

Ein Satz über die absolute Konvergenz von Fourierreihen, in denen sehr viele Glieder fehlen.

Von

S. Sidon in Budapest.

In der vorliegenden Note beweise ich zunächst den

Satz I. *Es sei $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \dots$ eine unendliche Folge positiver ganzer Zahlen, bei welcher die Bedingung*

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k < \frac{\lambda_n}{2}$$

für jedes n erfüllt ist¹⁾. Ist dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n x + b_n \sin \lambda_n x)$$

die Fourierreihe²⁾ einer beschränkten Funktion $f(x)$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ konvergent.

Beweis. Es ist für ein beliebiges x , wenn

$$\operatorname{sgn}(a_k \cos \lambda_k x + b_k \sin \lambda_k x) = \varepsilon_k$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \pi \sum_{k=1}^n |a_k \cos \lambda_k x + b_k \sin \lambda_k x| &= \pi \sum_{k=1}^n \varepsilon_k (a_k \cos \lambda_k x + b_k \sin \lambda_k x) \\ &= \int_0^{2\pi} f(t) \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \cos \lambda_k (t-x) dt = \int_0^{2\pi} f(t) P_n(t-x) dt, \end{aligned}$$

wo $P_n(z) = \prod_{k=1}^n (1 + \varepsilon_k \cos \lambda_k z)$ ein nichtnegatives trigonometrisches Polynom

¹⁾ Dies ist z. B. der Fall, wenn für jedes n $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq 3$ ist.

²⁾ Unter Fourierreihe ist hier immer die Fourierreihe einer im Lebesgueschen Sinne integrierbaren Funktion zu verstehen.

bedeutet, dessen Absolutglied = 1 ist, und das wegen (1) offenbar sämtliche $\varepsilon_k \cos \lambda_k z$ ($k \leq n$) als Glieder enthält³⁾. Daraus folgt aber

$$\sum_{k=1}^n |a_k \cos \lambda_k x + b_k \sin \lambda_k x| < 2 \text{Max} |f(x)|$$

für jedes x und n , womit I. bewiesen ist.

Ein unmittelbares Korollar des soeben bewiesenen Satzes ist, daß die Beschränktheit der Funktion $f(x)$ schon ihre Stetigkeit zur Folge hat.

I. ist verschiedener Verallgemeinerungen fähig. Z. B. läßt sich auch für $\lambda_n = 2^n$ die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ beweisen.

Ich erwähne hier noch das folgende Analogon des Satzes I, das sich auch auf ganz ähnliche Weise beweisen läßt.

Satz II. *Gilt (1) und ist die trigonometrische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n x + b_n \sin \lambda_n x)$$

die Fourierreihe einer Funktion von beschränkter Schwankung, so läßt sich dies auch von sämtlichen Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k (a_k \cos \lambda_k x + b_k \sin \lambda_k x)$ behaupten, wo die ε_k voneinander unabhängig die Werte 1 oder -1 annehmen können.

Die letzten Reihen stellen sogar Integralfunktionen dar, woraus dann weiter folgt:

Gilt (1) und ist die trigonometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n x + b_n \sin \lambda_n x)$$

eine Fourierreihe, so sind es auch alle

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k (a_k \cos \lambda_k x + b_k \sin \lambda_k x).$$

³⁾ Dieses Produkt — ohne die ε_k — wurde zum ersten Male von Herrn F. Riesz in seiner Arbeit: Über die Fourier-Koeffizienten stetiger Funktionen von beschränkter Schwankung, Math. Zeitschr. 2 (1918), S. 312—315, angewendet.

(Eingegangen am 14. 7. 1926.)

Nachtrag bei der Korrektur.

Wie ich nach Abfassung dieser Note bemerkte, bedient sich auch Herr Bohr beim Beweise der absoluten Konvergenz der Fourierreihe einer fastperiodischen Funktion im Falle linear-unabhängiger Exponenten des Produktes $P_n(z)$ (auch ohne die ε_k) (vgl. Bochner, Fastperiodische Funktionen, Math. Annalen 96 (1926), S. 119—147). Da aber hierbei auch der Kroneckersche Satz über diophantische Approximationen zur Anwendung kommt, ergibt diese Beweismethode nicht auch unseren obigen Satz I.

15. 8. 1926.