(n_\nu - n_{\nu-1} - 1)$-ten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten und mit dem höchsten Koeffizienten Eins bezeichnet. Ich will zeigen, daß bei geeigneter Wahl dieses Polynoms der Betrag von (10) (von einem gewissen ν an) kleiner als θ^{n_ν} ausfällt, wobei θ eine feste positive Zahl bezeichnet, die kleiner als 1 ist. In der Tat, ist $\delta_1 \leqq \delta_0$ passend gewählt, so geht die Kurve $\Gamma(\delta)$ für $\delta \leqq \delta_1$ durch die Transformation

$$\xi = \frac{1}{x}$$

in eine Kurve $C(\delta)$ über, deren Abbildungskonstante[12]) kleiner als 1 ist. Nun kann man aber zu jeder Kurve mit einer Abbildungskonstante kleiner als 1 Polynome von der Form (3) finden, deren Betrag auf der Kurve von einem gewissen Wert des Polynomgrades n an kleiner als ϑ^n ist, wobei $\vartheta < 1$, > 0 ist und nur von der Kurve abhängt[13]). Daher darf man den Hilfssatz V auf die Kurve $C(\delta_1)$ anwenden. Danach gibt es Polyome $g_n(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten und mit dem höchsten Gliede x^n, für welche auf $C(\delta_1)$ und somit für $\delta < \delta_1$ a fortiori auf $C(\delta)$ (von einem gewissen n an)

$$(14) \qquad |g_n(x)| < \vartheta_1^n$$

ist, wobei ϑ_1 eine feste (von δ unabhängige) positive Zahl kleiner als 1 bezeichnet. Ich behaupte nun:

$$(15) \qquad Q(x) = g_{n_\nu - n_{\nu-1} - 1}(x)$$

---

[12]) Die Abbildungskonstante einer Kurve C ist gleich dem Halbmesser desjenigen Kreises mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt, auf dessen Äußeres das Äußere der Kurve C konform und schlicht derart abgebildet wird, daß die Vergrößerung im unendlich fernen Punkte gleich 1 ist.

[13]) Vgl. G. Faber: a) Über Tschebyscheffsche Polynome, Journal für die reine u. angew. Math. **150** (1919), S. 79—106; b) Potentialtheorie und konforme Abbildung, Sitzungsber. der math.-phys. Klasse der bay. Akad. d. Wiss. 1920, S. 49—64, insbes. § 3. Vgl. auch a. a. O. [4]) und [6]).

leistet das Gewünschte. Man hat nämlich für $\delta < \delta_1$ nach (11), (12), (13), (14) und (15)

$$|k_{n_\nu}| \leqq \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma(\delta)} \frac{|f(\xi)|}{(1-\delta)^{n_{\nu-1}+2}} \vartheta_1^{n_\nu - n_{\nu-1} - 1} |d\xi| < c_1 \frac{\vartheta_1^{n_\nu - n_{\nu-1}}}{(1-\delta)^{n_\nu}} M(\delta),$$

wo c_1 eine von ν unabhängige Konstante und $M(\delta)$ das Maximum von $|f(x)|$ auf $\Gamma(\delta)$ bezeichnet. Daraus folgt

$$\limsup_{\nu \to \infty} \left| \sqrt[n_\nu]{k_{n_\nu}} \right| \leqq \frac{\vartheta_1^{1-\frac{1}{y}}}{1-\delta},$$

wobei

$$y = \liminf_{\nu \to \infty} \frac{n_\nu}{n_{\nu-1}}$$

ist. Doch ist nach Voraussetzung des Satzes IV,

$$y > 1,$$

folglich

$$1 - \frac{1}{y} = L > 0,$$

also besteht bei $\theta = \vartheta_1^L$ und für jedes $\delta \leqq \delta_1$

$$\limsup_{\nu \to \infty} \left| \sqrt[n_\nu]{k_{n_\nu}} \right| \leqq \frac{\theta}{1-\delta},$$

somit auch

$$\limsup_{\nu \to \infty} \left| \sqrt[n_\nu]{k_{n_\nu}} \right| \leqq \theta, \tag{16}$$

wie behauptet wurde.

Aus der mit (16) äquivalenten Ungleichung

$$|k_{n_\nu}| \leqq \theta^{n_\nu}, \qquad (0 < \theta < 1)$$

mit Hinsicht auf die Definition der Kompositionen (10) folgt, daß k_{n_ν} bei genügend großem ν den Bruchteil[14]) von a_{n_ν} ergibt. Setzt man also

$$\begin{aligned} \gamma_n &= a_n, \quad \text{wenn} \quad n \neq n_\nu \\ \gamma_n &= [a_n], \quad \text{wenn} \quad n = n_\nu \\ \alpha_{n_\nu} &= (a_{n_\nu}), \end{aligned}$$

so erhält man die Koeffizienten der Zerlegung (9). Damit ist der Beweis von IV in allen Stücken dargetan.

---

[14]) Der Bruchteil (z) von z ist gleich der Differenz

$$z - [z],$$

wobei $[z]$ diejenige ganze Zahl $a + ib$ bedeutet, welche zu z am nächsten liegt (gibt es solcher mehrere, so ist unter ihnen diejenige zu wählen, deren beide Koordinaten a, b möglichst groß ausfallen).

(Eingegangen am 24. 11. 1925.)