Über die Entwicklung einer analytischen Funktion nach Polynomen.

Von

J. L. Walsh [1]) in München.

Viele Resultate über die Entwicklung einer analytischen Funktion nach Polynomen sind wohlbekannt [2]), darunter das Theorem von Runge:

Es sei die Funktion $f(z)$ eine analytische Funktion von z in einem einfach zusammenhängenden Bereiche R der z-Ebene. Dann läßt sich $f(z)$ in eine Reihe nach Polynomen von z entwickeln, welche in jedem ganz innerhalb R gelegenen abgeschlossenen Bereiche gleichmäßig konvergiert.

Der Zweck dieses Artikels ist, ein Resultat anzugeben, das in bezug auf bestimmte Funktionen noch allgemeiner ist, als das Theorem von Runge, und das außerdem erlaubt, das Theorem von Runge sehr leicht zu beweisen:

Satz. *Es sei $f(z)$ eine analytische Funktion von z im Inneren einer Jordanschen Kurve C, und es sei $f(z)$ stetig im abgeschlossenen Bereiche, welcher aus der Kurve C und ihrem Inneren besteht. Dann läßt sich $f(z)$ im ganzen abgeschlossenen Bereiche in eine Reihe nach Polynomen von z entwickeln; diese Reihe konvergiert gleichmäßig in demselben abgeschlossenen Bereiche.*

Dieser Satz kann, wenn die Kurve analytisch ist, leicht durch den Gebrauch konformer Abbildung bewiesen werden [3]). Auch im allgemeineren Falle werden die gewünschten Resultate durch einen Courantschen Satz [4])

---

[1]) Fellow, International Education Board.

[2]) Siehe z. B. Montel, „Leçons sur les Séries à une Variable Complexe“ (Paris 1910), wo die Literatur zitiert ist.

[3]) Walsh, „On the Expansion of Analytic Functions in terms of Polynomials“, Trans. Amer. Math. Soc. **26** (1924), S. 155—170, Theorem III.

[4]) „Über eine Eigenschaft der Abbildungsfunktionen bei konformer Abbildung“, Göttinger Nachrichten, Math.-phys. Klasse, 1914, S. 101—109; 1922, S. 69—70.

über konforme Abbildung erreicht. Prof. Carathéodory hat mich angeregt, die Möglichkeit einer Anwendung dieses Courantschen Satzes auf das vorliegende Problem nachzuprüfen.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß der Punkt $z = 0$ im Inneren von C liegt; diese Annahme schränkt die Allgemeinheit nicht ein. Wir betrachten eine Folge $\{C_n\}$ von ineinander eingeschachtelten Jordanschen Kurven in der z-Ebene, die im Äußern von C liegen, und so, daß die Bedingungen des Satzes von Courant erfüllt sind [5]). Wir bilden das Innere von C, C_n, resp. auf das Innere des Einheitskreises Γ in der u-Ebene ab, so daß die Punkte $z = 0$ und $u = 0$, und in diesen Punkten auch die positiven Richtungen der Achsen des Reellen einander entsprechen. Wir bezeichnen mit $u = \varphi(z)$, $\varphi_n(z)$ die Funktionen, welche diese Abbildungen liefern, und mit $z = \psi(u)$, $\psi_n(u)$ resp. die Umkehrfunktionen. Durch die Abbildung $u = \varphi_n(z)$ wird die Kurve C in die im Inneren von Γ liegende Jordansche Kurve γ_n transformiert.

Die Funktionen $f[\psi(u)]$ und $f\{\psi[\varphi_n(z)]\}$ sind im Inneren von Γ und C_n resp. analytisch und in den entsprechenden abgeschlossenen Bereichen stetig. Um unseren Satz zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n gibt, so daß für irgendeinen Punkt z auf oder im Inneren von C die Ungleichung

$$|f\{\psi[\varphi_n(z)]\} - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

gilt. Denn nach dem Rungeschen Theorem können wir die Funktion $f\{\psi[\varphi_n(z)]\}$ auf C und im Inneren von C beliebig genau durch ein Polynom $p(z)$ annähern:

$$|f\{\psi[\varphi_n(z)]\} - p(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Hieraus erfolgt unmittelbar die Schlußfolgerung unseres Satzes:

$$|f(z) - p(z)| < \varepsilon$$

für alle betreffenden Punkte, da gleichmäßige Entwicklung und Annäherung mit beliebiger Genauigkeit vollständig äquivalent sind.

Wir beweisen die Ungleichung (1) durch die Transformation $z = \psi_n(u)$ auf die u-Ebene, d. h. wir wollen zeigen, daß für jedes u auf oder im Inneren von γ_n die Ungleichung

$$|f[\psi(u)] - f[\psi_n(u)]| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

---

[5]) Eine solche Folge läßt sich mit Hilfe eines Quadratnetzes im Äußern von C konstruieren. Vgl. Osgood, Funktionentheorie (Leipzig 1912), S. 156.

befriedigt ist. Es ist hinreichend, die Ungleichung (2) für alle auf γ_n liegenden Punkte u zu beweisen. Wenn der Punkt u auf γ_n liegt, so liegen beide Punkte $z = \psi(u)$ und $z = \psi_n(u)$ im abgeschlossenen Bereich, welcher aus der Kurve C und ihrem Inneren besteht; in diesem abgeschlossenen Bereiche ist $f(z)$ stetig und damit gleichmäßig stetig. Das heißt, die Ungleichung (2) gilt gleichmäßig für alle betreffenden Werte von u, wenn wir nur n so auswählen können, daß $|\psi(u) - \psi_n(u)|$ beliebig klein ist, gleichmäßig für alle auf γ_n liegenden Punkte u. Diese letzte Bedingung läßt sich erfüllen infolge der in Γ gleichmäßigen Konvergenz der Folge $\{\psi_n\}$, welche aus dem Courantschen Satz erfolgt[6]). Unser Satz ist hiermit bewiesen.

Wenn jeder der Bereiche $C_1, C_2, \ldots, C_m$ durch eine Jordansche Kurve begrenzt ist und wenn der kürzeste Abstand der abgeschlossenen Bereiche C_i, C_j $(i, j = 1, 2, \ldots, m,\ i \neq j)$ voneinander nicht null ist, so ist jede innerhalb $C_1 + C_2 + \ldots + C_m$ analytische, in der entsprechenden abgeschlossenen Punktmenge stetige Funktion in eine gleichmäßig konvergierende Reihe von Polynomen entwickelbar. Wir führen den Beweis nicht aus, weil derselbe wegen einer ähnlichen Erörterung von Montel[7]) sehr einleuchtend ist.

Die Frage, ob eine innerhalb eines Bereiches analytische und im entsprechenden abgeschlossenen Bereiche stetige Funktion in eine im abgeschlossenen Bereiche gleichmäßig konvergente Reihe von Polynomen entwickelbar ist, gilt in der Enzyklopädie als ungelöst[8]). In dieser Beziehung machen wir vier Bemerkungen, deren Tragweite in Wirklichkeit noch größer ist, als wir hier zu erörtern brauchen.

1. *Unser Satz erstreckt sich nicht bis zum allgemeinsten einfach zusammenhängenden Bereiche der z-Ebene.* Zum Beispiel betrachten wir als Bereich einen außerhalb eines Kreises K liegenden Streifen A, der an einem Ende geschlossen ist und sich spiralförmig gegen K unendlich oft

---

[6]) A. a. O. S. 108, Satz IV. Unser Satz kann auch durch den Satz IIIa von Courant bewiesen werden.

[7]) A. a. O. Kap. IV. Die Methode stammt von Runge her.

[8]) Hilb und Szász, Bd. II_3, Heft 8, S. 1276 (Sept. 1924). Siehe auch Montel, a. a. O. S. 66–71, wo die Frage im Zusammenhang mit der Annäherungsmethode von Tschebyscheff betrachtet ist. Wir haben also bewiesen, daß für eine im Innern einer Jordanschen Kurve analytische und im entsprechenden abgeschlossenen Bereich stetige Funktion die Methode von Tschebyscheff eine gleichmäßig konvergente Folge von Polynomen liefert, deren Grenze die ursprüngliche Funktion ist.

Hilb und Szász bemerken auch, daß Konvexität des Bereiches genügt; ich habe das unabhängig davon auch bemerkt (a. a. O. S. 168, Fußnote), April 1924.

windet und sich beliebig nahe dem Kreis nähert. Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z-a},$$

wo $z = a$ der Mittelpunkt von K ist, ist überall im abgeschlossenen Bereiche A analytisch, doch nicht in eine im abgeschlossenen Bereiche gleichmäßig konvergente Reihe von Polynomen entwickelbar. Denn die Summe $F(z)$ einer solchen Reihe ist innerhalb K analytisch und in der abgeschlossenen Kreisfläche stetig. Auf der Kreislinie kann aber nicht $F(z) = f(z)$ sein, wegen der Werte der Integrale:

$$\int_K F(z)\,dz = 0, \qquad \int_K f(z)\,dz = 2\pi i.$$

2. *Gegeben ein einfach zusammenhängender Bereich C. Es ist nicht wahr, daß die Möglichkeit, eine beliebige im Inneren von C analytische, im abgeschlossenen Bereiche stetige Funktion in eine im abgeschlossenen Bereiche gleichmäßig konvergente Reihe von Polynomen zu entwickeln, ergibt, daß C durch eine Jordansche Kurve begrenzt ist.* Zum Beispiel, betrachten wir den Bereich C in der $z(=re^{i\theta})$-Ebene:

$$C\colon\ 1 > r \geqq 0, \quad -\pi < \theta < \pi.$$

Jede Funktion $f(z)$, die im Inneren von C analytisch und im entsprechenden abgeschlossenen Bereiche stetig ist, ist auch im ganzen Inneren des Bereiches $1 > r \geqq 0$ analytisch[9]), und deshalb läßt sich dieselbe auf die beschriebene Weise entwickeln. Trotzdem ist der Bereich C nicht durch eine Jordansche Kurve begrenzt.

Ein Bereich, der die besagte Eigenschaft hat, braucht nicht einfach zusammenhängend zu sein; das Beispiel

$$C'\colon\ 1 > r > 0$$

ist dem soeben angegebenen Beispiel ähnlich.

3. Wir nennen einen Randpunkt Q eines Bereiches *hebbar*, wenn eine Umgebung von Q existiert, in der kein Punkt liegt, der sich nicht im abgeschlossenen Bereiche befindet. Wenn wir hebbare Randpunkte ausschließen, so gilt der folgende Satz, dessen Beweis wir skizzieren:

Es sei ein zusammenhängender Bereich C in der z-Ebene gegeben. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß jede im Bereiche C mit Einschluß des Randes reguläre analytische Funktion in eine im abgeschlossenen Bereiche C gleichmäßig konvergente Reihe von Polynomen entwickelbar sei, ist, daß C entweder mit der ganzen Ebene mit Einschluß des Punktes $z = \infty$ zusammenfalle oder mit einem endlichen einfach zu-

[9]) Siehe z. B. Osgood, a. a. O. S. 315.

sammenhängenden Bereich, dessen Rand die Ebene in genau zwei zusammenhängende Bereiche zerteile[10]).

Wenn der Bereich die ganze Ebene ist, so muß die betreffende Funktion eine Konstante sein, die natürlich entwickelbar ist. Sonst muß der Bereich C beschränkt sein, weil jedes nicht konstante Polynom im Punkte ∞ den Wert ∞ hat und eine Reihe von solchen Polynomen in der Umgebung des Punktes ∞ nicht gleichmäßig gegen eine stetige Funktion konvergieren kann. Von nun an betrachten wir nur endliche Bereiche. Wir nennen $\bar{C}$ den C entsprechenden abgeschlossenen Bereich.

Die besagte Bedingung ist notwendig. Sonst existiert ein in $\bar{C}$ nicht enthaltener Punkt $P: z = z_1$, der sich nicht mit dem Punkt ∞ durch einen Streckenzug, welcher keinen Punkt von $\bar{C}$ enthält, verbinden läßt. Sämtliche Punkte, die sich mit P durch einen Streckenzug verbinden lassen, der keinen Punkt von $\bar{C}$ enthält, bilden einen einfach zusammenhängenden Bereich B, dessen Rand aus lauter Punkten von $\bar{C}$ besteht. Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z - z_1}$$

ist in jedem Punkt von $\bar{C}$ regulär; wäre sie in $\bar{C}$ entwickelbar, so wäre die Summe $S(z)$ der Reihe im Inneren von B regulär analytisch, was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist.

Wir benutzen hier nämlich den folgenden Satz: *Stimmen die Werte von zwei in einem einfach zusammenhängenden Bereiche B definierten monogenen analytischen Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ auf dem Rande von B überein, und sind die Funktionen in der in B liegenden Umgebung des Randes von B regulär, dann sind die Funktionen identisch.* Wenn nämlich die Funktion $z = \psi(u)$ den Einheitskreis der u-Ebene auf den Bereich B abbildet, so ist die Funktion

$$F(u) = \begin{cases} 0, & |u| = 1, \\ f_1[\psi(u)] - f_2[\psi(u)], & |u| < 1, \\ \overline{f_1\left[\psi\left(\frac{1}{\bar{u}}\right)\right]} - \overline{f_2\left[\psi\left(\frac{1}{\bar{u}}\right)\right]}, & |u| > 1, \end{cases}$$

für $|u| = 1$ regulär und Null, und daher identisch Null.

---

[10]) Diese Bedingung lautet auch so, *daß C entweder mit der ganzen Ebene zusammenfalle oder ein endlicher Bereich sei, dessen Komplementärmenge* (d. h. Komplementärmenge des abgeschlossenen Bereiches, in bezug auf die ganze Ebene) *zusammenhänge.*

Diese Bereiche finden sich in einer Klasse von Bereichen, deren schöne Eigenschaften Prof. Carathéodory studiert hat, Math. Annalen 72 (1912), S. 107—144, Kap. III.

Die Bedingung ist hinreichend. Denn nach der Regularität von $f(z)$ im *abgeschlossenen* Bereiche gibt es eine von z_0 unabhängige positive Größe ε, so daß $f(z)$ im Kreise $|z - z_0| < \varepsilon$ regulär ist, wenn nur z_0 in $\bar{C}$ liegt. Es existiert also eine Jordansche Kurve J, welche $\bar{C}$ enthält und deren Inneres aus lauter Regulärpunkten von $f(z)$ besteht; das Resultat folgt hiernach aus dem Theorem von Runge.

Wir beweisen die Existenz der Kurve J genauer. Es gibt in der Tat eine endliche Anzahl von Kreisen $K_1, K_2, \ldots, K_N$, jeder vom Halbmesser ε und mit dem Mittelpunkt auf dem Rande von C, die den Rand von C überdecken. Die Jordansche Kurve, welche aus den zu äußerst liegenden Bogen dieser Kreise besteht, enthält etwa M einfach zusammenhängende Bereiche $B_1, B_2, \ldots, B_M$, deren Punkte weder zu C noch zu $K_1, K_2, \ldots, K_N$ gehören. Ein beliebiger Punkt A_l von B_l läßt sich mit dem Punkt ∞ durch einen Streckenzug verbinden, welcher keinen Punkt von $\bar{C}$ enthält. Wir können diesen Streckenzug in einen Bereich einschließen, der gleichfalls keinen Punkt von $\bar{C}$ enthält und der durch einen anderen Streckenzug S_l begrenzt ist. Die oben gebrauchte Jordansche Kurve J besteht aus Bögen von $K_1, K_2, \ldots, K_N$ und aus Strecken von $S_1, S_2, \ldots, S_M$, die in den Kreisen $K_1, K_2, \ldots, K_N$ liegen.

4. *Es sei die Funktion $f(z)$ im Inneren einer Jordanschen Kurve C analytisch und im entsprechenden abgeschlossenen Bereiche $\bar{C}$ stetig. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß jede im Inneren von C analytische und im abgeschlossenen Bereiche $\bar{C}$ stetige Funktion $F(z)$ in eine im abgeschlossenen Bereiche $\bar{C}$ gleichmäßig konvergierende Reihe von Polynomen von $f(z)$ entwickelbar sei:*

$$F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{i} c_{in} [f(z)]^n, \tag{3}$$

besteht darin, daß $f(z)$ im abgeschlossenen Bereiche schlicht sei.

Eine Funktion $f(z)$ heißt im abgeschlossenen Bereiche $\bar{C}$ *schlicht*, wenn die Gleichung

$$f(z_1) = f(z_2),$$

wo z_1 und z_2 zu $\bar{C}$ gehören, die Gleichung $z_1 = z_2$ stets ergibt.

Die Bedingung ist notwendig. Sonst haben wir

$$f(z_1) = f(z_2),$$

wo $z_1 \neq z_2$ ist und z_1 und z_2 in $\bar{C}$ sind. Die Funktion $F(z) = z$ ist dann in $\bar{C}$ nicht entwickelbar, weil die Reihen (3) für $z = z_1$ und für $z = z_2$ identisch sind, jedoch $F(z_1) \neq F(z_2)$ ist.

Die Bedingung ist hinreichend. Der Bereich $\bar{C}$ entspricht einem Bereiche $\bar{B}$ in der u-Ebene mittels der ein-eindeutigen Transformation $u = f(z)$. Der Bereich $\bar{B}$ ist durch eine Jordansche Kurve begrenzt. Wir haben also nach unserem Hauptsatze die im abgeschlossenen Bereiche $\bar{B}$ gleichmäßig konvergierende Entwicklung

$$F[\varphi(u)] = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{i} c_{in} u^n, \tag{4}$$

wo $F(z)$ eine beliebige in C analytische, in $\bar{C}$ stetige Funktion ist, und wo $\varphi(u)$ die Umkehrfunktion von $f(z)$ ist. Die Reihen (3) und (4) sind äquivalent.

Dieser Satz gilt auch für einen unendlichen Bereich $\bar{C}$, der durch eine Jordansche Kurve begrenzt ist.

(Eingegangen am 24. 10. 1925.)