Sur une nouvelle fonction entière et son application à la théorie des nombres.

Von

S. Wigert in Stockholm.

Introduction.

Dans une note récente[1]) j'ai étudié la fonction $L_k(z)$, définie pour $R(z) > 0$ par la série

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\mu^k z} - 1},$$

k étant un entier positif > 1. En supposant *le nombre k pair*, $L_k(z)$ admet la formule de transformation

$$\text{(A)} \quad \left\{ \begin{aligned} L_k(z) &= \frac{\zeta(k)}{z} + \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)\zeta\left(\frac{1}{k}\right)}{z^{\frac{1}{k}}} + \frac{1}{4} \\ &+ (-1)^{\frac{k}{2}-1} \frac{(2\pi)^{\frac{1}{k}}}{k z^{\frac{1}{k}}} \sum_{\nu=0}^{\frac{k}{2}-1} \left\{ e^{\frac{(2\nu+1)(k-1)\pi i}{2k}} \bar{L}_k\left(\frac{(2\pi)^{1+\frac{1}{k}} e^{-\frac{(2\nu+1)\pi i}{2k}}}{z^{\frac{1}{k}}} \right) \right. \\ &\left. + e^{-\frac{(2\nu+1)(k-1)\pi i}{2k}} \bar{L}_k\left(\frac{(2\pi)^{1+\frac{1}{k}} e^{\frac{(2\nu+1)\pi i}{2k}}}{z^{\frac{1}{k}}} \right) \right\}, \end{aligned} \right.$$

où nous avons posé

$$\bar{L}_k(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{1-\frac{1}{k}}} \frac{1}{e^{\nu^{\frac{1}{k}} z} - 1}.$$

Si k est impair, on aura seulement une formule asymptotique de transformation, comme je l'ai montré dans la note citée.

[1]) Sur une extension de la série de Lambert, Arkiv för Matematik etc. **19 A**, Nr. 8, 1925.

Dans le présent travail j'ai cherché à tirer parti de la formule (A) pour le calcul de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{xz}\,L_k(z)\,dz}{z^{p+1}}.$$

J'ai obtenu ainsi une représentation analytique de la fonction[2])

$$\frac{1}{\lfloor p}\sum_{n\leqq x} d^{(k)}(n)\,(x-n)^p,$$

analogue à un développement traité par moi à une autre occasion[3]). Or, on ne rencontre plus les fonctions de Bessel, dont la théorie générale était si utile. On aura ici affaire à la fonction entière

$$g_{k,\alpha}(z)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\mu z^\mu}{\lfloor\mu\,\Gamma\left(\frac{\mu}{k}+\alpha+1\right)},$$

le paramètre α ayant la valeur spéciale $p+\frac{1}{k}$. La première partie de cette note est consacrée à l'étude de la fonction $g_{k,\alpha}(z)$. Il s'agit surtout d'un examen de $|g_{k,\alpha}(z)|$ dans le cas où la variable z appartient à la région angulaire

$$-\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)\leqq\arg z\leqq\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right).$$

Je me hâte de signaler une lacune dans mon analyse de $g_{k,\alpha}(z)$. C'est qu'il manque une méthode pratiquable pour le calcul de la fonction, le module de z étant très grand.

Dans la seconde partie je m'occupe de la démonstration de *l'égalité fondamentale*[4])

$$\text{(B)}\quad\left\{\begin{aligned}\frac{1}{\lfloor p}\sum_{n\leqq x} d^{(k)}(n)\,(x-n)^p &= \zeta(k)\frac{x^{p+1}}{\lfloor p+1}+\zeta\left(\frac{1}{k}\right)\frac{x^{p+\frac{1}{k}}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)\dots\left(p+\frac{1}{k}\right)}+\frac{1}{4}\,\frac{x^p}{\lfloor p}\\ &+2R\left\{(-1)^{\frac{k}{2}-1}\frac{(2\pi)^{\frac{1}{k}}}{k}x^{p+\frac{1}{k}}\sum_{\nu=0}^{\frac{k}{2}-1}e^{\frac{(2\nu+1)(k-1)\pi i}{2k}}\right.\\ &\left.\sum_{n=1}^{\infty}S^{(k)}(n)\,g_{k,p+\frac{1}{k}}\left((2\pi)^{1+\frac{1}{k}}e^{-\frac{(2\nu+1)\pi i}{2k}}\sqrt[k]{nx}\right)\right\},\end{aligned}\right.$$

[2]) $d^{(k)}(n)$ = le nombre des diviseurs de n qui sont des puissances $k^{\text{ièmes}}$.

[3]) Sur quelques fonctions arithmétiques, Acta Math. **37**, p. 132.

[4]) $S^{(k)}(n)=\sum_{\nu\mid n}{}'\frac{1}{\nu^{1-\frac{1}{k}}}$, où l'accent affectant la somme signifie que ν parcourt seulement les diviseurs de n complémentaires à ceux qui sont des puissances $k^{\text{ièmes}}$.

où *il faut supposer, cependant,* $p > 1$. Je n'ai pu décider, si la série converge ou non pour $p = 1$. Mais pour $p > 1$ la convergence est absolue et la partie du second membre succédant au terme $\frac{1}{4}\frac{x^p}{\underline{\lfloor p}}$ est $= O\left(x^{p-\frac{p-1}{k+1}}\right)$. Ce résultat est un peu plus précis que celui qu'on obtient immédiatement de la formule

$$\frac{1}{\underline{\lfloor p}}\sum_{n\leqq x} d^{(k)}(n)\,(x-n)^p = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^{s+p}\,\zeta(s)\,\zeta(ks)\,ds}{s(s+1)\ldots(s+p)},$$

à savoir $O\left(x^{p-\frac{p-1}{k+1}+\varepsilon}\right)$.

Ajoutons seulement que le résultat trivial

$$\sum_{n\leqq x} d^{(k)}(n)\,(x-n) = \zeta(k)\frac{x^2}{2} + O\left(x^{1+\frac{1}{k}}\right)$$

peut être précisé un peu, *pourvu que* k *ne dépasse pas* 4. En partant de l'équation

$$\frac{1}{2}\sum_{n\leqq x} d^{(k)}(n)(x-n)^2 = \zeta(k)\frac{x^3}{6} + \zeta\left(\frac{1}{k}\right)\frac{x^{2+\frac{1}{k}}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(2+\frac{1}{k}\right)} + \frac{x^2}{8} + O\left(x^{2-\frac{1}{k+1}}\right)$$

et en formant la première différence correspondant aux valeurs $x + x^{\frac{2k+1}{3(k+1)}}$ et x on trouve en effet

$$\sum_{n\leqq x} d^{(k)}(n)\,(x-n) = \zeta(k)\frac{x^2}{2} + \zeta\left(\frac{1}{k}\right)\frac{x^{1+\frac{1}{k}}}{1+\frac{1}{k}} + O\left(x^{1+\frac{k-1}{3(k+1)}+\varepsilon}\right).$$

§ 1.

Sur la fonction entière $g_{k,\alpha}(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu z^\mu}{\underline{\lfloor \mu}\,\Gamma\left(\frac{\mu}{k}+\alpha+1\right)}$.

1. Nous commencerons par déduire quelques relations importantes concernant la fonction $g_{k,\alpha}(z)$. On a d'abord

$$g'_{k,\alpha}(z) = -\,g_{k,\alpha+\frac{1}{k}}(z) \tag{1}$$

et aussi

$$z\,g'_{k,\alpha}(z) = k\,g_{k,\alpha-1}(z) - k\alpha\,g_{k,\alpha}(z),$$

d'où

$$\frac{d}{dz}\,z^\alpha g_{k,\alpha}\left(z^{\frac{1}{k}}\right) = z^{\alpha-1}\,g_{k,\alpha-1}\left(z^{\frac{1}{k}}\right), \tag{2}$$

relation qui nous sera utile plus tard. On trouve de même

$$g^{(k)}_{k,\alpha}(z) = (-1)^k\,g_{k,\alpha+1}(z),$$

et

$$(-1)^k \frac{d}{dz}\left\{z^{\alpha+1} g_{k,\alpha}^{(k)}\left(z^{\frac{1}{k}}\right)\right\} = z^{\alpha} g_{k,\alpha}\left(z^{\frac{1}{k}}\right),$$

ce qui fait voir que *la fonction* $y = g_{k,\alpha}(z)$ *satisfait à l'équation différentielle linéaire et homogène d'ordre* $k+1$

$$z\frac{d^{k+1}y}{dz^{k+1}} + k(\alpha+1)\frac{d^k y}{dz^k} + (-1)^{k+1} k y = 0. \tag{3}$$

Disons aussi un mot sur le cas où le paramètre α est $\leqq 0$. Soit λ l'entier positif défini par les inégalités

$$-\frac{\lambda+1}{k} < \alpha \leqq -\frac{\lambda}{k},$$

c'est-à-dire $\lambda = [-k\alpha]$, en employant une notation bien connue. On démontre alors la formule

$$g_{k,\alpha}(z) = \frac{(-1)^{\lambda+1} z^{\lambda+1}}{\underline{\lambda}} \int_0^1 (1-\theta)^{\lambda} g_{k,\alpha+\frac{\lambda+1}{k}}(z\theta)\, d\theta + \sum_{\mu=0}^{\lambda} \frac{(-1)^{\mu} z^{\mu}}{\underline{\mu}\, \Gamma\left(\frac{\mu}{k}+\alpha+1\right)}, \tag{4}$$

d'où nous voyons que $g_{k,\alpha}(z)$ peut s'exprimer à l'aide d'une fonction à paramètre positif. *Dans ce qui suit nous supposerons toujours* $\alpha > 0$.

2. Nous allons maintenant étudier l'ordre de grandeur de $|g_{k,\alpha}(z)|$ en nous servant de la représentation intégrale

$$g_{k,\alpha}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{a-i\infty \\ (a>0)}}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(s)\, ds}{z^s \Gamma\left(\alpha+1-\frac{s}{k}\right)}. \tag{5}$$

En posant

$$s = a + it, \qquad z = \varrho e^{i\varphi},$$

on aura, comme il est bien connu

$$|\Gamma(s)| = O\left(|t|^{a-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\right), \qquad \frac{1}{\left|\Gamma\left(\alpha+1-\frac{s}{k}\right)\right|} = O\left(|t|^{-\alpha-\frac{1}{2}+\frac{a}{k}} e^{\frac{\pi}{2k}|t|}\right),$$

et par là, en supposant $|\varphi| < \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)$,

$$|g_{k,\alpha}(z)| < \frac{C(a)}{\varrho^a} \int_0^{\infty} t^{a\left(1+\frac{1}{k}\right)-\alpha-1} e^{-\left\{\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)-|\varphi|\right\}t}\, dt.$$

On peut choisir a aussi grand que l'on veut; l'ordre de $|g_{k,\alpha}(z)|$ pour $\varrho \to \infty$ sera donc inférieur à toute puissance négative de ϱ. Si, au contraire, $|\varphi| = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)$, il faut supposer $a < \frac{k\alpha}{k+1}$. Nous allons re-

prendre plus loin l'étude de ce cas, mais à présent nous chercherons une limite supérieure plus précise de $|g_{k,\alpha}(z)|$ en admettant l'hypothèse $|\varphi| < \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)$. Soit donc

$$a = a' + n, \quad 0 \leqq a' < 1, \quad s' = a' + it;$$

on aura

$$|s'| \leqq a' + t < 1 + t, \quad |\Gamma(s'+n)|$$

$$= |(s'+1)|\ldots(s'+n-1)\Gamma(s'+1)| < (t+2)\ldots(t+n)|\Gamma(s'+1)|,$$

d'où

$$|\Gamma(s'+n)| < \begin{cases} \frac{1}{2}\underline{\lfloor n+1}\,|\Gamma(s'+1)|, & t \leqq 1 \\ \frac{1}{2}\underline{\lfloor n+1}\,t^{n-1}|\Gamma(s'+1)|, & t > 1. \end{cases}$$

Or, nous avons

$$|\Gamma(s'+1)| < \begin{cases} A, & t \leqq 1 \\ A\,t^{a'+\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}t}, & t > 1, \end{cases}$$

en désignant par A *une constante absolue.* On a donc finalement

$$|\Gamma(a+it)| < \begin{cases} A\,\Gamma(a+2), & t \leqq 1 \\ A\,\Gamma(a+2)\,t^{a-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}t}, & t > 1. \end{cases}$$

La formule (5) peut aussi s'écrire

$$g_{k,a}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(s)\,\Gamma\left(\frac{s}{k}-\alpha\right)\sin\pi\left(\frac{s}{k}-\alpha\right)ds}{\pi z^s},$$

de sorte que nous aurons

$$|g_{k,a}(z)| < \frac{1}{\pi^2 \varrho^a}\int_0^\infty \left|\Gamma(s)\,\Gamma\left(\frac{s}{k}-\alpha\right)\right| e^{\left(\frac{\pi}{k}+|\varphi|\right)t}\,dt.$$

La partie de cette intégrale correspondant à $t \leqq 1$ est

$$< \frac{A}{\varrho^a}\Gamma(a+2)\,\Gamma\left(\frac{a}{k}-\alpha+2\right);$$

quant à $\int_1^\infty$, elle sera

$$< \frac{A}{\varrho^a}\Gamma(a+2)\,\Gamma\left(\frac{a}{k}-\alpha+2\right)\int_0^\infty t^{a\left(1+\frac{1}{k}\right)-a-1}\,e^{-\left\{\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)-|\varphi|\right\}t}\,dt.$$

En désignant par δ *la différence* $\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)-|\varphi|$ on trouve ainsi

$$|g_{k,\alpha}(z)| < A\frac{\Gamma(a+2)\,\Gamma\left(\frac{a}{k}-\alpha+2\right)\Gamma\left(a+\frac{a}{k}-\alpha\right)}{\varrho^a\,\delta^{a\left(1+\frac{1}{k}\right)-\alpha}}$$

$$< A\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}\frac{1}{\varrho^a}\left(\frac{a+2}{e}\right)^{a+2}\left(\frac{\frac{a}{k}+2}{e}\right)^{\frac{a}{k}+2}\left(\frac{a+\frac{a}{k}}{e}\right)^{a+\frac{a}{k}}\frac{1}{\delta^{a\left(1+\frac{1}{k}\right)}}$$

$$< A\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}\frac{a^4}{\varrho^a}\frac{a^a\left(\frac{a}{k}\right)^{\frac{a}{k}}\left(a+\frac{a}{k}\right)^{a+\frac{a}{k}}}{e^{2a\left(1+\frac{1}{k}\right)}\,\delta^{a\left(1+\frac{1}{k}\right)}} < B_{k,\alpha}a^4\left[\frac{a^{2\left(1+\frac{1}{k}\right)}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{1+\frac{1}{k}}}{e^{2\left(1+\frac{1}{k}\right)}\,k^{\frac{1}{k}}\,\delta^{1+\frac{1}{k}}\,\varrho}\right]^a,$$

ou bien

$$|g_{k,\alpha}(z)| < B_{k,\alpha}a^4\left[\frac{a^{2\left(1+\frac{1}{k}\right)}}{\beta_k\,\delta^{1+\frac{1}{k}}\,\varrho}\right]^a,$$

en posant, pour abréger

$$\beta_k = \frac{e^{2\left(1+\frac{1}{k}\right)}\,k^{\frac{1}{k}}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{1+\frac{1}{k}}}.$$

La fonction $\left[\frac{a^{2\left(1+\frac{1}{k}\right)}}{\beta_k\,\delta^{1+\frac{1}{k}}\,\varrho}\right]^a$ atteint pour $a = \frac{1}{e}\beta_k^{\frac{k}{2(k+1)}}\delta^{\frac{1}{2}}\varrho^{\frac{k}{2(k+1)}}$ son *minimum* $= e^{-2\left(1+\frac{1}{k}\right)a} = e^{-2\sqrt{\left(1+\frac{1}{k}\right)k^{\frac{1}{k+1}}}\,\delta^{\frac{1}{2}}\varrho^{\frac{k}{2(k+1)}}}$. En observant que

$$\sqrt{\left(1+\frac{1}{k}\right)k^{\frac{1}{k+1}}} > 1 \quad \text{et que} \quad a^4 = O\left(\varrho^{\frac{2k}{k+1}}\right),$$

on aura donc *le résultat suivant*

$$(6)\qquad \begin{cases} |g_{k,\alpha}(z)| = O\left(e^{-2\sqrt{\delta}\,\varrho^{\frac{k}{2(k+1)}}}\right) \\ \delta = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right) - |\varphi| > 0. \end{cases}$$

3. Considérons maintenant le cas où $\delta = 0$. De la formule (5) on tire $|g_{k,\alpha}(z)| = O\left(\frac{1}{\varrho^{\frac{k\alpha}{k+1}-\varepsilon}}\right)$, mais nous verrons qu'on peut s'affranchir du terme ε. A cet effet nous allons représenter notre fonction entière par une autre intégrale, à savoir

$$(7) \qquad g_{k,\alpha}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{a-i\infty \\ (a>0)}}^{a+i\infty} \frac{e^{\omega - \frac{z}{\omega^{\frac{1}{k}}}}}{\omega^{\alpha+1}}\, d\omega .$$

Posons ici

$$\omega = \frac{a}{\cos\theta} e^{i\theta}, \qquad z = \varrho\, e^{i\varphi},$$

il s'ensuit

$$|g_{k,\alpha}(z)| < \frac{e^a}{2\pi a^\alpha} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\varrho}{a^{\frac{1}{k}}} (\cos\theta)^{\frac{1}{k}} \cos\left(\varphi - \frac{\theta}{k}\right)} \cos^{\alpha-1}\theta\, |d\theta| .$$

En supposant $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right)$ on aura $\cos\left(\varphi - \frac{\theta}{k}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2k} \pm \frac{\theta}{k}\right)$ et en tenant compte de l'inégalité $\frac{\sin\frac{\psi}{k}}{\frac{\psi}{k}} > \frac{\sin\psi}{\psi}$, valable pour $0 < \psi < \pi$, on voit bien que $\cos\left(\varphi - \frac{\theta}{k}\right) > \frac{1}{k}\cos\theta$. Nous avons ainsi

$$|g_{k,\alpha}(z)| < \frac{e^a}{\pi a^\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\varrho}{k a^{\frac{1}{k}}} (\cos\theta)^{1+\frac{1}{k}}} \cos^{\alpha-1}\theta\, d\theta$$

$$= \frac{k e^a}{\pi a^\alpha (k+1)} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\varrho}{k a^{\frac{1}{k}}} t} \cdot t^{\frac{k\alpha}{k+1}-1}\, dt}{\sqrt{1 - t^{\frac{2k}{k+1}}}} .$$

On en conclut

$$(8) \qquad \begin{cases} |g_{k,\alpha}(z)| = O\left(\dfrac{1}{\varrho^{\frac{k\alpha}{k+1}}}\right), \\ \varphi = \pm \dfrac{\pi}{2}\left(1 - \dfrac{1}{k}\right). \end{cases}$$

§ 2.

Sur la fonction arithmétique $\frac{1}{\Gamma(p)} \sum_{n \leqq x} d^{(k)}(n)\,(x-n)^p$.

Reprenons la formule de transformation (A) et appliquons-la au calcul de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xz}\, L_k(z)\, dz}{z^{p+1}},$$

où x est réel et >1, $a>0$ et p un entier positif choisi suffisamment grand. En substituant pour la fonction $\overline{L}_k(z)$ son développement

$$\overline{L}_k(z)=\sum_{n=1}^{\infty} S^{(k)}(n)\,e^{-n^{\frac{1}{k}}z},$$

il faut montrer avant tout que

$$\lim_{q=\infty} R_q=\lim_{q=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{xz}}{z^{p+1+\frac{1}{k}}}\left\{\sum_{n=q+1}^{\infty} S^{(k)}(n)\,e^{-\frac{n^{\frac{1}{k}}y}{z^{\frac{1}{k}}}}\right\}dz=0,$$

en mettant, pour abréger

$$y=(2\pi)^{1+\frac{1}{k}}\,e^{\pm\frac{\pi i}{2k}(2\nu+1)}, \qquad \nu=0\ldots\frac{k}{2}-1.$$

Considérons, d'une manière générale, la somme $\sum_{n=q+1}^{\infty} S^{(k)}(n)\,\xi^{n^{\frac{1}{k}}}$, où $0<\xi<1$. Pour $n>1$ on a

$$\xi^{(n-1)^{\frac{1}{k}}}-\xi^{n^{\frac{1}{k}}}<(1-\xi)\,\xi^{(n-1)^{\frac{1}{k}}},$$

et, en posant $T_n=\sum_{\nu=1}^{n} S^{(k)}(\nu)$,

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} S^{(k)}(n)\,\xi^{n^{\frac{1}{k}}}=-T_q\,\xi^{q^{\frac{1}{k}}}+\sum_{n=q+1}^{\infty}\left(\xi^{(n-1)^{\frac{1}{k}}}-\xi^{n^{\frac{1}{k}}}\right)T_{n-1}$$

$$<(1-\xi)\sum_{n=q}^{\infty} T_n\,\xi^{n^{\frac{1}{k}}}.$$

Or, on trouve sans peine

$$T_n=n^{\frac{1}{k}}\log n+O\left(n^{\frac{1}{k}}\right)<n^{\beta}, \qquad (n\geqq q)$$

pourvu que β soit $>\frac{1}{k}$, et par là

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} S^{(k)}(n)\,\xi^{n^{\frac{1}{k}}}<(1-\xi)\sum_{n=q}^{\infty} n^{\beta}\,\xi^{n^{\frac{1}{k}}}.$$

D'autre part[5])

---

[5]) On a en effet pour $t>0$, $1>\lambda>0$: $(1+t)^{\lambda}<1+\lambda t$, $(1+t)^{1-\lambda}<1+(1-\lambda)t$, $1+t>(1+t)^{1-\lambda}+\lambda t$, $(1+t)^{\lambda}>1+\frac{\lambda t}{(1+t)^{1-\lambda}}$.

$$(q+\nu)^{\frac{1}{k}} - q^{\frac{1}{k}} > q^{\frac{1}{k}} \frac{\nu}{kq} \frac{1}{\left(1+\frac{\nu}{q}\right)^{1-\frac{1}{k}}} = \frac{\nu^{\frac{1}{k}}}{k\left(1+\frac{q}{\nu}\right)^{1-\frac{1}{k}}} \geqq \frac{\nu^{\frac{1}{k}}}{k(q+1)^{1-\frac{1}{k}}},$$

donc

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} n^{\beta}\, \xi^{n^{\frac{1}{k}}} = q^{\beta}\, \xi^{q^{\frac{1}{k}}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(1+\frac{\nu}{q}\right)^{\beta} \xi^{(q+\nu)^{\frac{1}{k}} - q^{\frac{1}{k}}}$$

$$< q^{\beta}\, \xi^{q^{\frac{1}{k}}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(1+\frac{\beta\,\nu}{q}\right) \xi^{\frac{\nu^{\frac{1}{k}}}{k(q+1)^{1-\frac{1}{k}}}}.$$

Nous avons de plus pour $\lambda > 0$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\lambda \nu^{\frac{1}{k}}} < \int_0^{\infty} e^{-\lambda t^{\frac{1}{k}}}\, dt = \frac{\lfloor k}{\lambda^k}, \qquad \operatorname{Max}\left(t e^{-\lambda t^{\frac{1}{k}}}\right) = \left(\frac{k}{e\lambda}\right)^k,$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, e^{-\lambda \nu^{\frac{1}{k}}} < \left(\frac{k}{e\lambda}\right)^k + \int_0^{\infty} t\, e^{-\lambda t^{\frac{1}{k}}}\, dt = \left(\frac{k}{e\lambda}\right)^k + \frac{\lfloor 2k}{2\lambda^{2k}}.$$

En posant $\lambda = \dfrac{\log \frac{1}{\xi}}{k(q+1)^{1-\frac{1}{k}}}$ on obtient ainsi[6])

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(1+\frac{\beta\,\nu}{q}\right) \xi^{\frac{\nu^{\frac{1}{k}}}{k(q+1)^{1-\frac{1}{k}}}} < C_k \frac{q^{2k-3}}{\left(\log \frac{1}{\xi}\right)^{2k}}.$$

parce que $2k-3 \geqq k-1$ pour $k \geqq 2$, et enfin $\left(1-\xi < \log \frac{1}{\xi}\right)$

$$\sum_{n=q+2}^{\infty} S^{(k)}(n)\, \xi^{n^{\frac{1}{k}}} < \frac{C_k\, \xi^{q^{\frac{1}{k}}}\, q^{2k-3+\beta}}{\left(\log \frac{1}{\xi}\right)^{2k-1}}.$$

Ceci posé, nous pouvons écrire[7])

---

[6]) Je suppose ici $\log \frac{1}{\xi} < 1$. Il n'y a pas là d'inconvénient, comme nous verrons tout de suite.

[7]) On voit que $\xi = e^{-\frac{(2\pi)^{1+\frac{1}{k}} (\cos\theta)^{1+\frac{1}{k}}}{k\, a^{\frac{1}{k}}}} > \frac{1}{e}$, pour peu qu'on prenne $a > \frac{(2\pi)^{k+1}}{k^k}$.

$$|R_{q+1}| < \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{ax}(\cos\theta)^{p+1+\frac{1}{k}}}{a^{p+1+\frac{1}{k}}} \left\{ \sum_{n=q+2}^{\infty}{}' S^{(k)}(n)\, e^{-\frac{(2\pi)^{1+\frac{1}{k}}}{k a^{\frac{1}{k}}}(\cos\theta)^{1+\frac{1}{k}} n^{\frac{1}{k}}} \right\} \frac{a\,d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$< e^{ax} C(k,a)\, q^{2k+\beta-3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{(2\pi)^{1+\frac{1}{k}}}{k a^{\frac{1}{k}}} q^{\frac{1}{k}} (\cos\theta)^{1+\frac{1}{k}}} (\cos\theta)^{p+\frac{2}{k}-2k-2}\, d\theta$$

$$= O\left(q^{2k+\beta-3} \cdot q^{-\frac{1}{k}\frac{k}{k+1}\left(p+\frac{2}{k}-2k-1\right)}\right).$$

En supposant $\frac{1}{k} < \beta < \frac{k+2}{k(k+1)}$, il suffit de prendre $p \geqq (k+1)(2k-1)$, pour que l'exposant de $\frac{1}{q}$ soit positif. Sous cette hypothèse on aura donc $R_q \to 0$ pour $q \to \infty$, ce qui revient à dire que la formule (B), obtenue par intégration terme à terme, est exacte. Or, la série indéfinie figurant en (B) est absolument et uniformément convergente pour $p \geqq 2$. En effet, la série $\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{S^{(k)}(n)}{n^s}$ converge absolument pour $R(s) > \frac{1}{k}$ et nous avons

$$g_{k,\,p+\frac{1}{k}}\left((2\pi)^{1+\frac{1}{k}} e^{\pm\frac{(2\nu+1)\pi i}{2k}} \sqrt[k]{n\,x}\right) = O\left(\frac{1}{n^{\frac{kp+1}{k(k+1)}}}\right);$$

il suffit donc que p soit > 1. En vertu de l'équation (2.) la différentiation ne produit dans la formule (B) autre changement que de remplacer p par $p-1$. *L'égalité* (B) *reste donc valable pour* $p \geqq 2$.

Le cas où $p = 1$ semble difficile. On peut montrer qu'en remplaçant $S^{(k)}(n)$ par sa valeur moyenne $\frac{\log n}{n^{1-\frac{1}{k}}}$ on obtient une série absolument convergente, mais on ne parvient pas à une démonstration de convergence en employant la formule $\sum_{\nu=1}^{n}{}' S^{(k)}(\nu) = n^{\frac{1}{k}} \log n + O(n^{\frac{1}{k}})$ et la sommation partielle.

(Eingegangen am 9. 10. 1925.)