

## Sur une nouvelle fonction entière et son application à la théorie des nombres.

Von

S. Wigert in Stockholm.

### Introduction.

Dans une note récente<sup>1)</sup> j'ai étudié la fonction  $L_k(z)$ , définie pour  $R(z) > 0$  par la série

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\mu^k z} - 1},$$

$k$  étant un entier positif  $> 1$ . En supposant le nombre  $k$  pair,  $L_k(z)$  admet la formule de transformation

$$(A) \quad \left\{ \begin{aligned} L_k(z) &= \frac{\zeta(k)}{z} + \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) \zeta\left(\frac{1}{k}\right)}{z^{\frac{1}{k}}} + \frac{1}{4} \\ &+ (-1)^{\frac{k}{2}-1} \frac{(2\pi)^{\frac{1}{k}}}{k z^{\frac{1}{k}}} \sum_{\nu=0}^{\frac{k}{2}-1} \left\{ e^{\frac{(2\nu+1)(k-1)\pi i}{2k}} \bar{L}_k\left(\frac{(2\pi)^{1+\frac{1}{k}} e^{-\frac{(2\nu+1)\pi i}{2k}}}{z^{\frac{1}{k}}}\right) \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{(2\nu+1)(k-1)\pi i}{2k}} \bar{L}_k\left(\frac{(2\pi)^{1+\frac{1}{k}} e^{\frac{(2\nu+1)\pi i}{2k}}}{z^{\frac{1}{k}}}\right) \right\}, \end{aligned} \right.$$

où nous avons posé

$$\bar{L}_k(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{1-\frac{1}{k}}} \frac{1}{e^{\nu^k z} - 1}.$$

Si  $k$  est impair, on aura seulement une formule asymptotique de transformation, comme je l'ai montré dans la note citée.

<sup>1)</sup> Sur une extension de la série de Lambert, Arkiv för Matematik etc. 19 A, Nr. 8, 1925.

Dans le présent travail j'ai cherché à tirer parti de la formule (A) pour le calcul de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xz} L_k(z) dz}{z^{p+1}}.$$

J'ai obtenu ainsi une représentation analytique de la fonction<sup>2)</sup>

$$\frac{1}{\lfloor p \rfloor} \sum_{n \leq x} d^{(k)}(n) (x-n)^p,$$

analogue à un développement traité par moi à une autre occasion<sup>3)</sup>. Or, on ne rencontre plus les fonctions de Bessel, dont la théorie générale était si utile. On aura ici affaire à la fonction entière

$$g_{k,\alpha}(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu z^\mu}{\lfloor \mu \rfloor \Gamma\left(\frac{\mu}{k} + \alpha + 1\right)},$$

le paramètre  $\alpha$  ayant la valeur spéciale  $p + \frac{1}{k}$ . La première partie de cette note est consacrée à l'étude de la fonction  $g_{k,\alpha}(z)$ . Il s'agit surtout d'un examen de  $|g_{k,\alpha}(z)|$  dans le cas où la variable  $z$  appartient à la région angulaire

$$-\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

Je me hâte de signaler une lacune dans mon analyse de  $g_{k,\alpha}(z)$ . C'est qu'il manque une méthode praticable pour le calcul de la fonction, le module de  $z$  étant très grand.

Dans la seconde partie je m'occupe de la démonstration de l'égalité fondamentale<sup>4)</sup>

$$(B) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\lfloor p \rfloor} \sum_{n \leq x} d^{(k)}(n) (x-n)^p &= \zeta(k) \frac{x^{p+1}}{\lfloor p+1 \rfloor} + \zeta\left(\frac{1}{k}\right) \frac{x^{p+\frac{1}{k}}}{\left(1+\frac{1}{k}\right) \dots \left(p+\frac{1}{k}\right)} + \frac{1}{4} \frac{x^p}{\lfloor p \rfloor} \\ &+ 2R \left\{ (-1)^{\frac{k}{2}-1} \frac{(2\pi)^{\frac{1}{k}}}{k} x^{p+\frac{1}{k}} \sum_{\nu=0}^{\frac{k}{2}-1} e^{\frac{(2\nu+1)(k-1)\pi i}{2k}} \right. \\ &\left. \sum_{n=1}^{\infty} S^{(k)}(n) g_{k,p+\frac{1}{k}} \left( (2\pi)^{1+\frac{1}{k}} e^{-\frac{(2\nu+1)\pi i}{2k}} \sqrt[n]{nx} \right) \right\}, \end{aligned} \right.$$

<sup>2)</sup>  $d^{(k)}(n)$  = le nombre des diviseurs de  $n$  qui sont des puissances  $k$  ièmes.

<sup>3)</sup> Sur quelques fonctions arithmétiques, Acta Math. 37, p. 132.

<sup>4)</sup>  $S^{(k)}(n) = \sum'_{\nu|n} \frac{1}{\nu^{1-\frac{1}{k}}}$ , où l'accent affectant la somme signifie que  $\nu$  parcourt

seulement les diviseurs de  $n$  complémentaires à ceux qui sont des puissances  $k$  ièmes.

où il faut supposer, cependant,  $p > 1$ . Je n'ai pu décider, si la série converge ou non pour  $p = 1$ . Mais pour  $p > 1$  la convergence est absolue et la partie du second membre succédant au terme  $\frac{1}{4} \frac{x^p}{\underline{p}}$  est  $O\left(x^{p-\frac{p-1}{k+1}}\right)$ . Ce résultat est un peu plus précis que celui qu'on obtient immédiatement de la formule

$$\frac{1}{\underline{p}} \sum_{n \leq x} d^{(k)}(n) (x-n)^p = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^{s+p} \zeta(s) \zeta(ks) ds}{s(s+1)\dots(s+p)},$$

à savoir  $O\left(x^{p-\frac{p-1}{k+1}+\varepsilon}\right)$ .

Ajoutons seulement que le résultat trivial

$$\sum_{n \leq x} d^{(k)}(n) (x-n) = \zeta(k) \frac{x^2}{2} + O\left(x^{1+\frac{1}{k}}\right)$$

peut être précisé un peu, *pourvu que k ne dépasse pas 4*. En partant de l'équation

$$\frac{1}{2} \sum_{n \leq x} d^{(k)}(n) (x-n)^2 = \zeta(k) \frac{x^3}{6} + \zeta\left(\frac{1}{k}\right) \frac{x^{2+\frac{1}{k}}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(2+\frac{1}{k}\right)} + \frac{x^2}{8} + O\left(x^{2-\frac{1}{k+1}}\right)$$

et en formant la première différence correspondant aux valeurs  $x + x^{\frac{2k+1}{3(k+1)}}$  et  $x$  on trouve en effet

$$\sum_{n \leq x} d^{(k)}(n) (x-n) = \zeta(k) \frac{x^2}{2} + \zeta\left(\frac{1}{k}\right) \frac{x^{1+\frac{1}{k}}}{1+\frac{1}{k}} + O\left(x^{1+\frac{k-1}{3(k+1)}+\varepsilon}\right).$$

### § 1.

Sur la fonction entière  $g_{k,\alpha}(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu z^\mu}{\underline{\mu} \Gamma\left(\frac{\mu}{k} + \alpha + 1\right)}$ .

1. Nous commencerons par déduire quelques relations importantes concernant la fonction  $g_{k,\alpha}(z)$ . On a d'abord

$$(1) \quad g'_{k,\alpha}(z) = -g_{k,\alpha+\frac{1}{k}}(z)$$

et aussi

$$z g'_{k,\alpha}(z) = k g_{k,\alpha-1}(z) - k \alpha g_{k,\alpha}(z),$$

d'où

$$(2) \quad \frac{d}{dz} z^\alpha g_{k,\alpha}\left(z^{\frac{1}{k}}\right) = z^{\alpha-1} g_{k,\alpha-1}\left(z^{\frac{1}{k}}\right),$$

relation qui nous sera utile plus tard. On trouve de même

$$g_{k,\alpha}^{(k)}(z) = (-1)^k g_{k,\alpha+1}(z),$$

et

$$(-1)^k \frac{d}{dz} \left\{ z^{\alpha+1} g_{k,\alpha}^{(k)} \left( z^{\frac{1}{k}} \right) \right\} = z^\alpha g_{k,\alpha} \left( z^{\frac{1}{k}} \right),$$

ce qui fait voir que la fonction  $y = g_{k,\alpha}(z)$  satisfait à l'équation différentielle linéaire et homogène d'ordre  $k+1$

$$(3) \quad z \frac{d^{k+1}y}{dz^{k+1}} + k(\alpha+1) \frac{d^k y}{dz^k} + (-1)^{k+1} k y = 0.$$

Disons aussi un mot sur le cas où le paramètre  $\alpha$  est  $\leq 0$ . Soit  $\lambda$  l'entier positif défini par les inégalités

$$-\frac{\lambda+1}{k} < \alpha \leq -\frac{\lambda}{k},$$

c'est-à-dire  $\lambda = [-k\alpha]$ , en employant une notation bien connue. On démontre alors la formule

$$(4) \quad g_{k,\alpha}(z) = \frac{(-1)^{\lambda+1} z^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda)} \int_0^1 (1-\theta)^\lambda g_{k,\alpha+\frac{\lambda+1}{k}}(z\theta) d\theta + \sum_{\mu=0}^{\lambda} \frac{(-1)^\mu z^\mu}{\Gamma(\frac{\mu}{k} + \alpha + 1)},$$

d'où nous voyons que  $g_{k,\alpha}(z)$  peut s'exprimer à l'aide d'une fonction à paramètre positif. Dans ce qui suit nous supposons toujours  $\alpha > 0$ .

2. Nous allons maintenant étudier l'ordre de grandeur de  $|g_{k,\alpha}(z)|$  en nous servant de la représentation intégrale

$$(5) \quad g_{k,\alpha}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(s) ds}{z^s \Gamma(\alpha+1-\frac{s}{k})},$$

$(a > 0)$

En posant

$$s = \alpha + it, \quad z = \varrho e^{i\varphi},$$

on aura, comme il est bien connu

$$|\Gamma(s)| = O\left(|t|^{a-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\right), \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha+1-\frac{s}{k})} = O\left(|t|^{-\alpha-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{k}} e^{\frac{\pi}{2k}|t|}\right),$$

et par là, en supposant  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)$ ,

$$|g_{k,\alpha}(z)| < \frac{C(a)}{\varrho^a} \int_0^\infty t^a \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-a-1} e^{-\left\{\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)-|\varphi|\right\}t} dt.$$

On peut choisir  $a$  aussi grand que l'on veut; l'ordre de  $|g_{k,\alpha}(z)|$  pour  $\varrho \rightarrow \infty$  sera donc inférieur à toute puissance négative de  $\varrho$ . Si, au contraire,  $|\varphi| = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)$ , il faut supposer  $a < \frac{k\alpha}{k+1}$ . Nous allons re-

prendre plus loin l'étude de ce cas, mais à présent nous chercherons une limite supérieure plus précise de  $|g_{k,\alpha}(z)|$  en admettant l'hypothèse  $|\varphi| < \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$ . Soit donc

$$a = a' + n, \quad 0 \leq a' < 1, \quad s' = a' + it;$$

on aura

$$|s'| \leq a' + t < 1 + t, \quad |\Gamma(s' + n)| \\ = |(s' + 1) \dots (s' + n - 1) \Gamma(s' + 1)| < (t + 2) \dots (t + n) |\Gamma(s' + 1)|,$$

d'où

$$|\Gamma(s' + n)| < \begin{cases} \frac{1}{2} \overline{n+1} |\Gamma(s' + 1)|, & t \leq 1 \\ \frac{1}{2} \overline{n+1} t^{n-1} |\Gamma(s' + 1)|, & t > 1. \end{cases}$$

Or, nous avons

$$|\Gamma(s' + 1)| < \begin{cases} A, & t \leq 1 \\ A t^{a'+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}t}, & t > 1, \end{cases}$$

en désignant par  $A$  une constante absolue. On a donc finalement

$$|\Gamma(a + it)| < \begin{cases} A \Gamma(a + 2), & t \leq 1 \\ A \Gamma(a + 2) t^{a-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}t}, & t > 1. \end{cases}$$

La formule (5) peut aussi s'écrire

$$g_{k,\alpha}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-iz}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(s) \Gamma\left(\frac{s}{k} - \alpha\right) \sin \pi \left(\frac{s}{k} - \alpha\right) ds}{\pi z^s},$$

de sorte que nous aurons

$$|g_{k,\alpha}(z)| < \frac{1}{\pi^2 \varrho^a} \int_0^\infty |\Gamma(s) \Gamma\left(\frac{s}{k} - \alpha\right)| e^{\left(\frac{\pi}{k} + |\varphi|\right)t} dt.$$

La partie de cette intégrale correspondant à  $t \leq 1$  est

$$< \frac{A}{\varrho^a} \Gamma(a + 2) \Gamma\left(\frac{a}{k} - \alpha + 2\right);$$

quant à  $\int_1^\infty$ , elle sera

$$< \frac{A}{\varrho^a} \Gamma(a + 2) \Gamma\left(\frac{a}{k} - \alpha + 2\right) \int_0^\infty t^{a\left(1+\frac{1}{k}\right) - a - 1} e^{-\left\{\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right) - |\varphi|\right\}t} dt.$$

En désignant par  $\delta$  la différence  $\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{k}\right) - |\varphi|$  on trouve ainsi

$$\begin{aligned}
 |g_{k,\alpha}(z)| &< A \frac{\Gamma(a+2) \Gamma\left(\frac{a}{k} - \alpha + 2\right) \Gamma\left(a + \frac{a}{k} - \alpha\right)}{\rho^a \delta^{a\left(1+\frac{1}{k}\right) - \alpha}} \\
 &< A \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \frac{1}{\rho^a} \left(\frac{a+2}{e}\right)^{a+2} \left(\frac{a}{k} + 2\right)^{\frac{a}{k}+2} \left(\frac{a}{e}\right)^{a+\frac{a}{k}} \frac{1}{\delta^{a\left(1+\frac{1}{k}\right)}} \\
 &< A \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \frac{a^4}{\rho^a} \frac{a^a \left(\frac{a}{k}\right)^{\frac{a}{k}} \left(a + \frac{a}{k}\right)^{a+\frac{a}{k}}}{e^{2a\left(1+\frac{1}{k}\right)} \delta^{a\left(1+\frac{1}{k}\right)}} < B_{k,\alpha} a^4 \left[ \frac{a^{2\left(1+\frac{1}{k}\right)} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{1+\frac{1}{k}}}{e^{2\left(1+\frac{1}{k}\right)} k^{\frac{1}{k}} \delta^{1+\frac{1}{k}} \rho} \right]^a,
 \end{aligned}$$

ou bien

$$|g_{k,\alpha}(z)| < B_{k,\alpha} a^4 \left[ \frac{a^{2\left(1+\frac{1}{k}\right)}}{\beta_k \delta^{1+\frac{1}{k}} \rho} \right]^a,$$

en posant, pour abrégier

$$\beta_k = \frac{e^{2\left(1+\frac{1}{k}\right)} k^{\frac{1}{k}}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{1+\frac{1}{k}}}.$$

La fonction  $\left[ \frac{a^{2\left(1+\frac{1}{k}\right)}}{\beta_k \delta^{1+\frac{1}{k}} \rho} \right]^a$  atteint pour  $a = \frac{1}{e} \beta_k^{\frac{k}{2(k+1)}} \delta^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{k}{2(k+1)}}$  son *mini-*

*mum* =  $e^{-2\left(1+\frac{1}{k}\right)a} = e^{-2\sqrt{\left(1+\frac{1}{k}\right) \frac{1}{k^{k+1}} \delta^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{k}{2(k+1)}}}}$ . En observant que

$$\sqrt{\left(1+\frac{1}{k}\right) \frac{1}{k^{k+1}}} > 1 \quad \text{et que} \quad a^4 = O\left(\rho^{\frac{2k}{k+1}}\right),$$

on aura donc le résultat suivant

$$(6) \quad \begin{cases} |g_{k,\alpha}(z)| = O\left(e^{-2\sqrt{\delta} \rho^{\frac{k}{2(k+1)}}}\right) \\ \delta = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{k}\right) - |\varphi| > 0. \end{cases}$$

3. Considérons maintenant le cas où  $\delta = 0$ . De la formule (5) on tire  $|g_{k,\alpha}(z)| = O\left(\frac{1}{\rho^{\frac{k\alpha}{k+1} - \varepsilon}}\right)$ , mais nous verrons qu'on peut s'affranchir du terme  $\varepsilon$ . A cet effet nous allons représenter notre fonction entière par une autre intégrale, à savoir

$$(7) \quad g_{k,\alpha}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{\omega - \frac{z}{\omega^k}}}{\omega^{\alpha+1}} d\omega.$$

Posons ici

$$\omega = \frac{a}{\cos \theta} e^{i\theta}, \quad z = \rho e^{i\varphi},$$

il s'ensuit

$$|g_{k,\alpha}(z)| < \frac{e^a}{2\pi a^\alpha} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\rho}{a^{\frac{1}{k}}} (\cos \theta)^{\frac{1}{k}} \cos\left(\varphi - \frac{\theta}{k}\right)} \cos^{\alpha-1} \theta |d\theta|.$$

En supposant  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$  on aura  $\cos\left(\varphi - \frac{\theta}{k}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2k} \pm \frac{\theta}{k}\right)$  et

en tenant compte de l'inégalité  $\frac{\sin \frac{\psi}{k}}{\frac{\psi}{k}} > \frac{\sin \psi}{\psi}$ , valable pour  $0 < \psi < \pi$ ,

on voit bien que  $\cos\left(\varphi - \frac{\theta}{k}\right) > \frac{1}{k} \cos \theta$ . Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} |g_{k,\alpha}(z)| &< \frac{e^a}{\pi a^\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\rho}{k a^{\frac{1}{k}}} (\cos \theta)^{1+\frac{1}{k}}} \cos^{\alpha-1} \theta d\theta \\ &= \frac{k e^a}{\pi a^\alpha (k+1)} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\rho}{k a^{\frac{1}{k}}} t^{\frac{k\alpha}{k+1}}}}{\sqrt{1-t^{\frac{2k}{k+1}}}} dt. \end{aligned}$$

On en conclut

$$(8) \quad \begin{cases} |g_{k,\alpha}(z)| = O\left(\frac{1}{\rho^{\frac{k\alpha}{k+1}}}\right), \\ \varphi = \pm \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{k}\right). \end{cases}$$

## § 2.

Sur la fonction arithmétique  $\frac{1}{\underline{p}} \sum_{n \leq x} d^{(k)}(n) (x-n)^p$ .

Reprenons la formule de transformation (A) et appliquons-la au calcul de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xz} L_k(z) dz}{z^{p+1}},$$

où  $x$  est réel et  $> 1$ ,  $a > 0$  et  $p$  un entier positif choisi suffisamment grand. En substituant pour la fonction  $\bar{L}_k(z)$  son développement

$$\bar{L}_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} S^{(k)}(n) e^{-n^{\frac{1}{k}} z},$$

il faut montrer avant tout que

$$\lim_{q \rightarrow \infty} R_q = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xz}}{z^{p+1+\frac{1}{k}}} \left\{ \sum_{n=q+1}^{\infty} S^{(k)}(n) e^{-\frac{1}{z^{\frac{1}{k}}} n^{\frac{1}{k}} y} \right\} dz = 0,$$

en mettant, pour abrégier

$$y = (2\pi)^{1+\frac{1}{k}} e^{\frac{\pi i}{2k}(2\nu+1)}, \quad \nu = 0 \dots \frac{k}{2} - 1.$$

Considérons, d'une manière générale, la somme  $\sum_{n=q+1}^{\infty} S^{(k)}(n) \xi^{n^{\frac{1}{k}}}$ , où  $0 < \xi < 1$ .

Pour  $n > 1$  on a

$$\xi^{(n-1)^{\frac{1}{k}}} - \xi^{n^{\frac{1}{k}}} < (1 - \xi) \xi^{(n-1)^{\frac{1}{k}}},$$

et, en posant  $T_n = \sum_{\nu=1}^n S^{(k)}(\nu)$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=q+1}^{\infty} S^{(k)}(n) \xi^{n^{\frac{1}{k}}} &= -T_q \xi^{q^{\frac{1}{k}}} + \sum_{n=q+1}^{\infty} (\xi^{(n-1)^{\frac{1}{k}}} - \xi^{n^{\frac{1}{k}}}) T_{n-1} \\ &< (1 - \xi) \sum_{n=q}^{\infty} T_n \xi^{n^{\frac{1}{k}}}. \end{aligned}$$

Or, on trouve sans peine

$$T_n = n^{\frac{1}{k}} \log n + O\left(n^{\frac{1}{k}}\right) < n^{\beta}, \quad (n \geq q)$$

pourvu que  $\beta$  soit  $> \frac{1}{k}$ , et par là

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} S^{(k)}(n) \xi^{n^{\frac{1}{k}}} < (1 - \xi) \sum_{n=q}^{\infty} n^{\beta} \xi^{n^{\frac{1}{k}}}.$$

D'autre part<sup>5)</sup>

<sup>5)</sup> On a en effet pour  $t > 0$ ,  $1 > \lambda > 0$ :  $(1+t)^\lambda < 1 + \lambda t$ ,  $(1+t)^{1-\lambda} < 1 + (1-\lambda)t$ ,  
 $1+t > (1+t)^{1-\lambda} + \lambda t$ ,  $(1+t)^\lambda > 1 + \frac{\lambda t}{(1+t)^{1-\lambda}}$ .

$$(q+v)^{\frac{1}{k}} - q^{\frac{1}{k}} > q^{\frac{1}{k}} \frac{v}{kq} \frac{1}{\left(1+\frac{v}{q}\right)^{1-\frac{1}{k}}} = \frac{v^{\frac{1}{k}}}{k\left(1+\frac{q}{v}\right)^{1-\frac{1}{k}}} \geq \frac{v^{\frac{1}{k}}}{k(q+1)^{1-\frac{1}{k}}},$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=q+1}^{\infty} n^{\beta} \xi^{n^{\frac{1}{k}}} &= q^{\beta} \xi^{q^{\frac{1}{k}}} \sum_{v=1}^{\infty} \left(1+\frac{v}{q}\right)^{\beta} \xi^{\left(q+v\right)^{\frac{1}{k}} - q^{\frac{1}{k}}} \\ &< q^{\beta} \xi^{q^{\frac{1}{k}}} \sum_{v=1}^{\infty} \left(1+\frac{\beta v}{q}\right) \xi^{\frac{v^{\frac{1}{k}}}{k(q+1)^{1-\frac{1}{k}}}}. \end{aligned}$$

Nous avons de plus pour  $\lambda > 0$

$$\sum_{v=1}^{\infty} e^{-\lambda v^{\frac{1}{k}}} < \int_0^{\infty} e^{-\lambda t^{\frac{1}{k}}} dt = \frac{k}{\lambda^k}, \quad \text{Max} \left( t e^{-\lambda t^{\frac{1}{k}}} \right) = \left( \frac{k}{e\lambda} \right)^k,$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} v e^{-\lambda v^{\frac{1}{k}}} < \left( \frac{k}{e\lambda} \right)^k + \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t^{\frac{1}{k}}} dt = \left( \frac{k}{e\lambda} \right)^k + \frac{12k}{2\lambda^{\frac{2}{k}}}.$$

En posant  $\lambda = \frac{\log \frac{1}{\xi}}{k(q+1)^{1-\frac{1}{k}}}$  on obtient ainsi<sup>6)</sup>

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left(1+\frac{\beta v}{q}\right) \xi^{\frac{v^{\frac{1}{k}}}{k(q+1)^{1-\frac{1}{k}}}} < C_k \frac{q^{2k-3}}{\left(\log \frac{1}{\xi}\right)^{2k}}.$$

parce que  $2k-3 \geq k-1$  pour  $k \geq 2$ , et enfin  $\left(1-\xi < \log \frac{1}{\xi}\right)$

$$\sum_{n=q+2}^{\infty} S^{(k)}(n) \xi^{n^{\frac{1}{k}}} < \frac{C_k \xi^{q^{\frac{1}{k}}} q^{2k-3+\beta}}{\left(\log \frac{1}{\xi}\right)^{2k-1}}.$$

Ceci posé, nous pouvons écrire<sup>7)</sup>

<sup>6)</sup> Je suppose ici  $\log \frac{1}{\xi} < 1$ . Il n'y a pas là d'inconvénient, comme nous verrons tout de suite.

<sup>7)</sup> On voit que  $\xi = e^{-\frac{(2\pi)^{1+\frac{1}{k}}}{k a^{\frac{1}{k}} (\cos \theta)^{1+\frac{1}{k}}}} > \frac{1}{e}$ , pour peu qu'on prenne  $a > \frac{(2\pi)^{k+1}}{k^k}$ .

$$\begin{aligned}
 |R_{q+1}| &< \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{ax} (\cos \theta)^{p+1+\frac{1}{k}}}{a^{p+1+\frac{1}{k}}} \left\{ \sum_{n=q+2}^{\infty} S^{(k)}(n) e^{-\frac{(2\pi)^{1+\frac{1}{k}}}{ka^{\frac{1}{k}}} (\cos \theta)^{1+\frac{1}{k}} \frac{1}{n^k}} \right\} \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta} \\
 &< e^{ax} C(k, a) q^{2k+\beta-3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{(2\pi)^{1+\frac{1}{k}}}{ka^{\frac{1}{k}}} q^{\frac{1}{k}} (\cos \theta)^{1+\frac{1}{k}}} (\cos \theta)^{p+\frac{2}{k}-2k-2} d\theta \\
 &= O\left(q^{2k+\beta-3} \cdot q^{-\frac{1}{k} \frac{k}{k+1} \left(p+\frac{2}{k}-2k-1\right)}\right).
 \end{aligned}$$

En supposant  $\frac{1}{k} < \beta < \frac{k+2}{k(k+1)}$ , il suffit de prendre  $p \geq (k+1)(2k-1)$ , pour que l'exposant de  $\frac{1}{q}$  soit positif. Sous cette hypothèse on aura donc  $R_q \rightarrow 0$  pour  $q \rightarrow \infty$ , ce qui revient à dire que la formule (B), obtenue par intégration terme à terme, est exacte. Or, la série indéfinie figurant en (B) est absolument et uniformément convergente pour  $p \geq 2$ . En effet, la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^{(k)}(n)}{n^s}$  converge absolument pour  $R(s) > \frac{1}{k}$  et nous avons

$$g_{k, p+\frac{1}{k}} \left( (2\pi)^{1+\frac{1}{k}} e^{\frac{(2\pi)^{1+\frac{1}{k}} \pi i}{2k}} \sqrt[n]{nx} \right) = O\left(\frac{1}{n^{\frac{kp+1}{k(k+1)}}}\right);$$

il suffit donc que  $p$  soit  $> 1$ . En vertu de l'équation (2.) la différentiation ne produit dans la formule (B) autre changement que de remplacer  $p$  par  $p-1$ . L'égalité (B) reste donc valable pour  $p \geq 2$ .

Le cas où  $p=1$  semble difficile. On peut montrer qu'en remplaçant  $S^{(k)}(n)$  par sa valeur moyenne  $\frac{\log n}{n^{1-\frac{1}{k}}}$  on obtient une série absolument convergente, mais on ne parvient pas à une démonstration de convergence en employant la formule  $\sum_{\nu=1}^n S^{(k)}(\nu) = n^{\frac{1}{k}} \log n + O(n^{\frac{1}{k}})$  et la sommation partielle.

(Eingegangen am 9. 10. 1925.)