

Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik. III.

Von

L. E. J. Brouwer in Amsterdam.

Wohlordnung.

§ 1. Die *wohlgeordneten Spezies* sind geordnete Spezies, welche auf Grund der folgenden Festsetzungen definiert sind:

1. Ein beliebiges Element einer wohlgeordneten Spezies ist entweder ein als „*Vollelement*“ zu bezeichnendes *Element erster Art*, oder ein als „*Nullelement*“ zu bezeichnendes *Element zweiter Art*.

2. Eine Spezies mit einem einzigen Elemente wird, nachdem man dieses Element entweder mit dem Prädikate eines Vollelementes oder mit dem Prädikate eines Nullelementes versehen hat, zu einer wohlgeordneten Spezies, und wird als solche insbesondere als *Urspezies* bezeichnet.

3. Aus bekannten wohlgeordneten Spezies werden weitere wohlgeordnete Spezies hergeleitet durch die *erste erzeugende Operation*, welche in der Addition einer nicht verschwindenden endlichen Anzahl, und durch die *zweite erzeugende Operation*, welche in der Addition einer Fundamentalreihe von bekannten wohlgeordneten Spezies besteht.

Jede wohlgeordnete Spezies, welche bei der Herstellung der wohlgeordneten Spezies F nach dem vorigen Absatz eine Rolle gespielt hat, heißt eine *konstruktive Unterspezies* von F . Diejenigen konstruktiven Unterspezies, welche bei der letzten erzeugenden Operation von F eine Rolle gespielt haben, heißen *konstruktive Unterspezies erster Ordnung* von F und werden durch einen Index ν voneinander unterschieden, also mit F_1, F_2, \dots, F_m bzw. mit F_1, F_2, F_3, \dots bezeichnet. Die konstruktiven Unterspezies erster Ordnung eines F_ν heißen *konstruktive Unterspezies zweiter Ordnung* von F und werden mit $F_{\nu 1}, F_{\nu 2}, \dots, F_{\nu m}$ bzw. mit $F_{\nu 1}, F_{\nu 2}, F_{\nu 3}, \dots$ bezeichnet. Die konstruktiven Unterspezies erster Ordnung eines $F_{\nu_1 \dots \nu_n}$ heißen *konstruktive Unterspezies $(n+1)$ -ter Ordnung* von F und werden mit $F_{\nu_1 \dots \nu_n 1}, F_{\nu_1 \dots \nu_n 2}, \dots, F_{\nu_1 \dots \nu_n m}$ bzw. mit $F_{\nu_1 \dots \nu_n 1}, F_{\nu_1 \dots \nu_n 2}, F_{\nu_1 \dots \nu_n 3}, \dots$

bezeichnet (F selbst gilt als *konstruktive Unterspezies nullter Ordnung* von F). Jede bei der Herstellung von F benutzte Urspezies erscheint in dieser Weise als *konstruktive Unterspezies endlicher Ordnung* von F (obgleich es natürlich möglich ist, daß diese Ordnung für passend gewählte Urspezies von F unbeschränkt wächst). Um dies einzusehen, braucht man nur die *induktive Methode* anzuwenden, d. h. zu bemerken, daß die betreffende Eigenschaft für Urspezies erfüllt ist, daß, wenn $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_m$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation und $\xi' = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{m-1}$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation ist ($m \geq 2$), die betreffende Eigenschaft, wenn sie für $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ sowie für ξ' gilt, ebenfalls für ξ besteht, und schließlich, daß, wenn $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation ist, die betreffende Eigenschaft, wenn sie für jedes ξ_v gilt, ebenfalls für ξ besteht.

Mittels der induktiven Methode ersieht man, daß für eine beliebige wohlgeordnete Spezies F sowohl die Spezies der Indizesreihen der Elemente wie die Spezies der Indizesreihen der konstruktiven Unterspezies eine abtrennbare Teilspezies der Spezies der endlichen Nummernreihen bildet; weiter, daß für eine beliebige konstruktive Unterspezies F_{r_1, \dots, r_n} von F die Kardinalzahl der F_{r_1, \dots, r_n} bekannt ist.

Wir heben hervor, daß die Definition einer bestimmten wohlgeordneten Spezies F *auf der Erzeugung von F beruht* (mithin insbesondere die Bestimmung der Indizesreihen der einzelnen Elemente in sich schließt), daß also die Bestimmung der Elemente von F und der zwischen denselben bestehenden ordnenden Relationen zur Festlegung der Definition von F im allgemeinen nicht ausreicht.

Offenbar ist jede wohlgeordnete Spezies diskret und mithin vollständig geordnet.

Die ordnungsgemäße Summe einer wohlgeordneten Spezies von wohlgeordneten Spezies liefert in auf der Hand liegender Weise wiederum eine wohlgeordnete Spezies, welche auch kurz als die ordnungsgemäße Summe der von den Summanden dargestellten wohlgeordneten Spezies bezeichnet wird.

Zwei wohlgeordnete Urspezies F' und F'' besitzen *denselben Erzeugungswert* oder heißen *erzeugungsgleich*, wenn das einzige Element, aus dem jede von ihnen besteht, entweder für beide ein Vollelement oder für beide ein Nullelement ist.

Zwei wohlgeordnete Spezies F' und F'' heißen *erzeugungsgleich*, wenn für ein beliebiges ν die konstruktiven Unterspezies erster Ordnung F'_ν und F''_ν entweder beide nicht existieren oder beide existieren und erzeugungsgleich sind. In diesem Falle sind, wie man mittels der induktiven Methode ersieht, die Spezies der Indizesreihen der konstruktiven Unterspezies

von F' und von F'' identisch. Wenn umgekehrt die letztere Eigenschaft besteht, und überdies jedem Vollelemente bzw. Nullelemente von F' ein Vollelement bzw. Nullelement der gleichen Indizesreihe von F'' entspricht, dann ergibt die induktive Methode an der Hand der Erzeugung von F' , daß zu jeder konstruktiven Unterspezies von F' eine mit ihr erzeugungsgleiche und die gleiche Spezies der Indizesreihen der konstruktiven Unterspezies besitzende konstruktive Unterspezies von F'' existiert, so daß insbesondere F' sich als mit F'' erzeugungsgleich herausstellt.

Zwei wohlgeordnete Spezies (oder Teilspezies von wohlgeordneten Spezies) F' und F'' besitzen *denselben Ordnungswert* oder heißen *gleichwertig*, und wir schreiben $F' \sim F''$, wenn zwischen ihnen eine solche Ähnlichkeitskorrespondenz besteht, daß dabei immer Vollelemente mit Vollelementen und Nullelemente mit Nullelementen korrespondieren. Wenn F' und F'' gleichwertig sind, besteht ein Gesetz, auf Grund dessen aus der Indizesreihe eines Elementes von F' bzw. F'' die Indizesreihe des korrespondierenden Elementes von F'' bzw. F' hergeleitet werden kann.

Zwei wohlgeordnete Spezies (oder Teilspezies von wohlgeordneten Spezies) F' und F'' heißen *inhaltsgleich*, wenn die Spezies der Vollelemente von F' und die Spezies der Vollelemente von F'' ähnlich sind.

Es sei a ein Element der wohlgeordneten Spezies F , das in F die Indizes i_1, i_2, \dots, i_m besitzt. Alsdann geht in leicht ersichtlicher, eindeutiger Weise aus der Erzeugung von F als wohlgeordneter Spezies die Erzeugung einer bestimmten, die a in F nicht vorangehenden Elemente von F als Elemente besitzenden und zwischen denselben die gleichen ordnenden Relationen wie F aufweisenden, wohlgeordneten Spezies ${}_aF$ hervor, wobei von einem beliebigen Elemente von ${}_aF$ der erste Index in ${}_aF$ um $i_1 - 1$ niedriger ist als in F , von einem beliebigen, in F den ersten Index i_1 besitzenden Elemente von ${}_aF$ der zweite Index in ${}_aF$ um $i_2 - 1$ niedriger ist als in F , von einem beliebigen, in F die beiden ersten Indizes i_1 und i_2 besitzenden Elemente von ${}_aF$ der dritte Index in ${}_aF$ um $i_3 - 1$ niedriger ist als in F , ..., von einem beliebigen, in F die $m - 1$ ersten Indizes i_1, i_2, \dots, i_{m-1} besitzenden Elemente von ${}_aF$ der m -te Index in ${}_aF$ um $i_m - 1$ niedriger ist als in F , während alle weiteren Indizes der Elemente von ${}_aF$ in ${}_aF$ die gleichen sind wie in F . Wir nennen die wohlgeordnete Spezies ${}_aF$ einen *Rest* der wohlgeordneten Spezies F .

In analoger Weise geht, wenn a nicht das erste Element von F ist, aus der Erzeugung von F als wohlgeordneter Spezies die Erzeugung einer bestimmten, die a in F vorangehenden Elemente von F als Elemente besitzenden und zwischen denselben die gleichen ordnenden Relationen wie in F aufweisenden, wohlgeordneten Spezies F_a hervor, wobei von den Ele-

menten von F_a alle Indizes in F_a die gleichen sind wie in F . Wir nennen die wohlgeordnete Spezies F_a einen *Abschnitt* der wohlgeordneten Spezies F . Wir schreiben auch ${}_aF \sim F - F_a$ und bezeichnen ${}_aF$ als die *Differenz* von F und F_a . Unter den Abschnitten von F rechnen wir F selbst als uneigentlichen Abschnitt mit.

Es seien a und b zwei verschiedene Elemente der wohlgeordneten Spezies F , und es sei $a < b$. Alsdann geht aus der Erzeugung von F als wohlgeordneter Spezies die Erzeugung einer bestimmten, die a in F nicht vorangehenden, aber b in F vorangehenden Elemente von F als Elemente besitzenden und zwischen denselben die gleichen ordnenden Relationen wie in F aufweisenden, wohlgeordneten Spezies ${}_aF_b$ hervor, wobei von den Elementen von ${}_aF_b$ alle Indizes in ${}_aF_b$ die gleichen sind wie in ${}_aF$. Wir nennen die wohlgeordnete Spezies ${}_aF_b$ einen *Ausschnitt* der wohlgeordneten Spezies F . Unter den Ausschnitten von F rechnen wir die Reste von F als uneigentliche Ausschnitte mit.

Wenn die wohlgeordneten Spezies F' und F'' gleichwertig sind, so korrespondieren für die Gleichwertigkeitskorrespondenz mit den Ausschnitten von F' Ausschnitte von F'' , insbesondere also mit den konstruktiven Unterspezies von F' Ausschnitte von F'' .

Der Begriff eines *Restes* von F ist enger als derjenige eines *Endteiles* von F , d. h. einer solchen abtrennbaren Teilspezies von F , zu der alle auf eines ihrer Elemente folgenden Elemente ebenfalls gehören. Ebenso ist der Begriff eines *Abschnittes* von F enger als derjenige eines *Anfangsteiles* von F , d. h. einer solchen abtrennbaren Teilspezies von F , zu der alle einem ihrer Elemente vorangehenden Elemente ebenfalls gehören. Anfangsteile und Endteile von F brauchen nicht wohlgeordnet zu sein, sind aber, wie alle abtrennbaren Teilspezies von F , mit wohlgeordneten Spezies inhaltsgleich.

Wenn für eine Fundamentalreihe a_1, a_2, \dots von Elementen der wohlgeordneten Spezies F für jedes ν die Beziehung $a_\nu < a_{\nu+1}$ gilt, so sprechen wir von einer *steigenden Fundamentalreihe* von F . Wenn überdies a_ω ein derartiges Element von F ist, daß $a_\nu < a_\omega$ für jedes ν , während zu jedem Elemente $b < a_\omega$ von F ein $a_\nu > b$ angegeben werden kann, so heißt a_ω *Grenzelement* der steigenden Fundamentalreihe a_1, a_2, \dots . Wenn aber zu jedem beliebigen Elemente b von F ein $a_\nu > b$ angegeben werden kann, so heißt a_1, a_2, \dots eine *abschließende Fundamentalreihe* von F .

Eine durch eine endliche Anzahl oder durch eine abschließende Fundamentalreihe von verschiedenen Elementen von F zustande gebrachte ordnungsgemäße Teilung von F in eine endliche Anzahl bzw. in eine Fundamentalreihe von Ausschnitten ${}_1F, {}_2F, \dots, {}_mF$ bzw. ${}_1F, {}_2F, {}_3F, \dots$ heißt eine *reguläre Zerlegung* von F , und wir schreiben $F \sim {}_1F + {}_2F + \dots$

$+ {}_m F$ oder ${}_1 F + {}_2 F + \dots + {}_m F \sim F$ bzw. $F \sim {}_1 F + {}_2 F + {}_3 F + \dots$ oder ${}_1 F + {}_2 F + {}_3 F + \dots \sim F$.¹⁾

Sei F'_1, F'_2, \dots eine Fundamentalreihe, in welcher jedes F'_v entweder in Fortfall kommt oder eine wohlgeordnete Spezies vorstellt, wobei indes entweder eine steigende Fundamentalreihe $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$ definiert ist, so daß jedes F'_{ν_σ} eine wohlgeordnete Spezies vorstellt, oder ein m bekannt ist, so daß F'_v für $v > m$ in Fortfall kommt. Wenn dann $F_v = F'_1 + F'_2 + \dots + F'_v$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation, und $F = F'_1 + F'_2 + F'_3 + \dots$ auf Grund der ersten oder auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, so wird die wohlgeordnete Spezies F auch als $\lim_v F_v$ bezeichnet.

Mittels der induktiven Methode beweisen wir leicht folgende Sätze:

1. *Ein Gesetz, welches in einer wohlgeordneten Spezies F eine konstruktive Unterspezies F' bestimmt und jeder schon bestimmten konstruktiven Unterspezies $F^{(v)}$ entweder die Hemmung des Prozesses oder eine in F vor $F^{(v)}$ liegende konstruktive Unterspezies $F^{(v+1)}$ zuordnet, bestimmt sicher eine natürliche Zahl n und eine zugehörige konstruktive Unterspezies $F^{(n)}$, der es die Hemmung des Prozesses zuordnet. Insbesondere gilt diese Eigenschaft, wenn jedes $F^{(v)}$ ein Element von F ist, und hieraus folgern wir unmittelbar die Unmöglichkeit der Ähnlichkeit und insbesondere der Gleichwertigkeit von F und einer Teilspezies eines eigentlichen Abschnittes von F .*

2. *Eine wohlgeordnete Spezies F ist entweder endlich oder abzählbar unendlich, und die Spezies ihrer Vollelemente ist zählbar. Mithin ist die Spezies derjenigen Nummernreihen, welche als Indizesreihe eines Vollelementes von F auftreten können, eine Menge, so daß in dieser Weise zu jeder wohlgeordneten Spezies eine zählbare vollständig geordnete Menge von endlichen Nummernreihen gehört, welche die Eigenschaft besitzt, daß jedes Gesetz, welches in ihr eine Nummernreihe z' bestimmt, und jeder schon bestimmten Nummernreihe $z^{(v)}$ entweder die Hemmung des Prozesses oder eine vor $z^{(v)}$ liegende Nummernreihe $z^{(v+1)}$ zuordnet, sicher eine natürliche Zahl n und eine zugehörige Nummernreihe $z^{(n)}$, der die Hemmung des Prozesses zugeordnet ist, bestimmt.*

¹⁾ Offenbar ist auf Grund dieser Gleichungen F nicht eindeutig durch die „ F “ bestimmt. Weiter ist zu bemerken, daß jedes Element von F in ${}_1 F + {}_2 F + \dots + {}_m F$ bzw. in ${}_1 F + {}_2 F + {}_3 F + \dots$ eine um 1 höhere Anzahl Indizes besitzt als in F . In Übereinstimmung hiermit schreiben wir insbesondere $F \sim G$ oder $G \sim F$, wenn $F \rightarrow G$ oder $G \leftarrow F$, d. h. wenn G aus F hervorgeht, indem wir auf F die erste erzeugende Operation mit nur einem einzigen Summanden anwenden, also der Indizesreihe eines jeden Elementes von F den Index 1 als ersten Index hinzufügen.

3. In der wohlgeordneten Spezies F existiert erstens ein erstes Element, zweitens entweder ein letztes Element oder eine abschließende Fundamentalreihe von Elementen. Weiter existiert entweder keine letzte konstruktive Unterspezies nichtverschwindender Ordnung oder eine nicht verschwindende endliche Anzahl m von solchen, nämlich von den Ordnungen $1, 2, \dots, m$ je eine.

4. In der wohlgeordneten Spezies F besitzt jedes Element e , mit Ausnahme des ersten, entweder ein ihm unmittelbar vorangehendes Element, oder es ist Grenzelement einer steigenden Fundamentalreihe von Elementen von F . Schreiben wir nämlich $F \sim F_e + {}_eF$, so ist dieser Satz eine unmittelbare Folge des auf F_e angewandten Satzes 3.

5. In der wohlgeordneten Spezies F besitzt jedes Element, mit Ausnahme des letzten, falls ein solches existiert, ein nächstfolgendes Element.

Wenn die wohlgeordnete Spezies F' einem wenigstens ein Vollelement auslassenden Abschnitt der wohlgeordneten Spezies F'' gleichwertig ist, so schreiben wir $F' < F''$ oder $F'' > F'$, und sagen, daß F'' größer ist als F' , und daß F' kleiner ist als F'' . Schreiben wir noch $F' \leq F''$ oder $F'' \geq F'$, wenn entweder $F' \sim F''$ gilt oder F' einem Abschnitte von F'' gleichwertig ist, so gelangen wir, indem wir die Folgerung des obigen Satzes 1 berücksichtigen, sofort zu den folgenden Eigenschaften:

1. Die Relationen $F' < F''$ und $F'' \geq F'$ schließen einander aus.
2. Aus $F' < F''$ und $F'' \leq F'''$ sowie aus $F' \leq F''$ und $F'' < F'''$ folgt $F' < F'''$.
3. Aus $F' \sim F''$ und $F'' \sim F'''$ folgt $F' \sim F'''$.
4. Aus $F' \leq F''$ und $F'' \leq F'''$ folgt $F' \leq F'''$.
5. Die Relationen $F' \leq F''$ und $G' < G''$ schließen zusammen die Relation $F' + G' \geq F'' + G''$ aus.
6. Die Relationen $F' \leq F''$ und $G' \leq G''$ schließen zusammen die Relation $F' + G' > F'' + G''$ aus.

Eine wohlgeordnete Spezies, welche ausschließlich Vollelemente enthält, nennen wir *vollständig*. Die Ordinalzahlen der vollständigen wohlgeordneten Spezies nennen wir *Ordnungszahlen*.

Die Spezies derjenigen Ordnungszahlen, welche kleiner sind als eine gegebene Ordnungszahl β , besitzt (wenn sie nach der Größe ihrer Elemente geordnet und 0 mit hinzugerechnet wird) die Ordinalzahl β . Zwischen den vom ersten verschiedenen Elementen und den eigentlichen Abschnitten einer vollständigen wohlgeordneten Spezies V der Ordnungszahl β besteht nämlich eine solche eindeutige Beziehung, daß, wenn das Element e_2 nach dem Elemente e_1 liegt, der Abschnitt V_{e_2} größer als der Abschnitt V_{e_1} ist.

Wir nennen eine wohlgeordnete Spezies *quasi-vollständig*, wenn zu einem beliebigen Nullelement e_0 entweder ein erstes auf e_0 folgendes Vollelement angegeben werden kann oder feststeht, daß keine auf e_0 folgenden Vollelemente existieren; zu einem beliebigen Vollelement e_1 entweder ein erstes e_1 vorangehendes und durch kein Vollelement von e_1 getrenntes Nullelement angegeben werden kann, oder feststeht, daß keine e_1 vorangehenden und durch kein Vollelement von e_1 getrennten Nullelemente existieren; und entweder ein erstes Nullelement, auf welches nur noch Nullelemente folgen, angegeben werden kann, oder feststeht, daß keine Nullelemente, auf welche nur noch Nullelemente folgen, existieren.

Die Ausschnitte und Reste einer quasi-vollständigen wohlgeordneten Spezies sind offenbar ebenfalls quasi-vollständig.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Quasi-Vollständigkeit einer wohlgeordneten Spezies besteht darin, daß während ihrer Erzeugung bei jeder durch eine Formel $F' = F'_1 + F'_2 + F'_3 + \dots$ ausgedrückten Anwendung der zweiten erzeugenden Operation die betreffende Fundamentalreihe *elementar induziert* ist, d. h. entweder eine Fundamentalreihe von unbeschränkt wachsenden natürlichen Zahlen m_1, m_2, m_3, \dots bestimmt ist, so daß in jedem F'_{m_ν} ein Vollelement angegeben werden kann, oder eine natürliche Zahl m besteht, so daß F'_ν für $\nu > m$ lauter Nullelemente enthält. Hieraus folgern wir mittels der induktiven Methode weiter, daß zu einem beliebigen Elemente e einer quasi-vollständigen wohlgeordneten Spezies, mit Ausnahme des ersten, entweder ein erstes e vorangehendes und durch kein Vollelement von e getrenntes Nullelement, oder eine e als Grenzelement besitzende steigende Fundamentalreihe von Vollelementen, oder aber ein e unmittelbar vorangehendes Vollelement angegeben werden kann, während entweder ein erstes Nullelement, auf welches nur noch Nullelemente folgen, oder eine abschließende Fundamentalreihe von Vollelementen, oder aber ein letztes Element, das ein Vollelement ist, existiert.

Mittels der induktiven Methode ersieht man leicht, daß die Spezies der Vollelemente einer quasi-vollständigen wohlgeordneten Spezies F' entweder elementlos ist oder ein angebbares Element besitzt, während im letzteren Falle eindeutig eine „ F' entsprechende“ oder „mit F' korrespondierende“, mit F' inhaltsgleiche vollständige wohlgeordnete Spezies F'' bestimmt ist. Sei nämlich $F' = F'_1 + F'_2 + \dots$ auf Grund der ersten oder auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, und seien im Falle, daß F' ein angebbares Vollelement besitzt, $F'_{\nu_1}, F'_{\nu_2}, \dots$ diejenigen (endlich- oder abzählbarunendlichvielen) unter den F'_ν , welche je ein angebbares Vollelement und im Anschluß daran eine *entsprechende* vollständige wohl-

geordnete Spezies F''_{v_a} besitzen. Alsdann ist $F'' = F''_{v_1} + F''_{v_2} + \dots$ auf Grund der ersten oder auf Grund der zweiten erzeugenden Operation.

Dagegen ist nicht jede mit einer vollständigen inhaltsgleiche wohlgeordneten Spezies F auch quasi-vollständig, und zwar schon deshalb nicht, weil ihre konstruktiven Unterspezies nicht mit vollständigen wohlgeordneten Spezies inhaltsgleich zu sein brauchen, wie aus folgendem Beispiel hervorgeht: es werde k_1 in üblicher Weise (vgl. z. B. Math. Ann. 93, S. 255) definiert und es sei $F_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$, wo a_v für $v \geq k_1$ ein Nullelement, sonst ein Vollelement ist; $F_2 = b_1 + b_2 + b_3 + \dots$, wo b_v für $v = k_1$ ein Vollelement, sonst ein Nullelement ist; $F_3 = c_1 + c_2 + c_3 + \dots$, wo c_v für $v > k_1$ ein Vollelement, sonst ein Nullelement ist; $F = F_1 + F_2 + F_3$.

Einer quasi-vollständigen wohlgeordneten Spezies sprechen wir die gleiche Ordnungszahl zu, wie den vollständigen wohlgeordneten Spezies, mit denen sie inhaltsgleich ist. Den ausschließlich Nullelemente enthaltenden wohlgeordneten Spezies sprechen wir die Ordnungszahl *Null* zu. Die ordnungsgemäße Summe einer „der ersten erzeugenden Operation unterzogenen“ endlichen Folge von Ordnungszahlen wird mittels der ordnungsgemäßen Summe entsprechender vollständiger bzw. (im Falle der Ordnungszahl Null) nur ein einziges Nullelement enthaltender wohlgeordneter Spezies wiederum als Ordnungszahl definiert. (Das gleiche Resultat wird erhalten, wenn im Falle, daß alle Summanden gleich Null sind, auch die Summe gleich Null gesetzt wird, und im entgegengesetzten Falle nur die von Null verschiedenen Summanden beibehalten werden).

Eine wohlgeordnete Spezies heißt *basiert*, wenn ihr erstes Element ein Vollelement ist.

Eine wohlgeordnete Spezies F heißt *kondensiert*, wenn sie einen (eigentlichen oder uneigentlichen) Abschnitt der Ordnungszahl 1 besitzt. Der vom auf das erste Vollelement von F folgenden Elemente bestimmte Rest von F heißt *Hauptrest* von F und wird mit $h(F)$ bezeichnet. Selbstverständlich kann $h(F)$ auch in Fortfall kommen.

Bei der Multiplikation von endlichvielen elementfremden wohlgeordneten Spezies erteilen wir das Prädikat eines Vollelementes nur denjenigen Elementen des Produktes, welche aus lauter Vollelementen der Faktoren bestehen; alle anderen Elemente des Produktes erhalten das Prädikat eines Nullelementes. Mittels der induktiven Methode an der Hand der Erzeugung des rechtsseitigen Faktors ersehen wir, daß das Produkt zweier elementfremder wohlgeordneter Spezies in auf der Hand liegender Weise wiederum eine wohlgeordnete Spezies liefert, welche auch kurz als das Produkt der von den Faktoren dargestellten wohlgeordneten Spezies bezeichnet wird. Diese Erweiterung des Produktbegriffes läßt sich

unmittelbar auf das Produkt endlichvieler elementefremder wohlgeordneter Spezies ausdehnen. Erzeugungsgleiche bzw. gleichwertige bzw. inhaltsgleiche Faktoren liefern dabei erzeugungsgleiche bzw. gleichwertige bzw. inhaltsgleiche Produkte. Das Produkt endlichvieler Ordnungszahlen wird mittels des Produktes entsprechender vollständiger bzw. (im Falle der Ordnungszahl Null) nur ein einziges Nullelement enthaltender wohlgeordneter Spezies wiederum als Ordnungszahl definiert.

Man beweist ohne Schwierigkeit, daß das Produkt zweier quasi-vollständiger Faktoren wiederum quasi-vollständig ist und inhaltsgleich mit dem Produkte der vollständigen bzw. nur ein einziges Nullelement enthaltenden wohlgeordneten Spezies, mit denen seine Faktoren inhaltsgleich sind, so daß die Ordnungszahl des Produktes gleich dem Produkte der Ordnungszahlen der Faktoren ist. Mithin gilt dasselbe für das Produkt endlichvieler quasi-vollständiger Faktoren.

§ 2. Unter den *Ordnungszahlen des ersten Bereichs* verstehen wir die endlichen Ordnungszahlen, mit Einschluß der Ordnungszahl *Null*.

Unter einer *Spezies des ersten Bereichs* verstehen wir eine (vollständige oder quasi-vollständige) wohlgeordnete Spezies, welche eine Ordnungszahl des ersten Bereichs besitzt.

Offenbar ist jede Spezies des ersten Bereichs, deren Ordnungszahl von Null verschieden ist, kondensiert.

Zwei beliebige Ordnungszahlen des ersten Bereichs sind *vergleichbar*, d. h. wenn die Relationen $>$, $=$, \leq zwischen zwei nicht verschwindenden Ordnungszahlen dann gelten sollen, wenn sie für die entsprechenden vollständigen wohlgeordneten Spezies gelten, und die Ordnungszahl Null als kleiner als die Ordnungszahl einer beliebigen vollständigen Spezies des ersten Bereichs gelten soll, dann sind zwei beliebige Ordnungszahlen des ersten Bereichs entweder einander gleich oder eine von ihnen ist größer als die andere. Überdies besitzen sie, wenn sie voneinander und von Null verschieden sind, eine gleichfalls zum ersten Bereich gehörende Differenz.

Die ordnungsgemäße Summe und das Produkt endlichvieler Ordnungszahlen des ersten Bereichs sind wiederum Ordnungszahlen des ersten Bereichs.

Eine Fundamentalreihe β_1, β_2, \dots von Ordnungszahlen des ersten Bereichs heißt *induziert in bezug auf den ersten Bereich*, wenn entweder eine Fundamentalreihe von unbeschränkt wachsenden natürlichen Zahlen m_1, m_2, m_3, \dots bestimmt ist, so daß jedes β_{m_v} von Null verschieden ist, oder eine natürliche Zahl m besteht, so daß β_v für $v > m$ gleich Null ist.

Wenn wir die ordnungsgemäße Summe einer „der zweiten erzeugenden Operation unterzogenen“ in bezug auf den ersten Bereich induzierten Fun-

damentalreihe von Ordnungszahlen des ersten Bereichs mittels der ordnungsgemäßen Summe entsprechender vollständiger bzw. aus nur einem einzigen Nullelement bestehender wohlgeordneter Spezies definieren (das gleiche — auf eine beliebige elementar induzierte Fundamentalreihe von Ordnungszahlen erweiterbare — Resultat wird erhalten, wenn wir im Falle, daß alle Summanden gleich Null sind, auch die Summe gleich Null setzen und im entgegengesetzten Falle nur die von Null verschiedenen Summanden beibehalten), dann erweist sich diese Summe wiederum als eine Ordnungszahl, und zwar ist dieselbe entweder gleich ω oder gehört wiederum dem ersten Bereiche an.

Wir formulieren folgende vier evidente Eigenschaften:

1. Zu einer beliebigen von Null verschiedenen Ordnungszahl des ersten Bereichs gehört sicher ein vollständiger Erzeugungswert, der *vollständig induziert in bezug auf den ersten Bereich* ist, d. h. dessen konstruktive Unterwerte alle Ordnungszahlen des ersten Bereichs besitzen und für den bei jeder Anwendung der zweiten erzeugenden Operation die betreffende Fundamentalreihe von Ordnungszahlen in bezug auf den ersten Bereich induziert ist.

2. Jeder beliebige Abschnitt einer Ordnungszahl des ersten Bereichs gehört ebenfalls dem ersten Bereiche an, was wir kurz folgendermaßen ausdrücken:

Der erste Bereich der Ordnungszahlen ist ununterbrochen.

3. Eine Fundamentalreihe $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ von Ordnungszahlen des ersten Bereichs, deren (in der im vorigen schon mehrfach angegebenen Weise definierte) ordnungsgemäße Summe entweder die Ordnungszahl ω oder eine Ordnungszahl des ersten Bereichs ist, ist induziert in bezug auf den ersten Bereich.

4. Ein beliebiger, zu einer Ordnungszahl des ersten Bereichs gehöriger Erzeugungswert ist vollständig induziert in bezug auf den ersten Bereich (um dies für einen quasi-vollständigen Erzeugungswert zu zeigen, setzen wir denselben zum entsprechenden vollständigen Erzeugungswert in Beziehung).

Eine wohlgeordnete Spezies F heißt *unbestimmt zerlegt in bezug auf den ersten Bereich*, wenn sie in solcher Weise in einen (evtl. fortfallenden) Abschnitt F' und einen (evtl. fortfallenden) Rest F'' regulär zerlegt werden kann, daß jeder Rest von F' entweder aus lauter Nullelementen besteht oder einen mit ω inhaltsgleichen Anfangsteil besitzt, und F'' mit einer Spezies des ersten Bereichs inhaltsgleich ist (*mithin eine endliche Ordnungszahl besitzt*).

Eine wohlgeordnete Spezies F heißt *scharf zerlegt in bezug auf den ersten Bereich*, wenn sie in solcher Weise in einen (evtl. fortfallenden) Abschnitt F' und einen (evtl. fortfallenden) Rest F'' regulär zerlegt werden kann, daß jeder Rest von F' entweder aus lauter Nullelementen besteht oder die Ordnungszahl ω oder einen Abschnitt der Ordnungszahl ω besitzt und F'' eine Ordnungszahl des ersten Bereichs besitzt (hierbei können wir, ohne der wohlgeordneten Spezies F eine weitere Einschränkung aufzuerlegen, überdies fordern, daß F' entweder in Fortfall kommt oder wenigstens ein Vollelement enthält).

Eine quasi-vollständige wohlgeordnete Spezies F ist, wie man unter Verwendung des S. 457, Z. 13 bis 21 erwähnten Satzes mittels der induktiven Methode einsieht, unbestimmt zerlegt in bezug auf den ersten Bereich, dagegen nicht notwendig scharf zerlegt in bezug auf den ersten Bereich, wie aus folgendem Beispiel hervorgeht: Es bestehe F_ν für $\nu = k_1$ aus einer Fundamentalreihe von Vollelementen, sonst aus einem einzigen Vollelement, und es sei $F = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$.

Ebensowenig ist eine in bezug auf den ersten Bereich scharf zerlegte wohlgeordnete Spezies F notwendig quasi-vollständig, sogar nicht mit einer vollständigen inhaltsgleich, wie folgendes Beispiel zeigt: Es bestehe G_ν für $\nu \leq k_1$ aus einer Fundamentalreihe von Vollelementen, für $\nu = k_1 + 1$ und für $\nu = k_1 + 2$ aus einem einzigen Vollelement, für $\nu > k_1 + 2$ aus einem einzigen Nullelement, es sei $G = G_1 + G_2 + G_3 + \dots$, es bestehe H aus einer Fundamentalreihe von Vollelementen, und es sei $F = G + H$ (aus diesem Beispiel geht gleichzeitig hervor, daß die konstruktiven Unterspezies einer in bezug auf den ersten Bereich scharf zerlegten wohlgeordneten Spezies in bezug auf den ersten Bereich nicht einmal unbestimmt zerlegt zu sein brauchen).

Eine mit einer vollständigen inhaltsgleiche wohlgeordnete Spezies F ist nicht notwendig unbestimmt zerlegt in bezug auf den ersten Bereich, wie man aus folgendem Beispiel ersieht: Es bestehe F'_ν für $\nu \leq k_1 + 1$ aus einem Vollelement, sonst aus einem Nullelement, $F_\nu^{(\mu)}$ ($\mu > 1$) für $\nu = k_1 + \mu$ aus einem Vollelement, sonst aus einem Nullelement, es sei $F^{(\mu)}$ ($\mu = 1, 2, 3, \dots$) = $F_1^{(\mu)} + F_2^{(\mu)} + F_3^{(\mu)} + \dots$ und es sei $F = F' + F'' + F''' + \dots$ (vom Reste $F'' + F''' + \dots$ von F läßt sich hier weder behaupten, daß er aus lauter Nullelementen bestehe, noch daß er einen mit ω inhaltsgleichen Anfangsteil besitze).

Wir fügen noch ein Beispiel einer wohlgeordneten Spezies F hinzu, welche einerseits mit einer vollständigen inhaltsgleich, aber nicht quasi-vollständig, andererseits in bezug auf den ersten Bereich unbestimmt, aber nicht scharf zerlegt ist: Es bestehe $F_\nu^{(\mu)}$ ($\mu < k_1$) für $\nu = \mu$ aus einem Vollelement, sonst aus einem Nullelement, $F_\nu^{(\mu)}$ ($\mu = k_1$) für $\nu \geq k_1$ aus

einem Vollelement, sonst aus einem Nullelement, $F_v^{(\mu)}$ ($\mu > k_1$) aus einem Nullelement, es sei $F^{(\mu)} = F_1^{(\mu)} + F_2^{(\mu)} + F_3^{(\mu)} + \dots$ und es sei $F = F' + F'' + F''' + \dots$.

Eine wohlgeordnete Spezies F heißt *vollständig induziert in bezug auf den ersten Bereich*, wenn während ihrer Erzeugung bei jeder durch eine Formel $F_0 = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$ ausgedrückten Anwendung der zweiten erzeugenden Operation, wo jedes F_v nach der Formel $F_v \sim F'_v + F''_v$ in bezug auf den ersten Bereich scharf zerlegt ist, die betreffende Fundamentalreihe F_1, F_2, F_3, \dots in bezug auf den ersten Bereich induziert ist, d. h. *erstens* entweder eine unbeschränkt wachsende Fundamentalreihe $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$ existiert, so daß jedes F'_{ν_α} Vollelemente besitzt, oder ein solches m angegeben werden kann, daß F'_v für $v > m$ aus lauter Nullelementen besteht bzw. fortfällt, *zweitens* im letzteren Falle die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von $F''_1, F''_2, F''_3, \dots$ (wobei wir einem fortfallenden F''_v die Ordnungszahl Null zusprechen) in bezug auf den ersten Bereich induziert ist. Demzufolge ist dann jedesmal auch F_0 in bezug auf den ersten Bereich scharf zerlegt.

Sei $F_{i_1 i_2 \dots i_m}$ ein Element der in bezug auf den ersten Bereich vollständig induzierten wohlgeordneten Spezies F . Der Reihe nach ergibt sich, daß dieses Element in $F_{i_1 i_2 \dots i_{m-1}}$, in $F_{i_1 i_2 \dots i_{m-2}}, \dots$, in $F_{i_1 i_2}$, in F_{i_1} und in F je einen Abschnitt und einen Rest bestimmt, die in bezug auf den ersten Bereich gleichfalls vollständig induziert sind. Mithin haben wir den Satz, daß jeder Ausschnitt sowie jeder Rest einer in bezug auf den ersten Bereich vollständig induzierten wohlgeordneten Spezies F gleichfalls in bezug auf den ersten Bereich vollständig induziert ist.

Eine in bezug auf den ersten Bereich vollständig induzierte wohlgeordnete Spezies F ist offenbar *erstens* quasi-vollständig, *zweitens* scharf zerlegt in bezug auf den ersten Bereich²⁾. Schreiben wir, der scharfen Zerlegbarkeit von F in bezug auf den ersten Bereich entsprechend, $F \sim F' + F''$, so besitzt die wohlgeordnete Spezies F' , wenn sie nicht fortfällt, entweder einen Rest der Ordnungszahl ω , oder alle nichtverschwindenden Ordnungszahlen von Resten von F' sind größer als ω .³⁾

²⁾ Dagegen ist sogar eine sowohl vollständig wie in bezug auf den ersten Bereich scharf zerlegte wohlgeordnete Spezies nicht notwendig vollständig induziert in bezug auf den ersten Bereich, wie folgendes Beispiel zeigt: Es bestehe F_v für $v \leq k_1$ aus einer Fundamentalreihe von Vollelementen, für $v > k_1$ aus einem einzigen Vollelement, und es sei $F = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$.

³⁾ Die Aussage, daß eine in bezug auf den ersten Bereich vollständig induzierte wohlgeordnete Spezies F in bezug auf den ersten Bereich scharf zerlegt ist, bleibt auch dann richtig, wenn die Bedingungen für die scharfe Zerlegung dahin verschärft werden, daß im entsprechenden F' kein Nullelement, auf welches nur Nullelemente folgen, enthalten sein darf.

Sei F eine in bezug auf den ersten Bereich vollständig induzierte wohlgeordnete Spezies, welche mit der ordnungsgemäßen Summe einer Fundamentalreihe F_1, F_2, \dots von in bezug auf den ersten Bereich scharf zerlegten wohlgeordneten Spezies gleichwertig ist. Wir wollen beweisen, daß die Fundamentalreihe F_1, F_2, \dots in bezug auf den ersten Bereich induziert ist und bemerken dazu zunächst, daß für die wohlgeordnete Spezies F , eben weil sie in bezug auf den ersten Bereich vollständig induziert ist, eine der drei folgenden Eigenschaften bestehen muß: *Entweder* F besitzt einen Rest mit einer Ordnungszahl des ersten Bereichs (die auch Null sein kann), *oder* von einem gewissen Rest von F besitzt jeder Rest die Ordnungszahl ω , *oder aber* jeder Rest von F besitzt eine Ordnungszahl $> \omega$. Diese drei Fälle behandeln wir der Reihe nach.

Erster Fall. F besitzt einen Rest F^0 mit einer Ordnungszahl des ersten Bereichs. Für ein bestimmtes m besitzt dann F_m einen derartigen Rest F_{m2} , daß die ordnungsgemäße Summe der Fundamentalreihe $F_{m2}, F_{m+1}, F_{m+2}, \dots$ mit F^0 gleichwertig ist, so daß jedes Glied der letzteren Fundamentalreihe eine Ordnungszahl des ersten Bereichs besitzt und die Fundamentalreihe dieser Ordnungszahlen (eben weil ihre ordnungsgemäße Summe eine Ordnungszahl des ersten Bereichs ist) in bezug auf den ersten Bereich induziert ist. Dann aber gilt dasselbe für die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von F_{m+1}, F_{m+2}, \dots bzw. für die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von $F''_{m+1}, F''_{m+2}, \dots$, mithin auch für die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies F_{m+1}, F_{m+2}, \dots , mithin auch für die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies F_1, F_2, F_3, \dots .

Zweiter Fall. Vom Reste F^0 von F besitzt jeder Rest die Ordnungszahl ω . Für ein bestimmtes m besitzt dann F_m einen derartigen Rest F_{m2} , daß die ordnungsgemäße Summe der Fundamentalreihe $F_{m2}, F_{m+1}, F_{m+2}, \dots$ mit F^0 gleichwertig ist, so daß jedes Glied der letzteren Fundamentalreihe eine Ordnungszahl des ersten Bereichs besitzt und die Fundamentalreihe dieser Ordnungszahlen (eben weil ihre ordnungsgemäße Summe gleich ω ist) in bezug auf den ersten Bereich induziert ist. Dann aber gilt dasselbe für die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von F_{m+1}, F_{m+2}, \dots bzw. für die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von $F''_{m+1}, F''_{m+2}, \dots$, mithin auch für die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies F_{m+1}, F_{m+2}, \dots , mithin auch für die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies F_1, F_2, F_3, \dots .

Dritter Fall. Jeder Rest von F besitzt eine Ordnungszahl $> \omega$. Zu jedem m gibt es dann ein derartiges ν_m , daß für einen bestimmten (eigentlichen oder uneigentlichen) Abschnitt $F_{\nu_m}^0$ von F_{ν_m} die ordnungsgemäße Summe $F_m + F_{m+1} + \dots + F_{\nu_m-1} + F_{\nu_m}^0$ die Ordnungszahl ω besitzt, so

daß wenigstens eine der wohlgeordneten Spezies $F'_m, F'_{m+1}, \dots, F'_{v_m-1}, F'_{v_m}$ existiert und Vollelemente besitzt. Das heißt aber, daß es zu jedem m ein derartiges $\varrho_m \geq m$ gibt, daß F'_{ϱ_m} existiert und Vollelemente besitzt, so daß die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies F_1, F_2, F_3, \dots in bezug auf den ersten Bereich induziert ist.

Kombinieren wir den hiermit bewiesenen Satz mit der Eigenschaft, daß jeder Ausschnitt sowie jeder Rest einer in bezug auf den ersten Bereich vollständig induzierten wohlgeordneten Spezies gleichfalls in bezug auf den ersten Bereich vollständig induziert ist, so ergibt sich, daß jede mit einer in bezug auf den ersten Bereich vollständig induzierten wohlgeordneten Spezies F gleichwertige wohlgeordnete Spezies G ebenfalls in bezug auf den ersten Bereich vollständig induziert ist (und zwar mittels der induktiven Methode an der Hand der Erzeugung von G). Auf Grund dieser Eigenschaft *bezeichnen wir eine Ordnungszahl als in bezug auf den ersten Bereich vollständig induziert, wenn jeder zu ihr gehörige vollständige Erzeugungswert in bezug auf den ersten Bereich vollständig induziert ist.*

Dann aber ist auch jeder zu ihr gehörige quasi-vollständige Erzeugungswert in bezug auf den ersten Bereich vollständig induziert. Sei nämlich β ein solcher quasi-vollständiger Erzeugungswert, daß der entsprechende vollständige Erzeugungswert α in bezug auf den ersten Bereich vollständig induziert ist. Jeder durch eine Formel $\alpha_r \sim \alpha'_r + \alpha''_r$ ausgedrückten scharfen Zerlegung in bezug auf den ersten Bereich eines konstruktiven Unterwertes α_r von α entspricht dann eine durch eine Formel $\beta_r \sim \beta'_r + \beta''_r$ ausgedrückte scharfe Zerlegung in bezug auf den ersten Bereich des entsprechenden konstruktiven Unterwertes β_r von β (welche leicht eindeutig festgelegt werden kann, z. B. durch die Forderung, daß, wenn β'_r nicht fortfällt, jeder Rest von β'_r Vollelemente aufweisen soll). Auf Grund dieser scharfen Zerlegungen seiner konstruktiven Unterwerte aber stellt sich β an der Hand seiner mit α parallelen Erzeugung unmittelbar als in bezug auf den ersten Bereich vollständig induziert heraus.

§ 3. Sei α ein basierter Erzeugungswert, β ein quasi-vollständiger Erzeugungswert. Alsdann wird die *Potenz* α^β , in welcher α das *Argument*, β der *Exponent* heißt, auf Grund der folgenden Festsetzungen definiert:

Wenn β einer Null-Urspezies entspricht, so ist $\alpha^\beta = 1$, d. h. gleich dem Erzeugungswerte einer Voll-Urspezies.

Wenn β einer Voll-Urspezies entspricht, so ist $\alpha^\beta = \alpha$.

Wenn $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation, so ist $\alpha^\beta = \alpha^{\beta_1} + \alpha^{\beta_2} \cdot h(\alpha^{\beta_1}) + \alpha^{\beta_1 + \beta_2} \cdot h(\alpha^{\beta_3}) + \dots + \alpha^{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{m-1}} \cdot h(\alpha^{\beta_m}) \sim \alpha^{\beta_1} \cdot \alpha^{\beta_2} \cdot \alpha^{\beta_3} \dots \alpha^{\beta_m}$.

Wenn $\beta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_{\nu}$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, so ist

$$\alpha^{\beta} = \alpha^{\beta_1} + \alpha^{\beta_1} \cdot h(\alpha^{\beta_2}) + \alpha^{\beta_1+\beta_2} \cdot h(\alpha^{\beta_3}) + \dots = \lim_{\nu} \alpha^{\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_{\nu}}$$

$$\sim \lim_{\nu} \alpha^{(\beta_1+\dots+\beta_{\varrho_1})+(\beta_{\varrho_1+1}+\dots+\beta_{\varrho_2})+\dots+(\beta_{\varrho_{\nu-1}+1}+\dots+\beta_{\varrho_{\nu}})},$$

wo $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ eine beliebige Fundamentalreihe von unbeschränkt wachsenden natürlichen Zahlen vorstellt.

Aus diesen Festsetzungen folgt, daß α^{β} wiederum ein basierter Erzeugungswert ist. Ist weiter β^0 der mit β korrespondierende vollständige bzw. einer Null-Urspezies entsprechende Erzeugungswert, so ist, wie sich mittels der induktiven Methode an der Hand der Erzeugung von β herausstellt, $\alpha^{\beta^0} = \alpha^{\beta}$.

Hinsichtlich des Potenzbegriffes gelten zunächst folgende Sätze:

1. Wenn $\beta \sim {}_1\beta + {}_2\beta + \dots + {}_m\beta$, so ist $\alpha^{\beta} \sim \alpha^{{}_1\beta} \cdot \alpha^{{}_2\beta} \dots \alpha^{{}_m\beta} \sim \alpha^{{}_1\beta+{}_2\beta+\dots+{}_m\beta}$.

2. Wenn $\beta \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} {}_{\nu}\beta$ (in diesem Falle existiert wegen der Quasivollständigkeit von β entweder eine steigende Fundamentalreihe ν_1, ν_2, \dots , so daß ${}_{\nu}\beta$ für jedes σ Vollelemente enthaltenden wohlgeordneten Spezies entspricht, oder ein m , so daß ${}_{\nu}\beta$ für $\nu > m$ immer ausschließlich Nullelemente enthaltenden wohlgeordneten Spezies entspricht), so ist $\alpha^{\beta} \sim \alpha^{{}_1\beta+{}_2\beta+\dots} = \lim_{\nu} \alpha^{{}_1\beta+{}_2\beta+\dots+{}_{\nu}\beta}$.

Beide Sätze sind offenbar erfüllt, wenn β den Erzeugungswert einer Urspezies darstellt. Bei ihrem (ja gleichzeitig für die Ausschnitte und Reste von β gültigen) Beweise dürfen wir mithin ihre Gültigkeit für die konstruktiven Unterwerte erster Ordnung von β , sowie für deren Ausschnitte und Reste voraussetzen.

Sei also *erstens* $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation und sei $\beta \sim {}_1\beta + {}_2\beta + \dots + {}_m\beta$. Wir können es nun so einrichten, daß

$$\beta_{\nu} \sim \beta^{(r_{\nu-1}+1)} + \beta^{(r_{\nu-1}+2)} + \dots + \beta^{(r_{\nu})} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n; r_0 = 0; r_{\nu+1} > r_{\nu});$$

$${}_{\nu}\beta = \beta^{(h_{\nu-1}+1)} + \dots + \beta^{(h_{\nu})} \quad \text{bzw.} \quad \leftarrow \beta^{(h_{\nu})}$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, m; h_0 = 0; h_{\nu} > h_{\nu-1} + 1 \quad \text{bzw.} \quad = h_{\nu-1} + 1).$$

Alsdann ist $\alpha^{\beta} \sim \alpha^{\beta_1} \cdot \alpha^{\beta_2} \dots \alpha^{\beta_n} \sim \alpha^{\beta'} \cdot \alpha^{\beta''} \dots \alpha^{\beta^{(r_n)}} \sim \alpha^{{}_1\beta} \cdot \alpha^{{}_2\beta} \dots \alpha^{{}_m\beta}$.

Sei *zweitens* $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation und sei $\beta \sim {}_1\beta + {}_2\beta + {}_3\beta + \dots$. Wir können es nun so einrichten, daß

$$\beta_{\nu} \sim \beta^{(r_{\nu-1}+1)} + \beta^{(r_{\nu-1}+2)} + \dots + \beta^{(r_{\nu})} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n-1; r_0 = 0; r_{\nu+1} > r_{\nu});$$

$\beta_n \sim \beta^{(r_{n-1}+1)} + \beta^{(r_{n-1}+2)} + \dots$; ${}_v\beta = \beta^{(h_{v-1}+1)} + \beta^{(h_{v-1}+2)} + \dots + \beta^{(h_v)}$
bzw. $\leftarrow \beta^{(h_v)}$ ($v = 1, 2, 3, \dots$; $h_0 = 0$; $h_v > h_{v-1} + 1$ bzw. $= h_{v-1} + 1$).

Alsdann ist $\alpha^{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n-1}} \sim \alpha^{\beta'} \cdot \alpha^{\beta''} \dots \alpha^{\beta^{(r_{n-1})}} \sim \alpha^{\beta' + \beta'' + \dots + \beta^{(r_{n-1})}}$;
 $\alpha^{\beta_n} \sim \lim_{\mu} \alpha^{\beta^{(r_{n-1}+1)} + \dots + \beta^{(r_{n-1}+\mu)}}$; $\alpha^{\beta} \sim \alpha^{\beta_1 + \dots + \beta_{n-1}} \cdot \alpha^{\beta_n} \sim \lim_{\mu} \alpha^{\beta' + \dots + \beta^{(r_{n-1})}}$
 $\cdot \alpha^{\beta^{(r_{n-1}+1)} + \dots + \beta^{(r_{n-1}+\mu)}} \sim \lim_{\tau} \alpha^{\beta' + \beta'' + \dots + \beta^{(\tau)}} \sim \lim_{\nu} \alpha^{1\beta + 2\beta + \dots + \nu\beta}$.

Sei *drittens* $\beta = \sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation
und sei $\beta \sim {}_1\beta + {}_2\beta + \dots + {}_m\beta$. Wir können es nun so einrichten, daß
 $\beta_v \sim \beta^{(r_{v-1}+1)} + \beta^{(r_{v-1}+2)} + \dots + \beta^{(r_v)}$ ($v = 1, 2, \dots$; $r_0 = 0$; $r_{v+1} > r_v$);
 ${}_v\beta = \beta^{(h_{v-1}+1)} + \dots + \beta^{(h_v)}$ bzw. $\leftarrow \beta^{(h_v)}$ ($v = 1, 2, \dots, m-1$; $h_0 = 0$;
 $h_v > h_{v-1} + 1$ bzw. $= h_{v-1} + 1$); ${}_m\beta = \beta^{(h_{m-1}+1)} + \beta^{(h_{m-1}+2)} + \dots$.

Alsdann ist $\alpha^{\beta} = \lim_{\nu} \alpha^{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{\nu}} \sim$ (wie oben unter *erstens* be-
wiesen wurde)

$$\lim_{\nu} \alpha^{\beta' + \beta'' + \dots + \beta^{(r_{\nu})}} \sim \lim_{\mu} \alpha^{\beta' + \beta'' + \dots + \beta^{(\mu)}} \sim \alpha^{\beta' + \beta'' + \dots + \beta^{(h_{m-1})}}$$

$$\cdot \lim_{\tau} \alpha^{\beta^{(h_{m-1}+1)} + \dots + \beta^{(h_{m-1}+\tau)}} \sim \alpha^{1\beta} \cdot \alpha^{2\beta} \dots \cdot \alpha^{m\beta}.$$

Sei *viertens* $\beta = \sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation
und sei $\beta \sim {}_1\beta + {}_2\beta + {}_3\beta + \dots$. Wir können es nun so einrichten, daß
 $\beta_v \sim \beta^{(r_{v-1}+1)} + \beta^{(r_{v-1}+2)} + \dots + \beta^{(r_v)}$ ($v = 1, 2, \dots$; $r_0 = 0$; $r_{v+1} > r_v$);
 ${}_v\beta = \beta^{(h_{v-1}+1)} + \dots + \beta^{(h_v)}$ bzw. $\leftarrow \beta^{(h_v)}$ ($v = 1, 2, 3, \dots$; $h_0 = 0$;
 $h_v > h_{v-1} + 1$ bzw. $= h_{v-1} + 1$).

Alsdann ist $\alpha^{\beta} = \lim_{\nu} \alpha^{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{\nu}} \sim$ (wie oben unter *erstens* be-
wiesen wurde)

$$\lim_{\nu} \alpha^{\beta' + \beta'' + \dots + \beta^{(r_{\nu})}} \sim \lim_{\mu} \alpha^{\beta' + \beta'' + \dots + \beta^{(\mu)}}$$

$$\sim \lim_{\tau} \alpha^{(\beta' + \dots + \beta^{(h_1)}) + (\beta^{(h_1+1)} + \dots + \beta^{(h_2)}) + \dots + (\beta^{(h_{\tau-1}+1)} + \dots + \beta^{(h_{\tau})})}$$

$$= \lim_{\tau} \alpha^{1\beta + 2\beta + \dots + \tau\beta}.$$

Nachdem hiermit die Sätze 1 und 2 hergeleitet sind, sind wir in der
Lage, das nachstehende Theorem auszusprechen:

*Wenn β und β^0 gleichwertig sind, dann sind auch α^{β} und α^{β^0} gleich-
wertig.*

Diese Eigenschaft ergibt sich leicht mittels der induktiven Methode
an der Hand der Erzeugung von β . Nehmen wir nämlich an, daß sie für
jeden konstruktiven Unterwert β_v von β bewiesen ist, und sei β_v^0 ein
mit β_v gleichwertiger Ausschnitt bzw. Rest von β^0 , so daß also α^{β_v} und $\alpha^{\beta_v^0}$

für jedes ν gleichwertig sind. Ist nun $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation, dann ist (nach dem obigen Satz 1) $\alpha^{\beta^0} \sim \alpha^{\beta_1^0} \cdot \alpha^{\beta_2^0} \dots \cdot \alpha^{\beta_m^0} \sim \alpha^{\beta_1} \cdot \alpha^{\beta_2} \dots \cdot \alpha^{\beta_m} \sim \alpha^\beta$. Und ist $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, dann ist (nach dem obigen Satz 2) $\alpha^{\beta^0} \sim \lim_{\nu} \alpha^{\beta_1^0 + \beta_2^0 + \dots + \beta_\nu^0} \sim \lim_{\nu} \alpha^{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu} = \alpha^\beta$.

Sind β und β^0 nur inhaltsgleich, so sind die mit β und β^0 korrespondierenden vollständigen bzw. einer Null-Urspezies entsprechenden Erzeugungswerte ϑ und ϑ^0 gleichwertig, so daß wir haben: $\alpha^{\beta^0} = \alpha^{\vartheta^0} \sim \alpha^{\vartheta} = \alpha^\beta$, d. h. *wenn β und β^0 inhaltsgleich sind, dann sind α^β und α^{β^0} gleichwertig.*

Noch einfacher ergibt sich (wiederum mittels der induktiven Methode an der Hand der Erzeugung von β) folgende Eigenschaft:

Wenn α und α_1 inhaltsgleich (bzw. gleichwertig) sind, dann sind auch α^β und α_1^β inhaltsgleich (bzw. gleichwertig).

Mittels der induktiven Methode beweisen wir noch den Satz:

$$(\alpha^\beta)^\gamma \sim \alpha^{\beta\gamma}.$$

Es sei nämlich $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_m$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation, und es seien die Formeln $(\alpha^\beta)^{\gamma_\nu} \sim \alpha^{\beta\gamma_\nu}$ ($\nu = 1, 2, \dots, m$) bewiesen. Alsdann ist

$$\begin{aligned} \alpha^{\beta\gamma} &= \alpha^{\sum_{\nu=1}^m \beta\gamma_\nu} \sim \alpha^{\beta\gamma_1} \cdot \alpha^{\beta\gamma_2} \dots \cdot \alpha^{\beta\gamma_m} \sim (\alpha^\beta)^{\gamma_1} \cdot (\alpha^\beta)^{\gamma_2} \dots \cdot (\alpha^\beta)^{\gamma_m} \\ &\sim (\alpha^\beta)^{\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_m} = (\alpha^\beta)^\gamma. \end{aligned}$$

Es sei weiter $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, und es seien die Formeln $(\alpha^\beta)^{\gamma_\nu} \sim \alpha^{\beta\gamma_\nu}$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots$), mit-

hin auch die Formeln $(\alpha^\beta)^{\sum_{\nu=1}^n \gamma_\nu} \sim \alpha^{\beta \sum_{\nu=1}^n \gamma_\nu}$ ($n = 1, 2, \dots$) bewiesen. Alsdann ist

$$\begin{aligned} \alpha^{\beta\gamma} &= \alpha^{\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta\gamma_\nu} = \lim_n \alpha^{\sum_{\nu=1}^n \beta\gamma_\nu} = \lim_n \alpha^{\beta \sum_{\nu=1}^n \gamma_\nu} \sim \lim_n (\alpha^\beta)^{\sum_{\nu=1}^n \gamma_\nu} \\ &= (\alpha^\beta)^{\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu} = (\alpha^\beta)^\gamma. \end{aligned}$$

Im Falle, daß der basierte Erzeugungswert α ebenfalls quasi-vollständig ist, ersehen wir unter Anwendung der Eigenschaft, daß das Produkt zweier quasi-vollständiger Erzeugungswerte wiederum quasi-vollständig ist, sowie des S. 457, Zeilen 13 bis 21 erwähnten Satzes, mittels der induktiven Methode an der Hand der Erzeugung von β , daß auch α^β quasi-vollständig ist. Wenn dann α_1 bzw. β_1 ein mit α bzw. β inhaltsgleicher vollständiger bzw.

zu Null-Urspezies gehöriger Erzeugungswert ist, haben wir nach dem Obigen, daß α^β mit α_1^β inhaltsgleich ist, was wir auch wie folgt ausdrücken können:

Ist α ein basierter quasi-vollständiger Erzeugungswert der Ordnungszahl a und β ein quasi-vollständiger Erzeugungswert der Ordnungszahl b , dann ist α^β ein basierter quasi-vollständiger Erzeugungswert der Ordnungszahl a^b .

§ 4. Unter den *Ordnungszahlen des zweiten Bereichs vom Grade Null* verstehen wir die Ordnungszahlen des ersten Bereichs. Unter den *Ordnungszahlen des zweiten Bereichs vom Grade p* (p eine nicht verschwindende natürliche Zahl) verstehen wir die Ordnungszahlen

$$\omega^{p_1 \cdot a_1} + \omega^{p_2 \cdot a_2} + \dots + \omega^{p_n \cdot a_n},$$

wo n und die a_r nichtverschwindende natürliche Zahlen sind und die p_r natürliche Zahlen (unter denen auch 0 vorkommen kann, in welchem Fall $\omega^0 = 1$ ist), deren größte gleich p ist. Offenbar dürfen wir annehmen, daß $p_{r+1} > p_r$ ($r = 1, 2, \dots, n-1$).

Unter einer *Spezies des zweiten Bereichs vom Grade p* verstehen wir eine (vollständige oder quasi-vollständige) wohlgeordnete Spezies, welche eine Ordnungszahl des zweiten Bereichs vom Grade p besitzt⁴).

Offenbar ist jede Spezies des zweiten Bereichs, deren Ordnungszahl von Null verschieden ist, kondensiert.

Wie man leicht einsieht, sind zwei beliebige Ordnungszahlen des zweiten Bereichs vergleichbar und besitzen, wenn sie voneinander und von Null verschieden sind, eine gleichfalls zum zweiten Bereich gehörende Differenz.

Die ordnungsgemäße Summe endlichvieler Ordnungszahlen des zweiten Bereichs ist wiederum eine Ordnungszahl des zweiten Bereichs.

Aus der Formel

$$(\omega^{p_1 \cdot a_1} + \omega^{p_2 \cdot a_2} + \dots + \omega^{p_n \cdot a_n}) \omega = \omega^{p_1 \cdot a_1} \cdot \omega = \omega^{p_1 \cdot (a_1 \cdot \omega)} = \omega^{p_1 + 1}$$

⁴) Eine wohlgeordnete Spezies der Ordnungszahl $\omega^{p_1 \cdot a_1} + \omega^{p_2 \cdot a_2} + \dots + \omega^{p_n \cdot a_n}$ können wir erzeugen durch Addition einer — vollständigen oder quasi-vollständigen — wohlgeordneten Spezies der Ordnungszahl $\omega^{p_1 \cdot a_1}$ (welche wir ihrerseits herstellen können durch Multiplikation von $p_1 + 1$ elementfremden — vollständigen oder quasi-vollständigen — wohlgeordneten Spezies, von denen die ersten p_1 die Ordnungszahl ω und die letzte die Ordnungszahl a_1 besitzt), einer — vollständigen oder quasi-vollständigen — wohlgeordneten Spezies der Ordnungszahl $\omega^{p_2 \cdot a_2}$, ..., und einer — vollständigen oder quasi-vollständigen — wohlgeordneten Spezies der Ordnungszahl $\omega^{p_n \cdot a_n}$. Diese Erzeugungweise von Spezies des zweiten Bereichs ist indes keineswegs die einzige, wie man schon für die Ordnungszahl ω^2 durch einfache Beispiele belegen kann.

geht hervor, daß die Multiplikation einer Ordnungszahl des zweiten Bereichs mit einem rechtsseitigen Multiplikator ω , mithin auch mit einem rechtsseitigen Multiplikator ω^p , mithin auch mit einem beliebigen, eine Ordnungszahl des zweiten Bereichs darstellenden rechtsseitigen Multiplikator, wiederum eine Ordnungszahl des zweiten Bereichs ist. Hieraus folgt, daß allgemein *das Produkt endlichvieler Ordnungszahlen des zweiten Bereichs wiederum eine Ordnungszahl des zweiten Bereichs ist.*

Eine Fundamentalreihe β_1, β_2, \dots von Ordnungszahlen des zweiten Bereichs heißt *induziert in bezug auf den zweiten Bereich*, wenn eine solche steigende Fundamentalreihe ν_1, ν_2, \dots existiert, daß die Grade von $\beta_{\nu_1}, \beta_{\nu_2}, \dots$ entweder beständig wachsen oder einander gleich sind, während für m zwischen ν_n und ν_{n+1} der Grad von β_m kleiner ist als der Grad von $\beta_{\nu_{n+1}}$, und, falls die β_{ν_n} vom Grade Null sind, die Fundamentalreihe $\beta_{\nu_1}, \beta_{\nu_{n+1}}, \beta_{\nu_{n+2}}, \dots$ in bezug auf den ersten Bereich induziert ist.

Wenn wir die ordnungsgemäße Summe einer in bezug auf den zweiten Bereich induzierten Fundamentalreihe von Ordnungszahlen des zweiten Bereichs mittels der ordnungsgemäßen Summe entsprechender vollständiger bzw. aus nur einem einzigen Nullelement bestehender wohlgeordneter Spezies definieren, dann erweist sich diese Summe wiederum als eine Ordnungszahl, und zwar ist dieselbe entweder gleich ω^ω oder gehört wiederum dem zweiten Bereich an.

Wir formulieren jetzt eine Reihe von sechs Eigenschaften:

1. Zu einer beliebigen von Null verschiedenen Ordnungszahl des zweiten Bereichs gehört sicher ein vollständiger Erzeugungswert, der *vollständig induziert in bezug auf den zweiten Bereich* ist, d. h. dessen konstruktive Unterwerte alle Ordnungszahlen des zweiten Bereichs besitzen, und für den bei jeder Anwendung der zweiten erzeugenden Operation die betreffende Fundamentalreihe von Ordnungszahlen in bezug auf den zweiten Bereich induziert ist.

2. Eine beliebige von Null verschiedene Ordnungszahl des zweiten Bereichs, deren letzter Exponent von Null verschieden ist, ist gleich der ordnungsgemäßen Summe einer in bezug auf den zweiten Bereich induzierten Fundamentalreihe von nichtverschwindenden Ordnungszahlen des zweiten Bereichs.

3. Jeder Abschnitt (also auch jeder Rest und jeder Ausschnitt) einer Ordnungszahl des zweiten Bereichs ist wiederum eine Ordnungszahl des zweiten Bereichs (so daß der zweite, ebenso wie der erste Bereich der Ordnungszahlen ununterbrochen ist).

Diese Eigenschaft braucht nur für eine beliebige von Null verschiedene Ordnungszahl des zweiten Bereichs β bewiesen zu werden. Sie ergibt

sich mittels der induktiven Methode an der Hand der Erzeugung eines (auf Grund der Eigenschaft 1 existierenden) zu β gehörigen vollständigen und in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induzierten Erzeugungswertes.

4. Eine Fundamentalreihe $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ von Ordnungszahlen des zweiten Bereichs, deren (in der im vorigen schon mehrfach angegebenen Weise definierte) ordnungsgemäße Summe entweder eine Ordnungszahl des zweiten Bereichs oder die Ordnungszahl ω^ω ist, ist induziert in bezug auf den zweiten Bereich.

Im ersten Falle dürfen wir, weil die ordnungsgemäße Summe von $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ voraussetzungsgemäß quasi-vollständigen wohlgeordneten Spezies entspricht, und mithin feststeht, entweder daß nur endlichviele, oder daß abzählbarunendlichviele nichtverschwindende α_ν existieren, annehmen, daß das letztere der Fall ist. Weiter dürfen wir den Beweis beschränken auf den Fall $\alpha = \omega^p$, wo $p = q + 1$ und q nicht verschwindet, mithin $\alpha = \lim_n \omega^q \cdot n$ (n eine unbeschränkt wachsende natürliche Zahl). Alsdann gibt es ein kleinstes ϱ_1 , zu dem ein solches $\nu_1 > 0$ bestimmt werden kann, daß $\omega^q \cdot (\nu_1 + 1) > \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\varrho_1} \geq \omega^q \cdot \nu_1$; ein kleinstes ϱ_2 , zu dem ein solches $\nu_2 > \nu_1$ bestimmt werden kann, daß $\omega^q \cdot (\nu_2 + 1) > \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\varrho_2} \geq \omega^q \cdot \nu_2$; ein kleinstes ϱ_3 , zu dem ein solches $\nu_3 > \nu_2$ bestimmt werden kann, daß $\omega^q \cdot (\nu_3 + 1) > \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\varrho_3} \geq \omega^q \cdot \nu_3$; usw. Die Exponenten der Anfangsglieder von $\alpha_{\varrho_1}, \alpha_{\varrho_2}, \dots$ müssen alle gleich q sein, während für m zwischen ϱ_n und ϱ_{n+1} die Exponenten von α_m kleiner als q sind. Mithin ist die Fundamentalreihe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ induziert in bezug auf den zweiten Bereich.

Im zweiten Falle ist die Ordnungszahl $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots$ gleich der Ordnungszahl $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots$ und gibt es ein kleinstes ϱ_1 , zu dem ein solches $\nu_1 > 0$ bestimmt werden kann, daß $\omega^{\nu_1+1} > \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\varrho_1} \geq \omega^{\nu_1}$; ein kleinstes ϱ_2 , zu dem ein solches $\nu_2 > \nu_1$ bestimmt werden kann, daß $\omega^{\nu_2+1} > \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\varrho_2} \geq \omega^{\nu_2}$; ein kleinstes ϱ_3 , zu dem ein solches $\nu_3 > \nu_2$ bestimmt werden kann, daß $\omega^{\nu_3+1} > \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\varrho_3} \geq \omega^{\nu_3}$; usw. Die Grade von $\alpha_{\varrho_1}, \alpha_{\varrho_2}, \dots$ müssen beständig wachsen, während für m zwischen ϱ_n und ϱ_{n+1} der Grad von α_m kleiner ist als der Grad von $\alpha_{\varrho_{n+1}}$. Mithin ist die Fundamentalreihe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ induziert in bezug auf den zweiten Bereich.

5. Wenn $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ eine Fundamentalreihe von Ordnungszahlen ist, welche mit der in bezug auf den zweiten Bereich induzierten Fundamentalreihe $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ von Ordnungszahlen des zweiten Bereichs *additiv-zusammengehörig* ist (d. h. daß zu jedem ν ein solches μ gefunden werden kann, daß $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\mu > \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu$, und zu jedem ϱ ein solches σ , daß $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\sigma > \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\varrho$), so gehört auch jedes β_ν zum

zweiten Bereich und ist die Fundamentalreihe $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ in bezug auf den zweiten Bereich induziert.

Diese Eigenschaft ist eine unmittelbare Folge der Eigenschaften 3 und 4.

6. Ein beliebiger zu einer Ordnungszahl des zweiten Bereichs gehöriger Erzeugungswert ist vollständig induziert in bezug auf den zweiten Bereich.

Für einen vollständigen Erzeugungswert folgt diese Eigenschaft unmittelbar aus den Eigenschaften 3 und 4. Um sie für einen quasi-vollständigen Erzeugungswert (dessen Ordnungszahl wir als nichtverschwindend voraussetzen dürfen) herzuleiten, genügt es, denselben zum entsprechenden vollständigen Erzeugungswert in Beziehung zu setzen.

Eine wohlgeordnete Spezies F heißt *unbestimmt zerlegt in bezug auf den zweiten Bereich*, wenn sie in solcher Weise in einen (evtl. fortfallenden) Abschnitt F' und einen (evtl. fortfallenden) Rest F'' regulär zerlegt werden kann, daß jeder Rest von F' entweder aus lauter Nullelementen besteht oder einen mit ω^ω inhaltsgleichen Anfangsteil besitzt, und F'' mit einer Spezies des zweiten Bereichs inhaltsgleich ist (ohne deshalb notwendigerweise eine Ordnungszahl des zweiten Bereichs besitzen zu müssen).

Eine in bezug auf den zweiten Bereich unbestimmt zerlegte wohlgeordnete Spezies F braucht — schon im Falle, daß F'' mit F identisch und mit der Ordnungszahl ω inhaltsgleich ist — nicht notwendig unbestimmt zerlegt in bezug auf den ersten Bereich zu sein, wie aus folgendem Beispiel hervorgeht: Es sei F_ν für $\nu < k_1$ und G_ν für $\nu \geq k_1$ eine Voll-Urspezies; F_ν für $\nu \geq k_1$ und G_ν für $\nu < k_1$ eine Null-Urspezies; $F = (F_1 + F_2 + \dots) + (G_1 + G_2 + \dots)$.

Ebensowenig ist eine in bezug auf den ersten Bereich unbestimmt zerlegte wohlgeordnete Spezies G notwendigerweise unbestimmt zerlegt in bezug auf den zweiten Bereich, wie folgendes Beispiel zeigt: Es sei G_ν eine vollständige wohlgeordnete Spezies, welche für $\nu < k_1$ die Ordnungszahl ω^ν , für $\nu \geq k_1$ die Ordnungszahl ω^{k_1} besitzt, und es sei $G = G_1 + G_2 + G_3 + \dots$.

Eine wohlgeordnete Spezies F heißt *scharf zerlegt in bezug auf den zweiten Bereich*, wenn sie in solcher Weise in einen (evtl. fortfallenden) Abschnitt F' und einen (evtl. fortfallenden) Rest F'' regulär zerlegt werden kann, daß jeder Rest von F' entweder aus lauter Nullelementen besteht, oder die Ordnungszahl ω^ω oder einen Abschnitt der Ordnungszahl ω^ω besitzt, und F'' eine Ordnungszahl des zweiten Bereichs besitzt (hierbei können wir, ohne der wohlgeordneten Spezies F eine weitere Einschränkung aufzuerlegen, überdies fordern, daß F' entweder in Fortfall kommt, oder wenigstens ein Vollelement enthält).

Eine in bezug auf den zweiten Bereich scharf zerlegte wohlgeordnete Spezies ist ebenfalls scharf zerlegt in bezug auf den ersten Bereich. Nach dem obigen Beispiel $G = G_1 + G_2 + G_3 + \dots$, wo G_r eine vollständige wohlgeordnete Spezies der Ordnungszahl ω^r bzw. ω^{k_1} vorstellt, ist aber eine in bezug auf den ersten Bereich scharf zerlegte wohlgeordnete Spezies nicht notwendig scharf zerlegt in bezug auf den zweiten Bereich.

Von einer in bezug auf den zweiten Bereich scharf zerlegten wohlgeordneten Spezies ist nicht notwendig auch jede konstruktive Unterspezies in bezug auf den zweiten Bereich scharf zerlegt, wie wir aus folgendem Beispiel ersehen: Es besitze G_r für $r \leq k_1$ die Ordnungszahl ω^r , für $r > k_1$ die Ordnungszahl ω ; H_r für jedes r die Ordnungszahl ω^r ; und es sei $G = G_1 + G_2 + \dots$; $H = H_1 + H_2 + \dots$; $F = G + H$. Alsdann ist F scharf zerlegt in bezug auf den zweiten Bereich; die konstruktive Unterspezies G von F dagegen ist weder scharf, noch unbestimmt zerlegt in bezug auf den zweiten Bereich.

Eine wohlgeordnete Spezies F heißt *vollständig induziert in bezug auf den zweiten Bereich*, wenn während ihrer Erzeugung bei jeder durch eine Formel $F_0 = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$ ausgedrückten Anwendung der zweiten erzeugenden Operation, wo jedes F_r nach der Formel $F_r \sim F'_r + F''_r$ in bezug auf den zweiten Bereich scharf zerlegt ist, die betreffende Fundamentalreihe F_1, F_2, F_3, \dots *in bezug auf den zweiten Bereich induziert* ist, d. h. *erstens* entweder eine unbeschränkt wachsende Fundamentalreihe $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$ existiert, so daß jedes F'_{ν_a} Vollelemente besitzt, oder ein solches m angegeben werden kann, daß F'_r für $r > m$ aus lauter Nullelementen besteht bzw. fortfällt, *zweitens* im letzteren Falle die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von $F''_1, F''_2, F''_3, \dots$ (wobei wir einem fortfallenden F''_r die Ordnungszahl Null zusprechen) in bezug auf den zweiten Bereich induziert ist. Demzufolge ist dann jedesmal auch F_0 in bezug auf den zweiten Bereich scharf zerlegt.

Sei $F_{i_1 i_2 \dots i_m}$ ein Element der in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induzierten wohlgeordneten Spezies F . Der Reihe nach ergibt sich, daß dieses Element in $F_{i_1 i_2 \dots i_{m-1}}$, in $F_{i_1 i_2 \dots i_{m-2}}, \dots$, in $F_{i_1 i_2}$, in F_{i_1} und in F je einen Abschnitt und einen Rest bestimmt, die in bezug auf den zweiten Bereich gleichfalls vollständig induziert sind. Mithin haben wir den Satz, daß jeder Ausschnitt sowie jeder Rest einer in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induzierten wohlgeordneten Spezies F gleichfalls in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induziert ist.

Eine in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induzierte wohlgeordnete Spezies F ist offenbar scharf zerlegt in bezug auf den zweiten Bereich, weiter quasi-vollständig und, wie wir mittels der induktiven Methode ersehen, auch in bezug auf den ersten Bereich vollständig induziert.

Schreiben wir, der scharfen Zerlegbarkeit von F in bezug auf den zweiten Bereich entsprechend, $F \sim F' + F''$, so besitzt die wohlgeordnete Spezies F' , wenn sie nicht fortfällt, entweder einen Rest der Ordnungszahl ω^ω , oder alle nichtverschwindenden Ordnungszahlen von Resten von F' sind größer als ω^ω .

Sei F eine in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induzierte wohlgeordnete Spezies, welche mit der ordnungsgemäßen Summe einer Fundamentalreihe F_1, F_2, \dots von in bezug auf den zweiten Bereich scharf zerlegten wohlgeordneten Spezies gleichwertig ist. Wir wollen beweisen, daß die Fundamentalreihe F_1, F_2, \dots in bezug auf den zweiten Bereich induziert ist, und bemerken dazu zunächst, daß für die wohlgeordnete Spezies F , eben weil sie in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induziert ist, eine der drei folgenden Eigenschaften bestehen muß: *entweder* F besitzt einen Rest mit einer Ordnungszahl des zweiten Bereichs (die auch Null sein kann), *oder* von einem gewissen Reste von F besitzt jeder Rest die Ordnungszahl ω^ω , *oder aber* jeder Rest von F besitzt eine Ordnungszahl $> \omega^\omega$. Diese drei Fälle behandeln wir der Reihe nach.

Erster Fall. F besitzt einen Rest F^0 mit einer Ordnungszahl des zweiten Bereichs. Für ein bestimmtes m besitzt dann F_m einen derartigen Rest F_{m2} , daß die ordnungsgemäße Summe der Fundamentalreihe $F_{m2}, F_{m+1}, F_{m+2}, \dots$ mit F^0 gleichwertig ist, so daß jedes Glied der letzteren Fundamentalreihe eine Ordnungszahl des zweiten Bereichs besitzt, und die Fundamentalreihe dieser Ordnungszahlen (eben weil ihre ordnungsgemäße Summe eine Ordnungszahl des zweiten Bereichs ist) in bezug auf den zweiten Bereich induziert ist. Dann aber gilt dasselbe für die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von F_{m+1}, F_{m+2}, \dots bzw. für die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von $F''_{m+1}, F''_{m+2}, \dots$, mithin auch für die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies F_{m+1}, F_{m+2}, \dots , mithin auch für die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies F_1, F_2, F_3, \dots .

Zweiter Fall. Vom Reste F^0 von F besitzt jeder Rest die Ordnungszahl ω^ω . Für ein bestimmtes m besitzt dann F_m einen derartigen Rest F_{m2} , daß die ordnungsgemäße Summe der Fundamentalreihe $F_{m2}, F_{m+1}, F_{m+2}, \dots$ mit F^0 gleichwertig ist, so daß jedes Glied der letzteren Fundamentalreihe eine Ordnungszahl des zweiten Bereichs besitzt und die Fundamentalreihe dieser Ordnungszahlen (eben weil ihre ordnungsgemäße Summe gleich ω^ω ist) in bezug auf den zweiten Bereich induziert ist. Dann aber gilt dasselbe für die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von F_{m+1}, F_{m+2}, \dots bzw. für die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von $F''_{m+1}, F''_{m+2}, \dots$, mithin auch für die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies

F_{m+1}, F_{m+2}, \dots , mithin auch für die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies F_1, F_2, F_3, \dots .

Dritter Fall. *Jeder Rest von F besitzt eine Ordnungszahl $> \omega^\omega$.* Zu jedem m gibt es dann ein derartiges ν_m , daß für einen bestimmten (eigentlichen oder uneigentlichen) Abschnitt $F_{\nu_m}^0$ von F_{ν_m} die ordnungsgemäße Summe $F_m + F_{m+1} + \dots + F_{\nu_m-1} + F_{\nu_m}^0$ die Ordnungszahl ω^ω besitzt, so daß wenigstens eine der wohlgeordneten Spezies $F'_m, F'_{m+1}, \dots, F'_{\nu_m-1}, F'_{\nu_m}$ existiert und Vollelemente besitzt. Das heißt aber, daß es zu jedem m ein derartiges $\varrho_m \geq m$ gibt, daß F'_{ϱ_m} existiert und Vollelemente besitzt, so daß die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies F_1, F_2, F_3, \dots in bezug auf den zweiten Bereich induziert ist.

Kombinieren wir den hiermit bewiesenen Satz mit der Eigenschaft, daß jeder Ausschnitt sowie jeder Rest einer in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induzierten wohlgeordneten Spezies gleichfalls in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induziert ist, so ergibt sich, daß jede mit einer in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induzierten wohlgeordneten Spezies F gleichwertige wohlgeordnete Spezies G ebenfalls in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induziert ist (und zwar mittels der induktiven Methode an der Hand der Erzeugung von G). Auf Grund dieser Eigenschaft *bezeichnen wir eine Ordnungszahl als in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induziert, wenn jeder zu ihr gehörige vollständige Erzeugungswert in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induziert ist.*

Dann aber ist auch jeder zu ihr gehörige quasi-vollständige Erzeugungswert in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induziert. Sei nämlich β ein solcher quasi-vollständiger Erzeugungswert, daß der entsprechende vollständige Erzeugungswert α in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induziert ist. Jeder durch eine Formel $\alpha_r \sim \alpha'_r + \alpha''_r$ ausgedrückten scharfen Zerlegung in bezug auf den zweiten Bereich eines konstruktiven Unterwertes α_r von α entspricht dann eine durch eine Formel $\beta_r \sim \beta'_r + \beta''_r$ ausgedrückte scharfe Zerlegung in bezug auf den zweiten Bereich des entsprechenden konstruktiven Unterwertes β_r von β (welche leicht eindeutig festgelegt werden kann, z. B. durch die Forderung, daß, wenn β'_r nicht fortfällt, jeder Rest von β'_r Vollelemente aufweisen soll). Auf Grund dieser scharfen Zerlegungen seiner konstruktiven Unterwerte aber stellt sich β an der Hand seiner mit α parallelen Erzeugung unmittelbar als in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induziert heraus.

§ 5. Unter den *Ordnungszahlen des dritten Bereichs vom Range Null* verstehen wir die Ordnungszahlen des zweiten Bereichs. Unter den *Ord-*

nungszahlen des dritten Bereichs vom Range 1 verstehen wir die Ordnungszahlen

$$\omega^{p_1} \cdot a_1 + \dots + \omega^{p_n} \cdot a_n,$$

wo n und die a_v nichtverschwindende natürliche Zahlen sind und die p_v Ordnungszahlen des zweiten Bereichs, deren Maximalgrad nicht verschwindet. Unter den *Ordnungszahlen des dritten Bereichs vom Range $p + 1$* verstehen wir die Ordnungszahlen

$$\omega^{p_1} \cdot a_1 + \dots + \omega^{p_n} \cdot a_n,$$

wo n und die a_v nichtverschwindende natürliche Zahlen sind und die p_v Ordnungszahlen des dritten Bereichs vom Maximalrange p .

Unter einer *Spezies des dritten Bereichs vom Range p* verstehen wir eine (vollständige oder quasi-vollständige) wohlgeordnete Spezies, welche eine Ordnungszahl des dritten Bereichs vom Range p besitzt.

Offenbar ist jede Spezies des dritten Bereichs, deren Ordnungszahl von Null verschieden ist, kondensiert.

Es gelten folgende zwei Eigenschaften:

1. *Je zwei Ordnungszahlen des dritten Bereichs sind vergleichbar und besitzen, wenn sie voneinander und von Null verschieden sind, eine gleichfalls zum dritten Bereich gehörende Differenz.*

2. *Bei der Ordnungszahl $\omega^{p_1} \cdot a_1 + \dots + \omega^{p_n} \cdot a_n$ darf man annehmen, daß jedes $p_{v+1} < p_v$ ist.*

Diese Sätze begründen wir, indem wir den ersten für Zahlen, deren Rang $< p$ ist, mithin den zweiten für Zahlen, deren Rang $\leq p$ ist, als bewiesen annehmen, und hieraus die Gültigkeit des ersten für Zahlen, deren Rang $\leq p$ ist, folgern. Hierzu bemerken wir zunächst, daß wir für zwei Zahlen ρ und σ , deren Rang $< p$ ist, aus $\rho < \sigma$ die Formel $\omega^\sigma = \omega^\rho + \omega^\sigma$ folgern dürfen, und nennen sodann für eine Zahl des dritten Bereichs $\omega^{p_1} \cdot a_1 + \dots + \omega^{p_n} \cdot a_n$ den Exponenten p_h das $(2h - 1)$ -te Bestimmungselement und den Koeffizienten a_h das $2h$ -te Bestimmungselement. Unter diesen Voraussetzungen wird von zwei Zahlen, deren Rang $\leq p$ ist, diejenige als die größere erkannt, von der das erste Bestimmungselement, das nicht für beide Zahlen gleich ist, das größere ist, während als Differenz der beiden Zahlen wiederum eine Zahl des Ranges $\leq p$ auftritt.

Die ordnungsgemäße Summe endlichvieler Ordnungszahlen des dritten Bereichs ist wiederum eine Ordnungszahl des dritten Bereichs.

Es seien $\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v$ und ω^p , wo weder a_1 noch p verschwindet, zwei Zahlen des dritten Bereichs. Indem wir $p = 1 + q$, mithin $\omega^p = \omega \cdot \omega^q$

setzen, ersehen wir, daß ω^p sich mittels der beiden erzeugenden Operationen aus *Urzahlen* ω herstellen läßt. An der Hand *dieser* Konstruktion von ω^p können wir nun die Formel

$$\left[\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v \right] \cdot \omega^p = \omega^{p_1} \cdot \omega^p$$

mittels der induktiven Methode beweisen, und zwar auf Grund der Tatsachen, daß

$$\left[\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v \right] \cdot \omega = \omega^{p_1} \cdot \omega;$$

daß für $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation, aus

$$\left[\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v \right] \cdot \beta_1 = \omega^{p_1} \cdot \beta_1; \quad \left[\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v \right] \cdot \beta_2 = \omega^{p_1} \cdot \beta_2;$$

$$\dots; \quad \left[\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v \right] \cdot \beta_m = \omega^{p_1} \cdot \beta_m$$

folgt

$$\left[\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v \right] \cdot \beta = \omega^{p_1} \cdot \beta;$$

und daß für $\beta = \sum_{\mu=1}^{\infty} \beta_{\mu}$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, aus

$$\left[\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v \right] \cdot \beta_{\mu} = \omega^{p_1} \cdot \beta_{\mu} \quad \text{für jedes } \mu$$

folgt

$$\left[\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v \right] \cdot \beta = \omega^{p_1} \cdot \beta.$$

Es seien nun $\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v$ und $\sum_{\mu=1}^m \omega^{q_{\mu}} \cdot b_{\mu} + b_{m+1}$, wo a_1, b_{m+1} und die q_{μ} nicht verschwinden, zwei Zahlen des dritten Bereichs. Alsdann ist das Produkt

$$\left[\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v \right] \cdot \left[\sum_{\mu=1}^m \omega^{q_{\mu}} \cdot b_{\mu} + b_{m+1} \right]$$

gleich

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^m \left[\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v \right] \omega^{q_{\mu}} \cdot b_{\mu} + \left[\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v \right] \cdot b_{m+1} &= \\ &= \sum_{\mu=1}^m \omega^{p_1+q_{\mu}} \cdot b_{\mu} + \omega^{p_1} \cdot (a_1 b_{m+1}) + \sum_{v=2}^n \omega^{p_v} \cdot a_v \cdot b_{m+1} \end{aligned}$$

Mithin ist das Produkt von zwei, also auch allgemein von endlichvielen Ordnungszahlen des dritten Bereichs wiederum eine Ordnungszahl des dritten Bereichs.

Insbesondere ist, wenn p_1 nicht verschwindet, $\left[\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v\right]^2$ eine Zahl des dritten Bereichs mit dem ersten Glied $\omega^{p_1 \cdot 2} \cdot a_1$; $\left[\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v\right]^3$ eine Zahl des dritten Bereichs mit dem ersten Glied $\omega^{p_1 \cdot 3} \cdot a_1$; $\left[\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v\right]^m$, wo m eine beliebige nichtverschwindende natürliche Zahl vorstellt, eine Zahl des dritten Bereichs mit dem ersten Glied $\omega^{p_1 \cdot m} \cdot a_1$. Mithin ist

$$\left[\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v\right]^\omega = \sum_{\mu=1}^{\infty} \left[\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v\right]^\mu = \sum_{\mu=1}^{\infty} \omega^{p_1 \cdot \mu} \cdot a_1 = \omega^{p_1 \cdot \omega}.$$

Auf Grund dieser Eigenschaft können wir, wenn ω^p , wo p nicht verschwindet, eine Zahl des dritten Bereichs ist, an der Hand einer Konstruktion von ω^p mittels der beiden erzeugenden Operationen aus *Urzahlen* ω , die Formel

$$\left[\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v\right]^{\omega^p} = \omega^{p_1 \cdot \omega^p}$$

mittels der induktiven Methode herleiten, und zwar unter Benutzung der Tatsachen, daß für $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation, aus

$$\begin{aligned} \left[\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v\right]^{\beta_1} &= \omega^{p_1 \cdot \beta_1}; & \left[\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v\right]^{\beta_2} &= \omega^{p_1 \cdot \beta_2}; \\ \dots; & & \left[\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v\right]^{\beta_m} &= \omega^{p_1 \cdot \beta_m} \end{aligned}$$

folgt

$$\left[\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v\right]^\beta = \omega^{p_1 \cdot \beta},$$

und daß für $\beta = \lim_{\mu} \beta_{\mu}$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, aus

$$\left[\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v\right]^{\beta_{\mu}} = \omega^{p_1 \cdot \beta_{\mu}} \quad \text{für jedes } \mu$$

folgt

$$\left[\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v\right]^\beta = \lim_{\mu} \left[\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v\right]^{\beta_{\mu}} = \lim_{\mu} \omega^{p_1 \cdot \beta_{\mu}} = \omega^{\lim_{\mu} p_1 \cdot \beta_{\mu}} = \omega^{p_1 \cdot \beta}.$$

Sei nun $\sum_{\mu=1}^m \omega^{q_{\mu}} \cdot b_{\mu} + b_{m+1}$, wo die q_{μ} und b_{m+1} nicht verschwinden, eine weitere Zahl des dritten Bereichs, so ist

$$\begin{aligned} \left[\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v\right]^{\sum_{\mu=1}^m \omega^{q_{\mu}} \cdot b_{\mu} + b_{m+1}} &= \left[\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v\right]^{\sum_{\mu=1}^m \omega^{q_{\mu}} \cdot b_{\mu}} \cdot \left[\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v\right]^{b_{m+1}} \\ &= \omega^{p_1 \cdot \sum_{\mu=1}^m \omega^{q_{\mu}} \cdot b_{\mu}} \cdot \left[\sum_{v=1}^n \omega^{p_v} \cdot a_v\right]^{b_{m+1}}, \end{aligned}$$

welcher Ausdruck als Produkt zweier Zahlen des dritten Bereichs wiederum eine Zahl des dritten Bereichs ist.

Mithin ist eine Potenz, deren Argument und Exponent Zahlen des dritten Bereichs sind, wiederum eine Zahl des dritten Bereichs.

Eine Fundamentalreihe β_1, β_2, \dots von Ordnungszahlen des dritten Bereichs vom Range Null heißt *induziert in bezug auf den dritten Bereich*, wenn sie induziert in bezug auf den zweiten Bereich ist. Eine Fundamentalreihe $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots$ von Ordnungszahlen des dritten Bereichs, bei welcher β_1, β_2, \dots alle vom Range Null sind, heißt *induziert in bezug auf den dritten Bereich*, wenn die Fundamentalreihe β_1, β_2, \dots induziert in bezug auf den dritten Bereich ist.

Eine Fundamentalreihe β_1, β_2, \dots von Ordnungszahlen des dritten Bereichs, bei welcher eine solche steigende Fundamentalreihe ν_1, ν_2, \dots existiert, daß $\beta_{\nu_1}, \beta_{\nu_2}, \dots$ alle vom Range $p (> 0)$ sind, während für m zwischen ν_n und ν_{n+1} der Rang von β_m kleiner als p ist, heißt *induziert in bezug auf den dritten Bereich*, wenn *erstens* eine solche steigende Fundamentalreihe $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ existiert, daß die Exponenten $\beta'_{\varrho_1}, \beta'_{\varrho_2}, \dots$ der Anfangsglieder von $\beta_{\varrho_1}, \beta_{\varrho_2}, \dots$ entweder beständig wachsen oder einander gleich sind, während für m zwischen ϱ_n und ϱ_{n+1} die Exponenten von β_m kleiner sind als $\beta'_{\varrho_{n+1}}$, *zweitens* im ersteren Falle bei der Fundamentalreihe $\beta''_1, \beta''_2, \dots$, wo $\beta''_1 = \beta'_{\varrho_1}$ und jedes $\beta''_{n+1} = \beta'_{\varrho_{n+1}} - \beta'_{\varrho_n}$, eine steigende Fundamentalreihe $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ auftritt, so daß $\beta''_{\sigma_1}, \beta''_{\sigma_2}, \dots$ alle vom Range $h (< p)$ sind, während für m zwischen σ_n und σ_{n+1} der Rang von β''_m kleiner als h ist, und die Fundamentalreihe $\beta''_1, \beta''_2, \dots$ in bezug auf den dritten Bereich induziert ist.

Wir wollen jetzt beweisen, daß die (in üblicher Weise definierte) ordnungsgemäße Summe einer in bezug auf den dritten Bereich induzierten Fundamentalreihe β_1, β_2, \dots von Ordnungszahlen des dritten Bereichs, bei welcher eine solche steigende Fundamentalreihe ν_1, ν_2, \dots existiert, daß $\beta_{\nu_1}, \beta_{\nu_2}, \dots$ alle vom Range p sind, während für m zwischen ν_n und ν_{n+1} der Rang von β_m kleiner als p ist, wiederum eine Ordnungszahl des dritten Bereichs ist. Weil der Satz offenbar für $p = 0$ erfüllt ist, so dürfen wir beim Beweise des Satzes für den Rang p die Gültigkeit des Satzes für Ränge $< p$ voraussetzen. Überdies dürfen wir bei der Beweisführung annehmen, daß $\varrho_1 = 1$ ist und uns auf den ersten Fall des vorigen Absatzes beschränken, weil für den letzten Fall der Satz ohne weiteres einleuchtet. Für eine derartige im ersten Falle befindliche Fundamentalreihe β_1, β_2, \dots aber haben wir unter der Voraussetzung $\varrho_1 = 1$:

$$\lim_m \sum_{\nu=1}^m \beta_\nu = \lim_n \beta_{\varrho_n} = \lim_n \omega^{\beta'_{\varrho_n}} = \omega^{\lim_n \beta'_{\varrho_n}} = \omega^{\beta'_\omega} = \beta_\omega, \text{ wo } \beta'_\omega \text{ auf Grund}$$

der Gültigkeit des Satzes für Ränge $< p$ eine Zahl des dritten Bereichs vorstellt, so daß sich auch β_ω als eine Zahl des dritten Bereichs ergibt.

Eine Fundamentalreihe β_1, β_2, \dots von Ordnungszahlen des dritten Bereichs heißt *induziert in bezug auf den dritten Bereich*, wenn *erstens* eine solche steigende Fundamentalreihe ν_1, ν_2, \dots existiert, daß die Ränge von $\beta_{\nu_1}, \beta_{\nu_2}, \dots$ entweder beständig wachsen oder einander gleich sind, während für m zwischen ν_n und ν_{n+1} der Rang von β_m kleiner ist als der Rang von $\beta_{\nu_{n+1}}$, *zweitens* im letzteren Falle die Fundamentalreihe β_1, β_2, \dots in bezug auf den dritten Bereich induziert ist.

Schreiben wir $\omega^\omega = \omega_1$, $\omega^{\omega_1} = \omega_2$, $\omega^{\omega_2} = \omega_3$, \dots , $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n = \varepsilon$, so ist die (in üblicher Weise definierte) ordnungsgemäße Summe einer in bezug auf den dritten Bereich induzierten Fundamentalreihe von Ordnungszahlen des dritten Bereichs entweder gleich der Ordnungszahl ε oder wiederum eine Ordnungszahl des dritten Bereichs.

Wir leiten jetzt eine Reihe von sechs Eigenschaften her:

1. Zu einer beliebigen von Null verschiedenen Ordnungszahl des dritten Bereichs gehört sicher ein vollständiger Erzeugungswert, der *vollständig induziert in bezug auf den dritten Bereich* ist, d. h. dessen konstruktive Unterwerte alle Ordnungszahlen des dritten Bereichs besitzen, und für den bei jeder Anwendung der zweiten erzeugenden Operation die betreffende Fundamentalreihe von Ordnungszahlen in bezug auf den dritten Bereich induziert ist.

Für eine Ordnungszahl vom Range Null ist die Eigenschaft evident. Beim Beweise für eine Ordnungszahl vom Range p dürfen wir also voraussetzen, daß die Gültigkeit der Eigenschaft für Ordnungszahlen von Rängen $< p$ schon feststeht. Weiter dürfen wir den Beweis beschränken auf eine Ordnungszahl der Form ω^k , wo k eine Ordnungszahl des dritten Bereichs vom Range $q < p$ (für welche also die Gültigkeit unserer Eigenschaft schon feststeht) vorstellt. Wir beweisen nunmehr nach der induktiven Methode, daß derjenige zu ω^k gehörige Erzeugungswert, der einem unserer Eigenschaften genügenden zu k gehörigen Erzeugungswert entspricht, ebenfalls unserer Eigenschaft genügt.

Sei $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_m$ eine bei der Erzeugung des betreffenden zu k gehörigen Erzeugungswertes auftretende Anwendung der ersten erzeugenden Operation. Alsdann gilt unsere Eigenschaft, wenn sie für $\omega^{\tau_1}, \omega^{\tau_2}, \dots, \omega^{\tau_m}$, sowie für $h(\omega^{\tau_1}), h(\omega^{\tau_2}), \dots, h(\omega^{\tau_m})$ gilt, ebenfalls für $\omega^{\tau_1} + \omega^{\tau_1} \cdot h(\omega^{\tau_2}) = \omega^{\tau_1 + \tau_2}$, sowie für $h(\omega^{\tau_1}) + \omega^{\tau_1} \cdot h(\omega^{\tau_2}) = h(\omega^{\tau_1 + \tau_2})$; \dots ; mithin auch für $\omega^{\tau_1 + \dots + \tau_{m-1}} + \omega^{\tau_1 + \dots + \tau_{m-1}} \cdot h(\omega^{\tau_m}) = \omega^\tau$, sowie für $h(\omega^{\tau_1 + \dots + \tau_{m-1}}) + \omega^{\tau_1 + \dots + \tau_{m-1}} \cdot h(\omega^{\tau_m}) = h(\omega^\tau)$.

Sei $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \dots$ eine bei der Erzeugung des betreffenden

zu k gehörigen Erzeugungswertes auftretende Anwendung der zweiten erzeugenden Operation. Alsdann gilt unsere Eigenschaft, wenn sie für jedes ω^{τ_ν} , sowie für jedes $h(\omega^{\tau_\nu})$ gilt, nach dem vorhergehenden ebenfalls für jedes $\omega^{\tau_1+\tau_2+\dots+\tau_\nu}$, und somit (weil die Fundamentalreihe τ_1, τ_2, \dots , also auch die Fundamentalreihe $\omega^{\tau_1}, \omega^{\tau_1+\tau_2}, \omega^{\tau_1+\tau_2+\tau_3}, \dots$ bzw. die Fundamentalreihe $\omega^{\tau_1}, \omega^{\tau_1} \cdot h(\omega^{\tau_2}), \omega^{\tau_1+\tau_2} \cdot h(\omega^{\tau_3}), \dots$ in bezug auf den dritten Bereich induziert ist) auch für $\lim_{\nu} \omega^{\tau_1+\tau_2+\dots+\tau_\nu} = \omega^\tau$, sowie für $\lim_{\nu} h(\omega^{\tau_1+\tau_2+\dots+\tau_\nu}) = h(\omega^\tau)$.

Also gilt unsere Eigenschaft für ω^k .

2. Eine beliebige von Null verschiedene Ordnungszahl des dritten Bereichs, deren letzter Exponent von Null verschieden ist, ist gleich der ordnungsgemäßen Summe einer in bezug auf den dritten Bereich induzierten Fundamentalreihe von nichtverschwindenden Ordnungszahlen des dritten Bereichs.

Diese Eigenschaft ergibt sich unmittelbar mittels der induktiven Methode unter Benutzung der Eigenschaft 1.

3. Jeder Abschnitt (also auch jeder Rest und jeder Ausschnitt) einer Ordnungszahl des dritten Bereichs ist wiederum eine Ordnungszahl des dritten Bereichs (so daß der dritte ebenso wie der erste und der zweite Bereich der Ordnungszahlen ununterbrochen ist).

Die Eigenschaft braucht nur für eine beliebige von Null verschiedene Ordnungszahl des dritten Bereichs β bewiesen zu werden. Sie ergibt sich mittels der induktiven Methode an der Hand der Erzeugung eines (auf Grund von Eigenschaft 1 existierenden) zu β gehörigen vollständigen und in bezug auf den dritten Bereich vollständig induzierten Erzeugungswertes.

4. Eine Fundamentalreihe $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ von Ordnungszahlen des dritten Bereichs, deren (in üblicher Weise definierte) ordnungsgemäße Summe entweder eine Ordnungszahl des dritten Bereichs oder die Ordnungszahl ε ist, ist induziert in bezug auf den dritten Bereich.

Im ersten Falle dürfen wir, weil die ordnungsgemäße Summe von $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ voraussetzungsgemäß quasi-vollständigen wohlgeordneten Spezies entspricht und mithin feststeht, entweder daß nur eine endliche Anzahl, oder daß eine Fundamentalreihe von nichtverschwindenden α_ν existiert, annehmen, daß das letztere der Fall ist. Auch dürfen wir annehmen, daß $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots$ eine Ordnungszahl des dritten Bereichs α vom Range k ist, während die Gültigkeit der zu beweisenden Eigenschaft für Ränge der ordnungsgemäßen Summe $< k$ schon feststeht. Weiter dürfen wir den Beweis beschränken auf den Fall $\alpha = \omega^p$, wo p eine Ordnungszahl des dritten Bereichs vorstellt, deren Rang $< k$ ist.

Nehmen wir als ersten Unterfall an, daß der letzte Exponent von p

verschwindet, mithin $p = q + 1$ (wo q ebenfalls eine Ordnungszahl des dritten Bereichs, deren Rang $< k$ ist, vorstellt) und $\alpha = \lim_n \omega^q \cdot n$ (n eine unbeschränkt wachsende natürliche Zahl). Alsdann gibt es ein kleinstes ϱ_1 , zu dem ein solches $\nu_1 > 0$ bestimmt werden kann, daß $\omega^q \cdot (\nu_1 + 1) > \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\varrho_1} \geq \omega^q \cdot \nu_1$; ein kleinstes ϱ_2 , zu dem ein solches $\nu_2 > \nu_1$ bestimmt werden kann, daß $\omega^q \cdot (\nu_2 + 1) > \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\varrho_2} \geq \omega^q \cdot \nu_2$; ein kleinstes ϱ_3 , zu dem ein solches $\nu_3 > \nu_2$ bestimmt werden kann, daß $\omega^q \cdot (\nu_3 + 1) > \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\varrho_3} \geq \omega^q \cdot \nu_3$; usw. Die Exponenten der Anfangsglieder von $\alpha_{\varrho_1}, \alpha_{\varrho_2}, \dots$ müssen alle gleich q sein, während für m zwischen ϱ_n und ϱ_{n+1} die Exponenten von α_m kleiner als q sind. Mithin ist die Fundamentalreihe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ induziert in bezug auf den dritten Bereich.

Bleibt als zweiter Unterfall, daß der letzte Exponent von p nicht verschwindet. Alsdann ist (nach Eigenschaft 2) $p = \lim_\nu p_\nu$, wo jedes p_ν eine Ordnungszahl des dritten Bereichs vorstellt, und $p_{\nu+1} > p_\nu$ für jedes ν . Mithin ist auch die Ordnungszahl $\alpha = \omega^p$ gleich der Ordnungszahl $\lim_\nu \omega^{p_\nu}$ und gibt es ein kleinstes ϱ_1 , zu dem ein solches $\nu_1 > 0$ bestimmt werden kann, daß $\omega^{p_{\nu_1+1}} > \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\varrho_1} \geq \omega^{p_{\nu_1}}$; ein kleinstes ϱ_2 , zu dem ein solches $\nu_2 > \nu_1$ bestimmt werden kann, daß $\omega^{p_{\nu_2+1}} > \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\varrho_2} \geq \omega^{p_{\nu_2}}$; ein kleinstes ϱ_3 , zu dem ein solches $\nu_3 > \nu_2$ bestimmt werden kann, daß $\omega^{p_{\nu_3+1}} > \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\varrho_3} \geq \omega^{p_{\nu_3}}$; usw. Bezeichnen wir den Exponenten des Anfangsgliedes von α_ν mit α'_ν , so müssen $\alpha'_{\varrho_1}, \alpha'_{\varrho_2}, \dots$ eine beständig wachsende Fundamentalreihe bilden, während für m zwischen ϱ_n und ϱ_{n+1} die Exponenten von α_m kleiner als $\alpha'_{\varrho_{n+1}}$ sind. Weiter ist die Ordnungszahl $\lim_\nu \alpha'_{\varrho_\nu} = p$. Schreiben wir also $\alpha''_{\varrho_1} = \alpha'_{\varrho_1}$ und $\alpha''_{\varrho_{n+1}} = \alpha'_{\varrho_{n+1}} - \alpha'_{\varrho_n}$ für jedes $n \geq 1$, so ist (eben weil die zu beweisende Eigenschaft für Ränge der ordnungsgemäßen Summe $< k$ schon feststeht) die Fundamentalreihe $\alpha''_{\varrho_1}, \alpha''_{\varrho_2}, \dots$ in bezug auf den dritten Bereich induziert. Mithin sind auch zunächst die Fundamentalreihe $\omega^{\alpha'_{\varrho_1}}, \omega^{\alpha'_{\varrho_2}}, \dots$, sodann die Fundamentalreihe $\omega^{\alpha'_1}, \omega^{\alpha'_2}, \dots$ und schließlich die Fundamentalreihe $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ in bezug auf den dritten Bereich induziert.

Im zweiten Falle ist die Ordnungszahl $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots$ gleich der Ordnungszahl $\omega + \omega_1 + \omega_2 + \dots$ und gibt es ein kleinstes ϱ_1 , zu dem ein solches $\nu_1 > 0$ bestimmt werden kann, daß $\omega_{\nu_1+1} > \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\varrho_1} \geq \omega_{\nu_1}$; ein kleinstes ϱ_2 , zu dem ein solches $\nu_2 > \nu_1$ bestimmt werden kann, daß $\omega_{\nu_2+1} > \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\varrho_2} \geq \omega_{\nu_2}$; ein kleinstes ϱ_3 , zu dem ein solches $\nu_3 > \nu_2$ bestimmt werden kann, daß $\omega_{\nu_3+1} > \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\varrho_3} \geq \omega_{\nu_3}$; usw. Die Ränge von $\alpha_{\varrho_1}, \alpha_{\varrho_2}, \dots$ müssen beständig wachsen, während für m zwischen ϱ_n und ϱ_{n+1} der Rang von α_m kleiner ist als der Rang von $\alpha_{\varrho_{n+1}}$.

Mithin ist die Fundamentalreihe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ induziert in bezug auf den dritten Bereich.

5. Wenn β_1, β_2, \dots eine Fundamentalreihe von Ordnungszahlen ist, welche mit der in bezug auf den dritten Bereich induzierten Fundamentalreihe $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ von Ordnungszahlen des dritten Bereichs *additiv-zusammengehörig* ist, so gehört auch jedes β_ν zum dritten Bereich und ist die Fundamentalreihe β_1, β_2, \dots in bezug auf den dritten Bereich induziert.

Diese Eigenschaft ist eine unmittelbare Folge der Eigenschaften 3 und 4.

6. Ein beliebiger zu einer Ordnungszahl des dritten Bereichs gehöriger Erzeugungswert ist vollständig induziert in bezug auf den dritten Bereich.

Für einen vollständigen Erzeugungswert folgt diese Eigenschaft unmittelbar aus den Eigenschaften 3 und 4. Um sie für einen quasi-vollständigen Erzeugungswert (dessen Ordnungszahl wir als nichtverschwindend voraussetzen dürfen) herzuleiten, genügt es, denselben zum entsprechenden vollständigen Erzeugungswert in Beziehung zu setzen.

Eine wohlgeordnete Spezies F heißt *unbestimmt zerlegt in bezug auf den dritten Bereich*, wenn sie in solcher Weise in einen (evtl. fortfallenden) Abschnitt F' und einen (evtl. fortfallenden) Rest F'' regulär zerlegt werden kann, daß jeder Rest von F' entweder aus lauter Nullelementen besteht oder einen mit ε inhaltsgleichen Anfangsteil besitzt und F'' mit einer Spezies des dritten Bereichs inhaltsgleich ist (ohne deshalb notwendigerweise eine Ordnungszahl des dritten Bereichs besitzen zu müssen).

Eine in bezug auf den dritten Bereich unbestimmt zerlegte wohlgeordnete Spezies F braucht — schon im Falle, daß F'' mit F identisch und mit der Ordnungszahl ω_1 inhaltsgleich ist — nicht notwendig unbestimmt zerlegt in bezug auf den zweiten Bereich zu sein, wie aus folgendem Beispiel hervorgeht: Es sei F_ν für $\nu < k_1$ und G_ν für $\nu \geq k_1$ eine vollständige wohlgeordnete Spezies der Ordnungszahl ω^ν ; es bestehe F_ν für $\nu \geq k_1$ und G_ν für $\nu < k_1$ aus einem einzigen Nullelement; und es sei $F = (F_1 + F_2 + F_3 + \dots) + (G_1 + G_2 + G_3 + \dots)$.

Ebensowenig ist eine in bezug auf den zweiten Bereich unbestimmt zerlegte wohlgeordnete Spezies G notwendigerweise unbestimmt zerlegt in bezug auf den dritten Bereich, wie folgendes Beispiel zeigt: Es sei G_ν eine vollständige wohlgeordnete Spezies, welche für $\nu < k_1$ die Ordnungszahl ω_ν , für $\nu \geq k_1$ die Ordnungszahl ω_{k_1} besitzt, und es sei $G = G_1 + G_2 + G_3 + \dots$.

Eine wohlgeordnete Spezies F heißt *scharf zerlegt in bezug auf den dritten Bereich*, wenn sie in solcher Weise in einen (evtl. fortfallenden) Abschnitt F' und einen (evtl. fortfallenden) Rest F'' regulär zerlegt

werden kann, daß jeder Rest von F' entweder aus lauter Nullelementen besteht oder die Ordnungszahl ε oder einen Abschnitt der Ordnungszahl ε besitzt, und F'' eine Ordnungszahl des dritten Bereichs besitzt (hierbei können wir, ohne der wohlgeordneten Spezies F eine weitere Einschränkung aufzuerlegen, überdies fordern, daß F' entweder in Fortfall kommt oder wenigstens ein Vollelement enthält).

Eine in bezug auf den dritten Bereich scharf zerlegte wohlgeordnete Spezies ist ebenfalls scharf zerlegt in bezug auf den zweiten (mithin auch in bezug auf den ersten) Bereich. Nach dem obigen Beispiel $G = G_1 + G_2 + G_3 + \dots$, wo G_v eine vollständige wohlgeordnete Spezies der Ordnungszahl ω_v bzw. ω_k vorstellt, ist aber eine in bezug auf den zweiten Bereich scharf zerlegte wohlgeordnete Spezies nicht notwendig scharf zerlegt in bezug auf den dritten Bereich.

Eine wohlgeordnete Spezies F heißt *vollständig induziert in bezug auf den dritten Bereich*, wenn während ihrer Erzeugung bei jeder durch eine Formel $F_0 = F_1 + F_2 + \dots$ ausgedrückten Anwendung der zweiten erzeugenden Operation, wo jedes F_v nach der Formel $F_v \sim F'_v + F''_v$ in bezug auf den dritten Bereich scharf zerlegt ist, die betreffende Fundamentalreihe F_1, F_2, \dots in bezug auf den dritten Bereich induziert ist, d. h. *erstens* entweder eine unbeschränkt wachsende Fundamentalreihe ν_1, ν_2, \dots existiert, so daß jedes F'_{ν_a} Vollelemente besitzt, oder ein solches m angegeben werden kann, daß F'_v für $v > m$ aus lauter Nullelementen besteht bzw. fortfällt, *zweitens* im letzteren Falle die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von F''_1, F''_2, \dots (wobei wir einem fortfallenden F''_v die Ordnungszahl Null zusprechen) in bezug auf den dritten Bereich induziert ist. Demzufolge ist dann jedesmal auch F_0 in bezug auf den dritten Bereich scharf zerlegt.

Sei $F_{i_1 i_2 \dots i_m}$ ein Element der in bezug auf den dritten Bereich vollständig induzierten wohlgeordneten Spezies F . Der Reihe nach ergibt sich, daß dieses Element in $F_{i_1 i_2 \dots i_{m-1}}$, in $F_{i_1 i_2 \dots i_{m-2}}, \dots$, in $F_{i_1 i_2}$, in F_{i_1} und in F je einen Abschnitt und einen Rest bestimmt, die in bezug auf den dritten Bereich gleichfalls vollständig induziert sind. Mithin haben wir den Satz, daß jeder Ausschnitt sowie jeder Rest einer in bezug auf den dritten Bereich vollständig induzierten wohlgeordneten Spezies F gleichfalls in bezug auf den dritten Bereich vollständig induziert ist.

Eine in bezug auf den dritten Bereich vollständig induzierte wohlgeordnete Spezies F ist offenbar scharf zerlegt in bezug auf den dritten Bereich, weiter quasi-vollständig und, wie wir mittels der induktiven Methode ersehen, auch in bezug auf den zweiten (mithin ebenfalls in bezug auf den ersten) Bereich vollständig induziert. Schreiben wir, der scharfen

Zerlegbarkeit von F in bezug auf den dritten Bereich entsprechend, $F \sim F' + F''$, so besitzt die wohlgeordnete Spezies F' , wenn sie nicht fortfällt, entweder einen Rest der Ordnungszahl ε , oder alle nichtverschwindenden Ordnungszahlen von Resten von F' sind größer als ε .

Sei F eine in bezug auf den dritten Bereich vollständig induzierte wohlgeordnete Spezies, welche mit der ordnungsgemäßen Summe einer Fundamentalreihe F_1, F_2, \dots von in bezug auf den dritten Bereich scharf zerlegten wohlgeordneten Spezies gleichwertig ist. Wir wollen beweisen, daß die Fundamentalreihe F_1, F_2, \dots in bezug auf den dritten Bereich induziert ist, und bemerken dazu zunächst, daß für die wohlgeordnete Spezies F , eben weil sie in bezug auf den dritten Bereich vollständig induziert ist, eine der drei folgenden Eigenschaften bestehen muß: *entweder* F besitzt einen Rest mit einer Ordnungszahl des dritten Bereichs (die auch Null sein kann), *oder* von einem gewissen Reste von F besitzt jeder Rest die Ordnungszahl ε , *oder aber* jeder Rest von F besitzt eine Ordnungszahl $> \varepsilon$. Diese drei Fälle behandeln wir der Reihe nach.

Erster Fall. F besitzt einen Rest F^0 mit einer Ordnungszahl des dritten Bereichs. Für ein bestimmtes m besitzt dann F_m einen derartigen Rest $F_{m,2}$, daß die ordnungsgemäße Summe der Fundamentalreihe $F_{m,2}, F_{m+1}, F_{m+2}, \dots$ mit F^0 gleichwertig ist, so daß jedes Glied der letzteren Fundamentalreihe eine Ordnungszahl des dritten Bereichs besitzt, und die Fundamentalreihe dieser Ordnungszahlen (eben weil ihre ordnungsgemäße Summe eine Ordnungszahl des dritten Bereichs ist) in bezug auf den dritten Bereich induziert ist. Dann aber gilt dasselbe für die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von F_{m+1}, F_{m+2}, \dots bzw. für die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von $F''_{m+1}, F''_{m+2}, \dots$, mithin auch für die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies F_{m+1}, F_{m+2}, \dots , mithin auch für die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies F_1, F_2, F_3, \dots .

Zweiter Fall. Vom Reste F^0 von F besitzt jeder Rest die Ordnungszahl ε . Für ein bestimmtes m besitzt dann F_m einen derartigen Rest $F_{m,2}$, daß die ordnungsgemäße Summe der Fundamentalreihe $F_{m,2}, F_{m+1}, F_{m+2}, \dots$ mit F^0 gleichwertig ist, so daß jedes Glied der letzteren Fundamentalreihe eine Ordnungszahl des dritten Bereichs besitzt und die Fundamentalreihe dieser Ordnungszahlen (eben weil ihre ordnungsgemäße Summe gleich ε ist) in bezug auf den dritten Bereich induziert ist. Dann aber gilt dasselbe für die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von F_{m+1}, F_{m+2}, \dots bzw. für die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von $F''_{m+1}, F''_{m+2}, \dots$, mithin auch für die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies F_{m+1}, F_{m+2}, \dots , mithin auch für die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies F_1, F_2, F_3, \dots .

Dritter Fall. *Jeder Rest von F besitzt eine Ordnungszahl $> \varepsilon$.* Zu jedem m gibt es dann ein derartiges ν_m , daß für einen bestimmten (eigentlichen oder uneigentlichen) Abschnitt $F_{\nu_m}^0$ von F_{ν_m} die ordnungsgemäße Summe $F_m + F_{m+1} + \dots + F_{\nu_m-1} + F_{\nu_m}^0$ die Ordnungszahl ε besitzt, so daß wenigstens eine der wohlgeordneten Spezies $F'_m, F'_{m+1}, \dots, F'_{\nu_m-1}, F'_{\nu_m}$ existiert und Vollelemente besitzt. Das heißt aber, daß es zu jedem m ein derartiges $\varrho_m \geq m$ gibt, daß F'_{ϱ_m} existiert und Vollelemente besitzt, so daß die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies F_1, F_2, F_3, \dots in bezug auf den dritten Bereich induziert ist.

Kombinieren wir den hiermit bewiesenen Satz mit der Eigenschaft, daß jeder Ausschnitt sowie jeder Rest einer in bezug auf den dritten Bereich vollständig induzierten wohlgeordneten Spezies gleichfalls in bezug auf den dritten Bereich vollständig induziert ist, so ergibt sich, daß jede mit einer in bezug auf den dritten Bereich vollständig induzierten wohlgeordneten Spezies F gleichwertige wohlgeordnete Spezies G ebenfalls in bezug auf den dritten Bereich vollständig induziert ist (und zwar mittels der induktiven Methode an der Hand der Erzeugung von G). Auf Grund dieser Eigenschaft *bezeichnen wir eine Ordnungszahl als in bezug auf den dritten Bereich vollständig induziert, wenn jeder zu ihr gehörige vollständige Erzeugungswert in bezug auf den dritten Bereich vollständig induziert ist.*

Dann aber ist auch jeder zu ihr gehörige quasi-vollständige Erzeugungswert in bezug auf den dritten Bereich vollständig induziert. Sei nämlich β ein solcher quasi-vollständiger Erzeugungswert, daß der entsprechende vollständige Erzeugungswert α in bezug auf den dritten Bereich vollständig induziert ist. Jeder durch eine Formel $\alpha_r \sim \alpha'_r + \alpha''_r$ ausgedrückten scharfen Zerlegung in bezug auf den dritten Bereich eines konstruktiven Unterwertes α_r von α entspricht dann eine durch eine Formel $\beta_r \sim \beta'_r + \beta''_r$ ausgedrückte scharfe Zerlegung in bezug auf den dritten Bereich des entsprechenden konstruktiven Unterwertes β_r von β (welche leicht eindeutig festgelegt werden kann, z. B. durch die Forderung, daß, wenn β'_r nicht fortfällt, jeder Rest von β'_r Vollelemente aufweisen soll). Auf Grund dieser scharfen Zerlegungen seiner konstruktiven Unterwerte aber stellt sich β an der Hand seiner mit α parallelen Erzeugung unmittelbar als in bezug auf den dritten Bereich vollständig induziert heraus.

§ 6. Im vorigen haben wir gesehen, wie zur endlichen Bezeichnung von Ordnungszahlen zweierlei Elementarsymbole benutzt werden, nämlich *Zahlsymbole*, welche je eine bestimmte Ordnungszahl, und *Verknüpfungssymbole*, welche je ein aus gewissen geordneten endlichen Mengen von vorgegebenen Ordnungszahlen jedesmal eine Ordnungszahl erzeugendes Ge-

setz repräsentieren. Zur Bezeichnung der Ordnungszahlen des ersten Bereichs genügten dabei das Zahlsymbol 1 und das Verknüpfungssymbol der Addition; zur Bezeichnung der Ordnungszahlen des zweiten Bereichs kam das Zahlsymbol ω und das Verknüpfungssymbol der Multiplikation hinzu, während die weitere Hinzunahme des Verknüpfungssymbols der Potenzierung die Bezeichnung der Ordnungszahlen des dritten Bereichs erlaubte. Indem wir auf den Aufbau systematischer Theorien von Bereichen von Ordnungszahlen, welche über den dritten Bereich hinausgehen, verzichten, beschränken wir uns darauf, ein Beispiel eines Verknüpfungssymbols anzugeben, das, in Vereinigung mit den Zahlsymbolen 1 und ω und den Verknüpfungssymbolen der Addition, Multiplikation und Potenzierung, die Bezeichnung von Ordnungszahlen erlaubt, welche nicht nur größer sind als die Ordnungszahlen des dritten Bereichs, sondern auch größer als die Ordnungszahlen ε , $\varepsilon_1 = \varepsilon^\varepsilon$, $\varepsilon_2 = \varepsilon^{\varepsilon_1}$, $\varepsilon_3 = \varepsilon^{\varepsilon_2}$, \dots , $\varepsilon' = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$.

Es sei α ein beliebiger basierter quasi-vollständiger Erzeugungswert, β ein beliebiger quasi-vollständiger Erzeugungswert. Alsdann definieren wir den symbolischen Ausdruck $\{\alpha, \beta\}$ mittels der induktiven Methode an der Hand der Erzeugung von β durch folgende Festsetzungen:

Wenn β einer aus einem einzigen Nullelemente bestehenden Spezies entspricht, so ist $\{\alpha, \beta\} = \alpha$.

Wenn β einer aus einem einzigen Vollelemente bestehenden Spezies entspricht, so ist $\{\alpha, \beta\} = \alpha^\alpha$.

Wenn $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation und der symbolische Ausdruck $\{\alpha, \beta_\nu\}$ für $\nu = 1, 2, \dots, m$ für jeden basierten quasi-vollständigen Erzeugungswert α als basierter quasi-vollständiger Erzeugungswert definiert ist, während überdies ein beliebiger basierter quasi-vollständiger Erzeugungswert α für $\nu = 1, 2, \dots, m$ einen Abschnitt von $\{\alpha, \beta_\nu\}$ darstellt, so ist $\{\alpha, \beta\} = \{\alpha, \beta_1\} + [\{\{\alpha, \beta_1\}, \beta_2\} - \{\alpha, \beta_1\}] + [\{\{\alpha, (\beta_1 + \beta_2)\}, \beta_3\} - \{\alpha, (\beta_1 + \beta_2)\}] + \dots + [\{\{\alpha, (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{m-1})\}, \beta_m\} - \{\alpha, (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{m-1})\}]$, so daß auch $\{\alpha, \beta\}$ für jeden basierten quasi-vollständigen Erzeugungswert α als basierter quasi-vollständiger Erzeugungswert definiert ist, während überdies ein beliebiger basierter quasi-vollständiger Erzeugungswert α einen Abschnitt von $\{\alpha, \beta\}$ darstellt.

Wenn $\beta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation und $\{\alpha, \beta_\nu\}$ für jeden basierten quasi-vollständigen Erzeugungswert α und jedes ν als basierter quasi-vollständiger Erzeugungswert definiert ist, während überdies ein beliebiger basierter quasi-vollständiger Erzeugungswert α für jedes ν einen Abschnitt von $\{\alpha, \beta_\nu\}$ darstellt, so ist $\{\alpha, \beta\} = \{\alpha, \beta_1\} + [\{\alpha, (\beta_1 + \beta_2)\} - \{\alpha, \beta_1\}] + [\{\alpha, (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)\} - \{\alpha, (\beta_1 + \beta_2)\}] + \dots$

$= \lim \{ \alpha, (\beta_1 + \dots + \beta_r) \}$, so daß auch $\{ \alpha, \beta \}$ für jeden basierten quasi-vollständigen Erzeugungswert α als basierter quasi-vollständiger Erzeugungswert definiert ist, während überdies ein beliebiger basierter quasi-vollständiger Erzeugungswert α einen Abschnitt von $\{ \alpha, \beta \}$ darstellt.

Auf Grund dieser Definition beweist man, in derselben Weise wie die analoge Eigenschaft der Potenz α^β , daß die Gleichwertigkeit bzw. Inhaltsgleichheit von β und β^0 einerseits und von α und α^0 andererseits, die Gleichwertigkeit bzw. Inhaltsgleichheit von $\{ \alpha, \beta \}$ und $\{ \alpha^0, \beta^0 \}$ nach sich zieht. Der symbolische Ausdruck $\{ \alpha, \beta \}$ ist mithin nicht nur für einen beliebigen basierten quasi-vollständigen Erzeugungswert α und einen beliebigen quasi-vollständigen Erzeugungswert β als basierter quasi-vollständiger Erzeugungswert, sondern auch für eine beliebige nichtverschwindende Ordnungszahl α und eine beliebige Ordnungszahl β als nichtverschwindende Ordnungszahl definiert.

Wie weit man indessen zur Bezeichnung von Ordnungszahlen mit der Einführung neuer Zahlsymbole und Verknüpfungssymbole auch fortfährt, so läßt sich dabei doch die Spezies der eingeführten Symbole in jedem Stadium als endlich betrachten, weil jede Definition einer Fundamentalreihe von Symbolen τ_1, τ_2, \dots auf die Definition eines *einzigen*, auf ein *beliebiges* Element von A , mithin auf eine *beliebige endliche* Gruppe von Symbolen 1 bezüglichen Symboles τ hinauskommt. Wenn wir nun nur solche Verknüpfungssymbole zulassen, welche je aus einer beliebig vorgegebenen endlichen geordneten Menge von Ordnungszahlen entweder eine Ordnungszahl erzeugen oder unmöglich eine Ordnungszahl erzeugen können, so bilden in jedem Stadium der Symboleinführung diejenigen Zusammensetzungen der schon eingeführten Elementarsymbole, welche Ordnungszahlen repräsentieren, eine zählbare (und selbstverständlich auch abzählbar unendliche) Spezies, von der übrigens mehrere Elemente dieselbe Ordnungszahl repräsentieren können.

Hieraus folgern wir die Unmöglichkeit, ein System σ von Zahlsymbolen und Verknüpfungssymbolen der angegebenen Art einzuführen, das die Darstellung *aller* Ordnungszahlen erlaubt. Nehmen wir nämlich einen Augenblick die Existenz eines diese Eigenschaft besitzenden Systems σ an, zählen wir diejenigen durch σ gelieferten endlichen Zusammensetzungen von Elementarsymbolen, welche nichtverschwindende Ordnungszahlen repräsentieren, als eine Fundamentalreihe ab und sei β_r die dabei der natürlichen Zahl r entsprechende Ordnungszahl. Alsdann kann die Ordnungszahl $\beta_\omega = \sum_{r=1}^{\infty} \beta_r$ keinem β_r gleich sein, womit wir zu einem Widerspruch gelangt sind.

In analoger Weise zeigt man, daß die Spezies O der Ordnungszahlen *nicht aufzählbar* ist. Andererseits kann man jeder endlichen Ordnungszahl

die entsprechende Nummer der Folge ζ und jeder unendlichen Ordnungszahl die Nummer 1 zuordnen. Bezeichnen wir also die Kardinalzahl von O mit o , so haben wir nebst der Beziehung $o \cong a$ die Unmöglichkeit der Beziehung $a \cong o$, mithin die Beziehung $o \succ a$, d. h. O ist von größerem Gewicht als A .

(Eingegangen am 28. 11. 1925.)

Berichtigung

zu dem Aufsatz von L. E. J. Brouwer: „Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik. II“ in Band 95, S. 453—472.

S. 470, Z. 4 v. u. statt „ $2(z_v - 1)$ “ lies „ $2z_v - 1$ “ (der Fehler ist nach der Druckfertigerklärung infolge eines Versehens der Geschäftsführung entstanden).