

Über die Entwicklung einer Funktion einer komplexen Veränderlichen nach Polynomen.

Von

J. L. Walsh in München¹⁾.

In dem vorliegenden Artikel soll in der Hauptsache ein Beweis des folgenden Satzes entwickelt werden:

Satz I. *Ist die komplexe Funktion $F(z)$ der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ stetig auf einer Jordanschen Kurve C , die den Punkt $z = 0$ einschließt, so läßt sich $F(z)$ in eine auf C gleichmäßig konvergierende Reihe von Polynomen in z und $1/z$ entwickeln.*

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des klassischen Satzes von Weierstraß, daß jede stetige periodische Funktion von $\Phi(\theta)$ von Periode 2π sich gleichmäßig entwickeln läßt in eine Reihe von trigonometrischen Polynomen:

$$\Phi(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^i (a_{in} \cos n\theta + b_{in} \sin n\theta).$$

Satz I ist mit dem Satze von Weierstraß identisch, wenn die Kurve C der Einheitskreis ist, denn die Relationen

$$\begin{aligned} \sin n\theta &= \frac{z^n - z^{-n}}{2i}, & \cos n\theta &= \frac{z^n + z^{-n}}{2}; \\ z^n &= \cos n\theta + i \sin n\theta, & z^{-n} &= \cos n\theta - i \sin n\theta \end{aligned}$$

gelten dann auf C . Jedes trigonometrische Polynom ist ein Polynom von z und $1/z$, und umgekehrt.

Satz I findet sich schon bewiesen für den Fall, daß die Kurve C eine analytische Kurve ist²⁾.

¹⁾ National Research Fellow.

²⁾ Walsh, Transactions of the American Mathematical Society 26 (1924), S. 168, Fußnote.

Satz I ist dem folgenden neulich bewiesenen Satz³⁾ ähnlich, welchen wir im Beweis gebrauchen:

Satz II. *Ist die Funktion $F(z)$ im Inneren einer Jordanschen Kurve C analytisch und im entsprechenden abgeschlossenen Bereiche stetig, so läßt sich $F(z)$ in eine im abgeschlossenen Bereiche gleichmäßig konvergierende Reihe von Polynomen in z entwickeln.*

Satz II wird durch einen Satz von Courant über konforme Abbildung⁴⁾ gewonnen, dessen Benutzung mir Prof. Carathéodory geraten hat.

Zum Beweise von Satz I benutzen wir den folgenden Hilfssatz:

Satz III. *Es sei B ein ringförmiger Bereich, der durch zwei Jordansche Kurven C_1 und C_2 , die keinen gemeinsamen Punkt besitzen, begrenzt wird, und es sei die Funktion $F(z)$ im Inneren von B analytisch, im entsprechenden abgeschlossenen Bereiche stetig. Wenn der Nullpunkt im Inneren von C_1 und C_2 liegt, so läßt sich $F(z)$ gleichmäßig im abgeschlossenen Bereiche B nach Polynomen von z und $1/z$ entwickeln. Wenn C_2 im Inneren von C_1 liegt, so ist diese Entwicklung die Summe einer auf und innerhalb C_1 gleichmäßig konvergierenden Reihe von Polynomen von z und einer auf und außerhalb C_2 gleichmäßig konvergierenden Reihe von Polynomen von $1/z$.*

Es seien K_1 und K_2 zwei im Bereiche B liegende analytische Jordansche Kurven, so daß jede die Kurve C_2 einschließt, und es liege K_2 im Inneren von K_1 . Die Funktionen

$$(1) \quad F_1(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1} \frac{F(t) dt}{t-z}, \quad F_2(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{K_2} \frac{F(t) dt}{t-z},$$

wo die Integrale im positiven Sinne in bezug auf den durch K_1 und K_2 begrenzten Bereich erstreckt sind, verhalten sich im Inneren von K_1 bzw. im Äußeren von K_2 analytisch. Wenn z zwischen K_1 und K_2 liegt, so gilt die Gleichung

$$(2) \quad F(z) \equiv F_1(z) + F_2(z).$$

Die Integrale (1) sind von der besonderen Wahl der Kurven K_1 und K_2

³⁾ Walsh, *Mathematische Annalen* 96 (1926), S. 430–436.

(Bemerkung bei der Korrektur.) Ich habe erst neulich (am 23. Juli 1926) durch eine freundliche mündliche Mitteilung von Herrn Marcel Riesz erfahren, daß dieser Satz durch die von Carleman benutzten Methoden sich beweisen läßt. Carleman hat einen ähnlichen aber weniger allgemeinen Satz bewiesen. Vgl. „Über die Approximation analytischer Funktionen“, *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik* 17 (1922–23).

Herr Riesz hat diese Tatsache vor drei Jahren bemerkt, ohne sie zu publizieren.

⁴⁾ Göttinger Nachrichten 1914, S. 101–109, Satz IV.

unabhängig; wir lassen diese Kurven die Kurven C_1 bzw. C_2 annähern. Die Funktion $F_1(z)$ ist im ganzen Inneren von K_1 regulär-analytisch. Wenn z zwischen K_1 und K_2 liegt, aber sich einem Punkt von C_2 nähert, so nähern sich $F(z)$ und $F_1(z)$ — und deshalb auch $F_2(z)$ — stetigen Grenzwerten. Die Funktion $F_1(z)$ betrügt sich ebenso, wenn z gegen einen Punkt von C_1 geht. D. h. die Funktionen $F_1(z)$ und $F_2(z)$ sind im Inneren von C_1 analytisch, im entsprechenden abgeschlossenen Bereiche stetig, bzw. im Äußeren von C_2 (inklusive des Punktes ∞) analytisch, im entsprechenden abgeschlossenen Bereiche stetig, wenn passende Definitionen dieser Funktionen auf den Kurven gegeben werden. Die Gleichung (2) gilt für alle im abgeschlossenen Bereiche B liegenden Punkte.

Die Funktion $F_1(z)$ läßt sich nach Satz II auf und im Inneren von C_1 nach Polynomen von z gleichmäßig entwickeln. Man sieht durch die Transformation $z = 1/z'$, daß die Funktion $F_2(z)$ sich auf und im Äußeren von C_2 nach Polynomen von z' gleichmäßig entwickeln läßt. Die gliedweise Summe dieser beiden Entwicklungen befriedigt die Behauptungen unseres Satzes.

Jetzt können wir den Satz I leicht beweisen: es sei $u = f(z)$ eine Funktion, die das Innere von C auf das Innere des Einheitskreises Γ in der u -Ebene abbildet, so daß $f(0) = 0$ ist, und es sei $z = \varphi(u)$ die Umkehrfunktion von $f(z)$. Die Funktion $F[\varphi(u)]$ ist auf Γ definiert und stetig und läßt sich dort nach Polynomen von u und $1/u$ nach dem Weierstraßschen Satze gleichmäßig entwickeln. D. h. wir haben auf C die gleichmäßige Entwicklung

$$(3) \quad F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=-i}^i c_{in} [f(z)]^n.$$

Die Funktion $f(z)$ läßt sich nach Satz II auf C durch Polynome von z gleichmäßig approximieren. Die Funktion $1/f(z)$ ist im Inneren von C überall regulär-analytisch, außer im einzelnen Punkte $z = 0$. Nach Satz III läßt sich $1/f(z)$ auf C durch Polynome von z und $1/z$ gleichmäßig approximieren⁵⁾. Der Satz I folgt nun mit Hilfe der Gleichung (3).

⁵⁾ Ich verdanke Prof. Hartogs die Idee der folgenden Bemerkung.

Satz III ist an und für sich vielleicht nicht ohne Interesse. Man kann aber beweisen, daß die Funktion $1/f(z)$ sich auf C nach Polynomen von z und $1/z$ gleichmäßig approximieren läßt; daher folgt Satz I ohne Gebrauch von Satz III. Die Funktion $f(z)$ hat nämlich eine einfache Nullstelle in $z = 0$, und die Funktion $1/f(z)$ dort einen einfachen Pol:

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{a}{z} + f_1(z),$$

wo $f_1(z)$ im Inneren von C analytisch ist und im entsprechenden abgeschlossenen Bereich stetig. Die Gleichung gilt im abgeschlossenen Bereich. In diesem abgeschlossenen Bereich läßt sich $f_1(z)$ durch Polynome von z gleichmäßig approximieren, also $1/f(z)$ durch Polynome von z und $1/z$.

Einige weitere Tatsachen sind noch bemerkenswert.

1°. Satz I kann auch folgendermaßen ausgesprochen werden:

Ist die Funktion $F(z)$ auf der Jordanschen Kurve C stetig, so läßt sich $F(z)$ in eine auf C gleichmäßig konvergierende Reihe von rationalen Funktionen von z entwickeln.

Die Entwicklung, die im Satze I betrachtet wird, ist schon eine Entwicklung nach rationalen Funktionen, und behält diese Eigenschaft nach einer ganzen oder gebrochenen linearen Transformation der Ebene. Wir brauchen also, um die Äquivalenz dieser Sätze nachzuweisen, nur das Umgekehrte zu betrachten.

Wenn eine Funktion $F(z)$ nach rationalen Funktionen entwickelbar ist, so haben höchstens endlichviele dieser Funktionen Pole auf C . Jede rationale Funktion, die keinen Pol auf C hat, läßt sich auf C nach Satz III durch Polynome in z und $1/z$ gleichmäßig approximieren, wenn die Lage der Kurve C die verlangte ist. Die Funktion $F(z)$ läßt sich also auf C nach Polynomen von z und $1/z$ entwickeln.

Die jetzige Formulierung des Satzes I ist aber auch gültig, wenn die Kurve C den Nullpunkt nicht einschließt, und auch wenn die Kurve C sich ins Unendliche erstreckt.

2°. *Ist die Funktion $f(z)$ auf einer Jordanschen Kurve C stetig, so ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine beliebige auf C stetige Funktion $F(z)$ in eine auf C gleichmäßig konvergierende Reihe von Polynomen von $f(z)$ und $1/f(z)$ entwickelbar sei, daß die Transformation $u = f(z)$ die Kurve C ein-eindeutig auf eine den Punkt $u = 0$ einschließende Jordansche Kurve in der u -Ebene abbilde.*

Die Bedingung ist notwendig. Zuerst bilden die Punkte $u = f(z)$ eine Jordansche Kurve K , weil die Abbildung $u = f(z)$ ein-eindeutig ist. Die Transformation $u = f(z)$ ist nämlich ebenso wie $f(z)$ selbst eindeutig. Die Umkehrfunktion $z = \varphi(u)$ ist gleichfalls eindeutig. In der Tat, wäre

$$f(z_1) = f(z_2), \quad z_1 \neq z_2, \quad z_1, z_2 \text{ auf } C,$$

so wäre die Funktion $F(z) = z$ nicht entwickelbar, denn die Reihen für $z = z_1$ und $z = z_2$ wären dieselben, mit $F(z_1) \neq F(z_2)$.

Liegt zweitens der Punkt $u = 0$ auf K , so ist $1/f(z)$ in einem Punkt unendlich und es können nur endlich viele Glieder der Entwicklung von $F(z)$ negative Potenzen von $f(z)$ enthalten; also ist jede Funktion $F(z)$ nur nach Polynomen von $f(z)$ gleichmäßig entwickelbar. D. h. jede auf K stetige Funktion $F[\varphi(u)]$ wäre nach Polynomen von u gleichmäßig entwickelbar. Liegt anderseits $u = 0$ außerhalb K , so ist $1/u$ auf und innerhalb K regulär-analytisch und dort nach Polynomen von u gleichmäßig ent-

wickelbar; infolgedessen ist ebenfalls jede auf K stetige Funktion $F[\varphi(u)]$ nach Polynomen von u gleichmäßig entwickelbar. Hier haben wir einen Widerspruch, weil die Funktion $F[\varphi(u)] = \frac{1}{u-u_0}$, wo u_0 innerhalb K liegt, stetig ist und doch nicht nach Polynomen von u gleichmäßig entwickelbar⁶⁾.

Die Bedingung ist hinreichend. Die beliebige stetige Funktion $F(z) = F[\varphi(u)]$ ist auf K nach Polynomen von u und $1/u$ gleichmäßig entwickelbar, d. h. nach Polynomen von $f(z)$ und $1/f(z)$.

Es ist nach dieser Erörterung klar, daß es keine auf C stetige Funktion $f(z)$ gibt, derartig, daß jede auf C stetige Funktion $F(z)$ nach Polynomen nur von $f(z)$ entwickelbar ist.

Für die Gültigkeit der Bemerkung 2° braucht nicht die Kurve C endlich zu sein.

3°. Es sei B ein Bereich, der durch zwei Jordansche Kurven C_1 und C_2 begrenzt ist, und möge C_1 außerhalb der Kurve C_2 liegen. Es existiert dann keine Funktion $f(z)$, die im Inneren von B analytisch, im entsprechenden abgeschlossenen Bereiche stetig ist, so daß eine beliebige, im Inneren von B analytische, im entsprechenden abgeschlossenen Bereiche stetige Funktion $F(z)$ nach Polynomen von $f(z)$ gleichmäßig entwickelbar ist. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß jede solche Funktion $F(z)$ nach Polynomen von $f(z)$ und $1/f(z)$ gleichmäßig entwickelbar sei, ist, daß durch die Transformation $u = f(z)$ der Bereich B einem Bereiche B' entspreche, welcher durch zwei Jordansche Kurven ohne gemeinsamen Punkt begrenzt ist, und daß jede dieser Kurven den Nullpunkt einschließe.

⁶⁾ Eine solche Entwicklung würde eine im ganzen Inneren von C analytische Funktion darstellen, was wegen des folgenden Satzes unmöglich ist:

Stimmen die Werte von zwei in einem einfach zusammenhängenden Bereiche B definierten monogenen analytischen Funktionen auf dem Rande von B überein, und sind die Funktionen in der in B liegenden Umgebung des Randes von B regulär, in der entsprechenden abgeschlossenen Umgebung stetig, dann sind die Funktionen identisch.

Ein Beweis dieses Satzes findet sich skizziert bei Walsh, Math. Annalen loc. cit. Es ist auch nicht notwendig für die Gültigkeit dieses Satzes bzw. seines dort gegebenen Beweises, daß die Werte der fraglichen Funktionen auf dem ganzen Rande von B übereinstimmen.

Wir haben in der Tat durch die dort gegebene Skizze den folgenden Satz:

Es sei die Funktion $F(z)$ auf dem Rande eines beschränkten Bereiches B regulär-analytisch. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $F(z)$ auf dem Rande von B (bzw. im ganzen abgeschlossenen Bereich B) nach Polynomen von z gleichmäßig entwickelbar sei, besteht darin, daß $F(z)$ in jedem Punkt regulär-analytisch sei, der sich nicht mit dem Punkt ∞ durch einen Streckenzug, der keinen Punkt des Randes von B enthält, verbinden läßt.

Dieser Satz gilt auch, wenn der Bereich B mehrfach zusammenhängend ist.

Der Beweis ist einfach und wird dem Leser überlassen.

4°. Man kann ein weitergehendes Resultat als den Satz I herleiten, wenn die Funktion $F(z)$ auf C eine Bedingung von Lipschitz befriedigt und wenn die Kurve C im Sinne von Osgood⁷⁾ regulär ist.

Die Funktion $F(z)$ läßt sich nämlich als die Summe

$$(4) \quad F(z) = F_1(z) + F_2(z)$$

schreiben, wo $F_1(z)$ im Inneren von C analytisch ist und im entsprechenden abgeschlossenen Bereich stetig, und wo $F_2(z)$ im Äußeren von C analytisch ist und im entsprechenden abgeschlossenen Bereich stetig⁸⁾.

Entwickelt man die Funktionen $F_1(z)$ und $F_2(z)$, so bekommt man nach (4) die Entwicklung

$$(5) \quad F(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^i a_{in} z^n + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{-i} a_{in} z^n$$

wo die Reihen auf und im Inneren von C , bzw. auf und im Äußeren von C gleichmäßig konvergieren. Die Entwicklung (5) ist natürlich nicht möglich für alle auf C bloß stetigen Funktionen, wenn auch C regulär ist.

5°. Es sei der Bereich B durch die Jordanschen Kurven C_0, C_1, \dots, C_n begrenzt, wo B innerhalb C_0 und außerhalb C_1, C_2, \dots, C_n liegt, und wo die Kurve C_i keinen gemeinsamen Punkt mit der Kurve C_j ($i, j = 0, 1, \dots, n, i \neq j$) hat. Es seien z_1, z_2, \dots, z_n beliebige Punkte innerhalb C_1, C_2, \dots, C_n bzw. Ist die Funktion $F(z)$ innerhalb B analytisch und im entsprechenden abgeschlossenen Bereiche stetig, so ist sie in demselben abgeschlossenen Bereiche die Summe von $(n+1)$ Funktionen:

$$F(z) = F_0(z) + F_1(z) + F_2(z) + \dots + F_n(z),$$

wo $F_0(z)$ im Inneren von C_0 regulär und im entsprechenden abgeschlossenen Bereiche stetig ist und wo $F_k(z)$, $k = 1, 2, \dots, n$, im Äußeren von C_k regulär und im entsprechenden abgeschlossenen Bereiche stetig ist. Die Funktion $F(z)$ ist also im abgeschlossenen Bereiche B als die Summe von $(n+1)$ Reihen entwickelbar:

$$F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^i a_{im} z^m + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^i a'_{im} (z - z_1)^{-m} \\ + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^i a''_{im} (z - z_2)^{-m} + \dots + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^i a_{im}^{(n)} (z - z_n)^{-m}.$$

Jede dieser Reihen konvergiert im abgeschlossenen Bereiche B gleichmäßig; die erste konvergiert auf und im Inneren von C_0 gleichmäßig, die

⁷⁾ Funktionentheorie I (Leipzig 1912), S. 51.

⁸⁾ Plemelj, Monatshefte für Math. und Phys. 19 (1909), S. 205–210.

$(k+1)$ -te, $k=1, 2, \dots, n$, konvergiert auf und im Äußeren von C_k gleichmäßig.

Der Beweis dieses Satzes ist fast genau derselbe wie der Beweis des Satzes III.

6°. Jede Funktion $F(z)$, die auf einem Jordanschen Kurvenstück C' stetig ist, läßt sich auf C' nach Polynomen von z gleichmäßig entwickeln.

Man kann eine Jordansche Kurve C konstruieren, von welcher das Stück C' ein Bogen ist⁹⁾. Wir nehmen an, daß der Nullpunkt innerhalb C liegt. Die Funktion $F(z)$ läßt sich auf C fortsetzen, so daß die erweiterte Funktion $F(z)$ auf der ganzen Kurve C stetig ist. Nach Satz I läßt sich die Funktion $F(z)$ auf C nach Polynomen von z und $1/z$ gleichmäßig entwickeln.

Die Funktion $1/z$ läßt sich auf C' nach Polynomen von z gleichmäßig approximieren. In der Tat, sei K ein Jordansches Kurvenstück, welches den Nullpunkt mit dem Punkt ∞ verbindet, und welches keinen Punkt von C' enthält¹⁰⁾. Die in solcher Weise aufgeschnittene Ebene ist ein einfach zusammenhängender Bereich B , in dessen Inneren die Funktion $1/z$ regulär-analytisch ist, und dessen Inneres den Punkt ∞ nicht enthält. Nach dem wohlbekannten Satze von Runge ist also die Funktion $1/z$ im Inneren von B nach Polynomen von z entwickelbar und die Reihe konvergiert gleichmäßig in jedem ganz im Inneren von B liegenden abgeschlossenen Bereich, daher auf C' .

Da $F(z)$ auf C' nach Polynomen von z und $1/z$ gleichmäßig entwickelbar ist, und da die Funktion $1/z$ sich auf C' durch Polynome von z gleichmäßig approximieren läßt, so ist $F(z)$ auf C' nach Polynomen von z gleichmäßig entwickelbar.

Die Bemerkung 6° ist eine direkte Verallgemeinerung des klassischen Weierstraßschen Satzes, daß jede in einem abgeschlossenen Intervall $a \leq x \leq b$ stetige Funktion $F(x)$ sich in diesem Intervall nach Polynomen in x gleichmäßig entwickeln läßt.

Diese Bemerkung 6° hat der Verfasser erst nach einer Unterredung mit Professor Hartogs gemacht. Professor Hartogs hatte schon diese Bemerkung für ein analytisches Kurvenstück C' gebraucht, um weitere Anwendungen auf Entwicklungen nach Polynomen zu machen. Die allgemeinere Bemerkung 6° ist ebenfalls weiterer Anwendungen fähig¹¹⁾.

⁹⁾ Vgl. von Kerékjártó, Topologie I, S. 69 (Berlin 1923).

¹⁰⁾ Ein einfacher Bogen zerlegt die Ebene nicht. von Kerékjártó, l. c. S. 67.

¹¹⁾ Hartogs und Rosenthal, eine Arbeit, die in den Mathem. Annalen erscheint.

(Bemerkung bei der Korrektur.) Noch eine weitere Anwendung ist folgende: Ist die Funktion $F(z)$ auf einer beschränkten abzählbaren Punktmenge M , die

(Fortsetzung auf der nächsten Seite.)

Für die ursprüngliche Bemerkung 6° muß die Kurve C' ganz im Endlichen liegen, aber für die folgende Bemerkung — die sehr leicht zu beweisen ist — kann die Kurve C' sich ins Unendliche erstrecken.

Es sei die Funktion $f(z)$ auf einem Jordanschen Kurvenstück C' stetig. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß jede auf C' stetige Funktion nach Polynomen von $f(z)$ gleichmäßig entwickelbar sei, besteht darin, daß $f(z_1) \neq f(z_2)$ sei, wenn $z_1 \neq z_2$ ist und z_1 und z_2 auf C' liegen.

Diese Bedingung ist nämlich die, daß die Transformation $u = f(z)$ das Kurvenstück C' eindeutig auf ein beschränktes Jordansches Kurvenstück abbildet.

Wenn die Funktion $f(z)$ reell ist, so ist also notwendig und hinreichend, daß $f(z)$ monoton im engeren Sinne sei.

Sind die Punkte der Kurve C' als eine eindeutige stetige Funktion $z(t)$ des reellen Parameters t gegeben, wo $z(t_1) \neq z(t_2)$ ist, wenn $t_1 \neq t_2$ ist, so heißt *monoton im engeren Sinne*, daß $t_1 < t_2$ stets $f[z(t_1)] < f[z(t_2)]$ ergibt, oder daß $t_1 < t_2$ stets $f[z(t_1)] > f[z(t_2)]$ ergibt. Wenn die Kurve C' ein Intervall der reellen Axe ist, so ist diese Bedingung, daß $f(z)$ streng monoton sei¹²⁾.

Es gibt also keine stetige reelle oder komplexe Funktion $f(z)$ von Periode p , derartig, daß eine beliebige stetige Funktion $F(z)$ der reellen Veränderlichen z von Periode p nach Polynomen von $f(z)$ gleichmäßig approximierbar ist. Nach Bemerkung 2° gibt es auch keine reelle stetige Funktion $f(z)$ von Periode p , so daß eine beliebige stetige Funktion $F(z)$ der reellen Veränderlichen z von Periode p nach Polynomen von $f(z)$ und $1/f(z)$ gleichmäßig entwickelbar ist. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für eine solche *komplexe* Funktion $f(z)$ ist natürlich in Bemerkung 2° enthalten.

7°. Wenn man eine stetige Funktion einer reellen Veränderlichen x durch Polynome von $f(x)$ gleichmäßig approximieren will, so ist es keines-

nur endlich viele Häufungspunkte besitzt, stetig, dann ist $F(z)$ auf M nach Polynomen in z gleichmäßig entwickelbar. Man konstruiert in der Tat ein Jordansches Kurvenstück C' , welches die Menge M enthält, und man erweitert die Definition der Funktion $F(z)$, so daß sie überall auf C' definiert und stetig ist. Die Funktion $F(z)$ ist auf C' nach Polynomen gleichmäßig entwickelbar, also auch auf M . Diese Aussage wurde von Herrn Szegö und mir zusammen formuliert.

¹²⁾ Eine solche Transformation $u = f(z)$ wird oft von Lebesgue, S. Bernstein, Jackson, de la Vallée-Poussin und anderen in der Theorie der Approximation durch Polynome einer reellen Veränderlichen gebraucht, um Resultate über rationale Polynome bei der Annäherung durch trigonometrische Polynome anzuwenden, und umgekehrt. Vgl. de la Vallée-Poussin, *Approximation des fonctions d'une variable réelle* (Paris 1919).

wegs notwendig, daß $f(x)$ selbst stetig sei¹³⁾. Wir beweisen in der Tat das folgende für reelle Funktionen:

Es sei die reelle Funktion $f(x)$ definiert auf der beschränkten Punktmenge C der reellen Achse. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine willkürliche auf C im engeren Sinne stetige Funktion $F(x)$ nach Polynomen von $f(x)$ gleichmäßig entwickelbar sei, besteht darin, daß $f(x)$ eine beschränkte Funktion sei, deren Umkehrfunktion eindeutig und im engeren Sinne stetig ist.

Die Funktion $g(z)$ heißt *im engeren Sinne stetig*, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ nur dann in sich schließt, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n)$ existiert, wenn $g(z_n)$ definiert ist, und daß diese Grenze gleich $g(z_0)$ ist, wenn auch $g(z_0)$ definiert ist.

Diese Bedingungen sind notwendig. Die Funktion $f(x)$ muß beschränkt sein, sonst ist keine beschränkte Funktion $F(x)$ gleichmäßig entwickelbar, außer einer Konstanten. Die Umkehrfunktion $x = \varphi(u)$ von $u = f(x)$ muß eine eindeutige Funktion von u sein. Sonst hätten wir

$$f(x_1) = f(x_2), \quad x_1 \neq x_2.$$

In diesem Falle wäre die Funktion $F(x) \equiv x$ nicht gleichmäßig entwickelbar, weil die Reihen für $x = x_1$ und $x = x_2$ dieselben wären, mit $F(x_1) \neq F(x_2)$.

Die Funktion $\varphi(u)$ muß im engeren Sinne stetig sein, sonst hätten wir

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u_0, & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(u_n) = \varphi_0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u'_n = u_0, & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(u'_n) = \varphi'_0 \neq \varphi_0, \end{aligned}$$

wo die Werte u'_n alle gleich u_0 sein dürfen. Wir hätten auch andererseits für $F(x) \equiv x$ die Reihen

$$(6) \quad \begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^i c_{in} [f(x)]^n, \quad c_{in} \text{ konstant,} \\ \varphi(u_k) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^i c_{in} u_k^n, \quad \varphi(u'_k) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^i c_{in} (u'_k)^n. \end{aligned}$$

¹³⁾ Die Funktion $f(x)$ kann ja in jedem Punkt unstetig sein. Es sei zum Beispiel das Intervall $0 \leq x \leq 1$; wir setzen

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ rational,} \\ 2+x, & x \text{ irrational.} \end{cases}$$

Man kann jede für $0 \leq x \leq 1$ stetige Funktion durch Polynome von $f(x)$ gleichmäßig approximieren.

Die entsprechenden Gleichungen für die Grenzwerte:

$$\varphi_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^i c_{in} u_0^n, \quad \varphi'_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^i c_{in} u_0^n,$$

enthalten also den Widerspruch $\varphi_0 = \varphi'_0$.

Die Bedingung ist hinreichend. Die Funktion $F[\varphi(u)]$ ist vielleicht nicht auf einer abgeschlossenen Punktmenge definiert, aber läßt sich erweitern, so daß sie auf einer abgeschlossenen Punktmenge definiert und stetig ist und zwar so, daß sie für alle Werte von u definiert und stetig ist. Wenn M so gewählt ist, daß $|f(x)| \leq M$ ist, so ist $F[\varphi(u)]$ für $-M \leq u \leq M$ nach Polynomen von u gleichmäßig entwickelbar:

$$F[\varphi(u)] = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^i c_{in} u^n$$

ist, welches gleichwertig mit (6) ist. Hiermit ist unser Beweis vollendet.

Dieser Satz gilt auch für eine unbeschränkte Punktmenge C , wenn in der Definition der Stetigkeit im engeren Sinne auch der Wert ∞ als Grenzwert für abhängige und unabhängige Veränderliche zulässig ist, und wenn wir nur beschränkte Funktionen $F(x)$ entwickeln.

8°. Man kann auch analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen durch Polynome einer *unstetigen* Funktion gleichmäßig approximieren. Wir geben nur ein sehr einfaches Beispiel; die Erörterung läßt sich leicht verallgemeinern und der Leser wird dann einen allgemeinen Satz formulieren können.

In der $z (= x + iy)$ -Ebene sei $u = f_1(z)$ die Funktion, die das Innere des Halbkreises $y > 0, |z| < 1$ auf das Innere des Kreises $C_1: |u| \leq 2$ abbildet und sei $u = f_2(z)$ die Funktion, die das Innere des Halbkreises $y < 0, |z| < 1$ auf das Innere einer beliebigen Jordanschen Kurve C_2 abbildet, die im Kreise $|u - 3| \leq \frac{1}{2}$ liegt. Die Funktionen $f_1(z)$ bzw. $f_2(z)$ sind in diesen abgeschlossenen Halbkreisen stetig, wenn passende Definitionen der Funktionen auf den Rändern gegeben werden. Es sei C_3 eine beliebige geschlossene Jordansche Kurve, die im Kreise $|u - 5i| \leq 1$ liegt, und C_4 ein beliebiges Jordansches Kurvenstück: $u = \omega(t), 0 \leq t \leq 1$ [wobei $\omega(t_1) \neq \omega(t_2)$ ist, wenn $t_1 \neq t_2$ ist], das im Inneren des Kreises $|u - 9 + 6i| = 3$ liegt. Es sei $u = f_3(z)$ die Funktion, die das Innere des Kreises $C: |z| = 1$ auf das Innere von C_3 abbildet; die Funktion $f_3(z)$ ist im abgeschlossenen Bereich $|z| \leq 1$ stetig.

Wir betrachten jetzt die Funktion:

$$f(z) = \left. \begin{array}{l} f_1(z), \quad y > 0, |z| < 1, \\ f_2(z), \quad y < 0, |z| < 1, \\ \omega(z), \quad 0 < x < 1, \\ f_1(z), \quad -1 \leq x < 0, x \text{ rational,} \\ f_2(z), \quad -1 < x < 0, x \text{ irrational,} \\ f_3(z), \quad |z| = 1, z^2 \neq 1, \\ 1492, \quad z = 0, \\ 1776, \quad z = 1, \end{array} \right\} y = 0,$$

die im ganzen abgeschlossenen Bereich $C: |z| \leq 1$ definiert ist. Wir behaupten: *Ist $F(z)$ im Inneren von C analytisch, im entsprechenden abgeschlossenen Bereich stetig, so läßt sich $F(z)$ nach Polynomen von $f(z)$ im abgeschlossenen Bereich gleichmäßig entwickeln.*

Es sei $z = \varphi(u)$ die Umkehrfunktion von $u = f(z)$. Die Funktion $F[\varphi(u)]$ ist, wenn die Definition passend erweitert wird, im Inneren von C_1, C_2, C_3 analytisch, im entsprechenden abgeschlossenen Bereich stetig. Nach Bemerkung 6° läßt sich $F[\varphi(u)]$ auf C_4 durch Polynome von u gleichmäßig approximieren. Wir setzen noch

$$F[\varphi(u)] = \begin{cases} F(0), & |u - 1492| \leq 1, \\ F(1), & |u - 1776| \leq 1. \end{cases}$$

Die in solcher Weise erweiterte Funktion $F[\varphi(u)]$ ist also nach Polynomen von u gleichmäßig entwickelbar¹⁴⁾, und es bleibt nur u durch $f(z)$ zu ersetzen, um die Behauptung zu erweisen.

Eine solche Funktion $f(z)$, die die Eigenschaft hat, daß jede Funktion $F(z)$, die für $|z| < 1$ analytisch und im abgeschlossenen Bereich $C: |z| \leq 1$ stetig ist, sich nach Polynomen von $f(z)$ gleichmäßig entwickeln läßt, braucht aber in keinem Punkt stetig zu sein. Die Funktion

$$f(z) = \begin{cases} z, & x \text{ und } y \text{ rational,} \\ f_3(z), & \text{in jedem anderen Punkte,} \end{cases}$$

wo $f_3(z)$ die obige Bedeutung hat, besitzt die besagte Eigenschaft.

9°. Wir fügen noch einen Satz über den *Grad der Approximation* hinzu:

Es sei die Funktion $F(z)$ auf einer Jordanschen Kurve C definiert. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß Polynome n -ten

¹⁴⁾ Walsh, Math. Annalen, loc. cit.

Grades $V_n(z)$ existieren, $n = 0, 1, 2, \dots$, derartig, daß die Ungleichheit

$$(7) \quad |F(z) - V_n(z)| < \frac{B}{R^n},$$

$B, R > 1$, konstant und von n, z unabhängig,

für sämtliche z auf C befriedigt sei, besteht darin, daß eine auf und im Inneren von C regulär-analytische Funktion $F(z)$ existiere, die auf C mit der gegebenen Funktion $F(z)$ übereinstimmt.

Wenn die Ungleichheit (7) für sämtliche z auf C befriedigt ist, so existiert natürlich eine im Inneren von C reguläre, im entsprechenden abgeschlossenen Bereiche stetige Funktion $f(z)$, die auf C mit der gegebenen Funktion $F(z)$ übereinstimmt, so daß (7) für alle z im abgeschlossenen Bereiche befriedigt ist; die Funktion $F(z)$ ist bloß die Grenzfunktion der Folge $V_n(z)$.

Das Wesentliche dieses Satzes findet sich schon bei Szegő¹⁵⁾, obgleich nicht ausdrücklich betont, aber nur für den Fall, daß die Kurve C analytisch ist.

Wir geben den Beweis dieses Satzes, wenn die Kurve C der Einheitskreis ist. Einerseits ist, wenn die Funktion $F(z)$ auf und im Inneren von C regulär-analytisch ist, $F(z)$ regulär-analytisch in einem mit C konzentrischen, aber größeren Kreis, und die Abschnitte $V_n(z)$ der Taylorschen Entwicklung um den Nullpunkt von $F(z)$ befriedigen die Bedingung (7). Andererseits bekommt man für die Taylorschen Koeffizienten c_n von $F(z)$, wenn $F(z)$ auf C gegeben ist, so daß (7) befriedigt ist,

$$(8) \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) z^{-n-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C [F(z) - V_{n-1}(z)] z^{-n-1} dz,$$

$$|c_n| \leq \frac{B}{R^{n-1}}.$$

Aus (8) folgt unmittelbar, daß die Taylorsche Entwicklung der vorher beschriebenen Funktion $f(z)$ in einem Kreis vom Radius ϱ ($1 < \varrho < R$) gleichmäßig konvergiert. Die Funktion $F(z)$ ist daher auf C regulär-analytisch.

¹⁵⁾ Math. Zeitschr. 9 (1921), S. 218–270, insbesondere S. 263–267; der Beweis dafür, daß die besagte Bedingung hinreichend ist, stammt im wesentlichen von Fejér her.

Dieses Resultat wurde, wenn C eine Ellipse ist, von S. Bernstein schon früher bewiesen: Mémoires Acad. Roy. de Belgique, Cl. des Sc. (2) 4 (1912), Sätze 24, 61.

Für den Kreis vgl. auch de la Vallée-Poussin, loc. cit. Ch. VIII, IX.

(Bemerkung bei der Korrektur.) Siehe auch eine Arbeit von Walsh, Münchner Berichte, 1926.

Dieser soeben gegebene Beweis stammt im wesentlichen von Szegö; er gilt fast unverändert für irgendeine analytische Jordansche Kurve C , wenn man nicht mehr die Taylorsche Entwicklung, sondern die Entwicklung nach den zur Kurve C gehörenden Polynomen $P_n(z)$ (von Szegö) gebraucht.

Der Satz erstreckt sich aber bis zur allgemeinsten Jordanschen Kurve C . Die besagte Bedingung ist hinreichend. Die Funktion $F(z)$ ist auf und im Inneren von C regulär-analytisch, darum in einem größeren abgeschlossenen Bereiche regulär-analytisch, der aus einer außerhalb C liegenden *analytischen* Jordanschen Kurve C_1 und ihrem Inneren besteht. Eine Folge von Polynomen existiert mit der Eigenschaft (7) für jedes z auf und im Inneren von C_1 , infolgedessen für jedes z auf und im Inneren von C .

Die Bedingung ist notwendig. Es gibt nach einem Satz von Carathéodory¹⁶⁾ außerhalb bzw. innerhalb C liegende *analytische* Jordansche Kurven C_1 und C_2 , so daß das Äußere von C_1 bzw. C_2 auf das Äußere des Kreises $|u| = \rho$ bzw. $|u| = 1$ ($1 < \rho < R$) abgebildet wird durch eine und dieselbe Transformation $u = \varphi(z)$, wobei $\varphi(\infty) = \infty$ ist. Die Entwicklung der schon definierten Funktion $f(z)$ nach den zu C_2 gehörenden Polynomen $P_n(z)$ von Szegö konvergiert gleichmäßig im abgeschlossenen Bereiche, welcher aus der Kurve C_1 und ihrem Inneren besteht, wegen der zu (8) entsprechenden Abschätzung. Der Satz ist also vollständig bewiesen.

Der Satz von Carathéodory und folglich auch unser Satz (mit dem obigen Beweis) gilt für allgemeinere Bereichsgrenzen als Jordansche Kurven.

Wir greifen den folgenden Satz heraus:

Es sei die Punktmenge C die volle Grenze eines beschränkten (ev. mehrfach zusammenhängenden) Bereiches B , und es sei die Funktion $F(z)$ auf C definiert. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß Polynome n -ten Grades $V_n(z)$ existieren, $n = 0, 1, 2, \dots$, derartig, daß die Ungleichheit (7) für sämtliche z auf C befriedigt sei, besteht darin, daß eine im abgeschlossenen Inneren von C regulär-analytische Funktion $F(z)$ existiere, die auf C mit der gegebenen Funktion $F(z)$ übereinstimmt. Hier heißt das abgeschlossene Innere von C die Punktmenge \bar{C} aller Punkte, deren keiner sich mit dem Punkt ∞ durch einen Streckenzug verbinden läßt, der keinen Punkt von C enthält. Diese Punktmenge \bar{C} ist also abgeschlossen; jeder Punkt von C selbst gehört dazu.

¹⁶⁾ Math. Annalen 72 (1912), S. 107–144, Kap. III.

Die Bedingung ist hinreichend. Die Funktion $F(z)$ ist auf und innerhalb einer Jordanschen Kurve analytisch, welche jeden Punkt des abgeschlossenen Inneren von C enthält¹⁷⁾. Polynome existieren also, welche die Eigenschaft (7) für alle zu \bar{C} gehörenden Punkte z besitzen.

Die Bedingung ist auch notwendig. Die zu \bar{C} komplementäre Menge (in bezug auf die ganze Ebene) ist ein Bereich, dessen Grenze zur Punktmenge C gehört. Der Satz von Carathéodory und seine Anwendung gelten also wie vorher, wenn B einfach zusammenhängend ist. Wenn der Bereich B nicht einfach zusammenhängend ist, so ist noch eine kurze Erörterung nötig. Die Punktmenge B' , die aus den Punkten von B und den Punkten des Inneren jedes ganz in B liegenden Polygons besteht, ist ein einfach zusammenhängender Bereich, von welchem jeder Grenzpunkt auch ein Grenzpunkt von B ist. Das abgeschlossene Innere der Grenze von B' fällt mit dem abgeschlossenen Inneren \bar{C} der Grenze von B zusammen und enthält natürlich jeden Punkt der Bereiche B und B' . Die Grenzfunktion $f(z)$ der Folge $V_n(z)$ ist auf der ganzen Punktmenge \bar{C} definiert, und die Ungleichheit (7) gilt für $f(z)$ statt $F(z)$ für jeden Punkt z von \bar{C} . Wir gebrauchen den Bereich B' statt B in der Anwendung des Satzes von Carathéodory.

¹⁷⁾ Vgl. Walsh, Math. Annalen, loc. cit., Bemerkung 3.

(Eingegangen am 26. 1. 1926.)