Simpliziale Approximationen in der allgemeinen Topologie.

Von

Paul Alexandroff in Moskau.

In dieser Arbeit will ich zeigen, daß kompakte metrisierbare topologische Räume sich auf eine bestimmte Weise durch aus endlich-vielen Simplexen zusammengesetzte Gebilde (n-dimensionale Komplexe) approximieren lassen; daß, umgekehrt, jeder auf diese Weise approximierte Raum kompakt und metrisierbar ist; daß dabei ein n-dimensionaler Raum[1]) sich durch (im klassischen Sinne) n-dimensionale Komplexe approximieren läßt, und n-dimensionale Komplexe höchstens n-dimensionale Räume approximieren.

Die Kenntnis der Grundbegriffe der Dimensionstheorie[2]) wird im folgenden vorausgesetzt.

I. n-dimensionale Komplexe.

1. Wir verstehen unter einem *höchstens n-dimensionalen Komplexe* ein (abstrakt gegebenes) endliches System von höchstens n-dimensionalen Simplexen, von denen je zwei entweder zueinander fremd sind, oder einen

[1]) S. zur Orientierung in der allgemeinen Dimensionstheorie (außer der 1913 im Journ. f. Math. **142** erschienenen kurzen Brouwerschen Note, welche dieses Untersuchungsgebiet zuerst eröffnet hat):

Paul Urysohn, Les multiplicités Cantoriennes, Comptes Rendus de l'Ac. des Sc. de Paris **175** (septembre 1922); Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes, Fund. Math. **7** und **8**, sowie den Auszug aus der letzteren Arbeit, die demnächst in den Math. Annalen erscheint;

Karl Menger, Über die Dimension von Punktmengen, Monatshefte f. Math. u. Phys. **33** u. **34**.

[2]) Siehe die Fußnote [1]). Im folgenden werden insbesondere die Urysohnschen Arbeiten zitiert. Vor allem ist das Kapitel V des Urysohnschen „Mémoire ...“ für das Folgende von grundlegender Bedeutung.

aus einer gemeinsamen Seite[3]) der beiden Simplexe bestehenden Durchschnitt besitzen. Falls dabei der eine Simplex p- und der andere q-dimensional ist ($p < q$), so kann der q-dimensionale Simplex den p-dimensionalen als eine seiner Seiten enthalten.

Ein höchstens n-dimensionaler Komplex heißt *n-dimensional*, wenn unter seinen Simplexen wenigstens ein n-dimensionaler vorkommt.

Wir werden immer zu den den Komplex bildenden Simplexen auch alle ihre Seiten zählen, so daß, wenn ein Komplex

$$(1) \qquad \mathfrak{K} = \{S_1, S_2, \ldots, S_\lambda\}$$

vorliegt (wobei $S_1, S_2, \ldots, S_\lambda$ die den Komplex $\mathfrak{K}$ bildenden Simplexe sind), sich unter den $S_1, S_2, \ldots, S_\lambda$ auch alle Seiten dieser Simplexe befinden. Diese Eigenschaft eines Komplexes dürfte als seine *Vollständigkeit* bezeichnet werden und wird im folgenden stets vorausgesetzt.

2. Es soll von Anfang an folgende Bemerkung gemacht werden. In der Topologie, ebenso wie in der elementaren Geometrie, ist ein n-dimensionaler Simplex immer durch seine $n+1$ Eckpunkte vollständig bestimmt, so daß zwei dieselben Eckpunkte besitzende Simplexe untereinander identisch sind.

Daraus folgt, daß der *topologische Simplex nichts anderes als das System seiner $n+1$ Eckpunkte ist,* also eigentlich eine endliche Menge von Elementen (eines bestimmten Elementenvorrates), die „Eckpunkte" heißen. Die Dimension des Simplexes ist einfach die um eine Einheit verminderte Kardinalzahl dieser Menge; die Seiten des Simplexes sind Teilmengen derselben endlichen Menge.

Wir können also folgende Definition aufstellen:

Es sei eine unendliche Menge W gegeben, deren Elemente *Eckpunkte* heißen sollen, und von der weiter nichts vorausgesetzt wird.

Eine aus $n+1$ verschiedenen Elementen der Menge W bestehende Menge S heißt ein *n-dimensionaler Simplex* ($n = 0, 1, 2, \ldots$); die echten Teilmengen der Menge S (die also r-dimensionale Simplexe sind, $0 \leqq r \leqq n-1$) heißen (die r-dimensionalen) *Seiten* des Simplexes S. Der Simplex S selbst kann auch als seine uneigentliche (n-dimensionale) Seite betrachtet werden.

Der Simplex S heißt *größer* als T, falls T eine Seite von S ist.

Zwei Simplexe heißen *benachbart*, falls sie (als endliche Mengen betrachtet) einen nichtleeren Durchschnitt haben. Dieser Durchschnitt ist dann stets eine gemeinsame Seite der beiden Simplexe.

Eine endliche Menge von höchstens n-dimensionalen Simplexen, unter

[3]) Dabei ist unter einer 0-dimensionalen Seite ein Eckpunkt zu verstehen.

denen wenigstens ein n-dimensionaler vorkommt, heißt ein *n-dimensionaler Komplex*; diese Simplexe selbst und ihre Seiten heißen *Elemente des Komplexes*[4]).

II. Ein einleitendes elementares Beispiel.

3. Es sei R eine Kreislinie. Wir teilen R in 2^{m+1} (gleiche) Bögen und nennen $\mathfrak{K}_m^*$ den, aus diesen Bögen (und ihren Endpunkten) gebildeten, geometrisch vorliegenden, eindimensionalen Komplex. Jeder Punkt $x \subset R$ ist entweder nur in einem Bogen aus $\mathfrak{K}_m^*$ enthalten, oder es ist x der gemeinsame Endpunkt zweier Bögen.

Indem wir durch $\mathfrak{K}_m$ den zu $\mathfrak{K}_m^*$ dualen Komplex[5]) bezeichnen, *entspricht* jedem Punkte $x \subset R$ entweder ein einziges 0-dimensionales Element von $\mathfrak{K}_m$, oder zwei zu einem und demselben 1-dimensionalen Elemente gehörende 0-dimensionale Elemente, und dann dieses 1-dimensionale Element selbst.

Jedem Punkte $x \subset R$ *entspricht* jedenfalls ein einziges *Maximalelement* von $\mathfrak{K}_m$ (d. h. ein in keinem größeren, dem Punkte x entsprechenden Elemente enthaltenes Element), und dann entsprechen dem Punkte x auch alle (höchstens 2) Seiten dieses Maximalelementes.

Da dies für jedes m gilt, so enspricht jedem Punkte $x \subset R$ *eindeutig* eine *Kette*

$$S_{1,i_1^x}, S_{2,i_2^x}, \ldots, S_{m,i_m^x}, \ldots,$$

wobei S_{m,i_m^x} das *einzige*, dem Punkte x entsprechende Maximalelement aus $\mathfrak{K}_m$ ist.

4. Nun müssen wir genauer einsehen, was eigentlich eine Kette ist.

Verschiedene Komplexe $\mathfrak{K}_m$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ werden untereinander dadurch verbunden, daß gewisse Systeme von Simplexen, die zu verschiedenen $\mathfrak{K}_m$ gehören, wenigstens *einem* Punkte $x \subset R$ *gleichzeitig entsprechen* (dabei jedoch nicht notwendig als Maximalelemente). Falls wir durch S_{m,i_m} irgendein Element des Komplexes $\mathfrak{K}_m$ und durch S_{m,i_m}^* das be-

---

[4]) Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß die ganze kombinatorische Topologie sich auf diesen Boden übertragen läßt. Der Ansatz dazu ist in meiner Arbeit „*Zur Begründung der n-dimensionalen mengentheoretischen Topologie* (Math. Ann. **94**, S. 296) gegeben.

Ich möchte noch besonders betonen, daß dieser Standpunkt überhaupt erst dadurch ermöglicht ist, daß Brouwer zum ersten Male die Mannigfaltigkeitstopologie auf den Begriff des Simplexes gestützt hatte (Math. Ann. **70**, **71**, **72**).

[5]) Der aus $\mathfrak{K}_m^*$ dadurch entsteht, daß man jedes 0-dimensionale Element von $\mathfrak{K}_m^*$ durch ein 1-dimensionales ersetzt und umgekehrt.

treffende Element von $\mathfrak{K}_m^*$ bezeichnen, nennen wir ein System von (0- oder 1-dimensionalen) Elementen

$$(3_0) \qquad [S_{1,i_1}, S_{2,i_2}, \ldots, S_{m,i_m}]$$

ausgezeichnet, falls alle diese Elemente gleichzeitig einem Punkte $x \subset R$ entsprechen (d. h. einfach, falls der Durchschnitt aller Simplexe $S^*_{1,i_1}, S^*_{2,i_2}, \ldots, S^*_{m,i_m}$ nicht leer ist).

Eine Folge von der Gestalt

$$(4_0) \qquad S_{1,i_1}, S_{2,i_2}, \ldots, S_{m,i_m}, \ldots$$

soll dann *ausgezeichnet* heißen, wenn jeder ihrer Abschnitte $[S_{1,i_1}, S_{2,i_2}, \ldots, S_{m,i_m}]$ ausgezeichnet ist.

Eine Kette ist dann nichts anderes als eine ausgezeichnete Folge, die ihre Eigenschaft, ausgezeichnet zu sein, verliert, wenn man irgendeins ihrer Elemente durch ein größeres (also ein 0-dimensionales Element durch ein eindimensionales) ersetzt.

Wir haben gesehen, daß zu jedem Punkte $x \subset R$ eine einzige Kette (4_0) gehört, und dann ist x der einzige, in allen Simplexen S^*_{m,i_m} enthaltene Punkt.

Aber auch umgekehrt bestimmt vermöge letzterer Vorschrift jede Kette einen einzigen (zu allen S^*_{m,i_m} gehörenden) Punkt $x \subset R$.

Zwei Ketten, (4_0) und

$$(5_0) \qquad S_{1,j_1}, S_{2,j_2}, \ldots, S_{m,j_m}, \ldots$$

sind verschieden, falls wenigstens für ein m S_{m,j_m} von S_{m,i_m} verschieden ist. Dann sind aber auch die entsprechenden Punkte x und y verschieden, und folglich sind von einem bestimmten m an die beiden Simplexe S_{m,i_m} und S_{m,j_m} nicht nur verschieden, sondern auch zueinander fremd.

Zwei verschiedene Ketten (4_0) und (5_0) können also nicht unendlich viele benachbarte Elemente S_{m,i_m} und S_{m,j_m} enthalten, d. h. die Bedingung 4° des § 7 ist erfüllt.

Offenbar sind auch die Bedingungen 1°, 2°, 3° des § 6 erfüllt.

5. Wir betrachten jetzt folgendes, die Kreislinie als topologischen Raum definierendes Umgebungssystem.

Falls x ein gemeinsamer Endpunkt zweier Bögen des Komplexes $\mathfrak{K}_m^*$ ist, so erklären wir als die m-te Umgebung $U_m(x)$ des Punktes x die Menge aller Punkte der beiden in x anstoßenden Bögen von $\mathfrak{K}_m^*$, mit Ausnahme der beiden von x verschiedenen Endpunkte dieser Bögen.

Falls aber x nur zu einem Bogen des Komplexes $\mathfrak{K}_m^*$ gehört, so soll $U_m(x)$ aus allen inneren Punkten dieses Bogens bestehen.

Auf diese (übrigens einzig denkbare) Weise wird für jeden Punkt x und jedes m eine $U_m(x)$ bestimmt.

Es sei nun

$$S_{1,i_1}, S_{2,i_2}, \ldots, S_{m,i_m}, \ldots$$

die dem Punkte x entsprechende Kette und y irgendein anderer Punkt der Kreislinie R. Wenn man durch

$$S_{1,j_1}, S_{2,j_2}, \ldots, S_{m,j_m}, \ldots$$

die dem Punkte y entsprechende Kette bezeichnet, sieht man sofort ein, daß y dann und nur dann zu $U_m(x)$ gehört, wenn $S_{1,j_1}, S_{2,j_2}, \ldots, S_{m,j_m}$ bzw. in $S_{1,i_1}, S_{1,i_2}, \ldots, S_{m,i_m}$ enthalten sind.

Es gilt also folgende Regel:

Die m-te Umgebung des Punktes x besteht aus denjenigen Punkten, deren entsprechende Ketten als ihre ersten m-Elemente (echte oder unechte) Teilelemente der betreffenden Elemente der zu x gehörigen Kette haben.

Auf diese Weise wird unsere Kreislinie wirklich *durch die Folge* (2_0) als topologischer Raum definiert. Die „topologische Approximation" der Kreislinie durch die Komplexe (2_0) erhält dadurch einen ganz präzisen und mit unsrer Anschauung vollkommen übereinstimmenden Sinn. Wir wollen nun zeigen, daß dieser Sinn auch für beliebige kompakte metrisierbare Räume *derselbe* bleibt.

III. Der allgemeine Begriff der topologischen Approximation.

6. Definition I. Eine abzählbare Folge von Komplexen

$$(2) \qquad \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_m, \ldots, \qquad \mathfrak{K}_m = \{S_{m,1}, S_{m,2}, \ldots, S_{m,\lambda_m}\}$$

wird zu einem *Spektrum*, sobald ein Gesetz gegeben ist, welches gewisse, zu *verschiedenen* $\mathfrak{K}_m$ gehörige Elemente zu *ausgezeichneten Systemen*, die auch *Gruppen* heißen sollen, derart zuordnet, daß dabei folgende Bedingungen zur Geltung gebracht werden:

1°. *Jede Gruppe*[6]) *hat die Gestalt*

$$(3) \qquad [S_{1,i_1}, S_{2,i_2}, \ldots, S_{m,i_m}].$$

2°. *Jeder Abschnitt einer Gruppe* (3) (d. h. jedes System $[S_{1,i_1}, \ldots, S_{m',i_{m'}}]$, wo $m' < m$ ist) *ist wiederum eine Gruppe, und umgekehrt ist jedes Element* S_{m,i_m} *wenigstens in einer Gruppe, und jede Gruppe als Abschnitt in einer anderen Gruppe enthalten.*

3°. *Jedes ausgezeichnete System bleibt ausgezeichnet, falls man in ihm irgendein Element durch ein Teilelement* (= eine Seite) *ersetzt.*

Definition II. Ein Spektrum heißt *endlich-* und zwar *n-dimensional*, wenn alle Komplexe $\mathfrak{K}_m$, aus denen es besteht, n-dimensional sind.

---

[6]) Es sei nochmals bemerkt, daß in dieser Arbeit die Ausdrücke „Gruppe" und „ausgezeichnetes System" gleichbedeutend sind.

Ein Spektrum heißt *unendlich* dimensional, falls die Dimension von $\mathfrak{K}_m$ mit m unbegrenzt wächst.

7. Es sei ein Spektrum (2) gegeben.

Definition III. Eine unendliche Folge von Elementen

(4) $$S_{1,i_1}, S_{2,i_2}, \ldots, S_{m,i_m}, \ldots$$

soll *ausgezeichnet* heißen, falls jeder ihrer Abschnitte $[S_{1,i_1}, S_{2,i_2}, \ldots, S_{m,i_m}]$ ausgezeichnet ist.

Definition IV. Eine ausgezeichnete Folge heißt eine *Kette*, wenn ihre Eigenschaft, ausgezeichnet zu sein, verloren geht, sobald man irgendeins ihrer Elemente durch ein größeres Element ersetzt.

Definition V. Ein Spektrum soll ein *approximierendes* Spektrum heißen, wenn es folgende weitere Bedingung erfüllt:

4°. *Zwei verschiedene Ketten*

(4) $$S_{1,i_1}, S_{2,i_2}, \ldots, S_{m,i_m}, \ldots$$

und

(5) $$S_{1,j_1}, S_{2,j_2}, \ldots, S_{m,j_m}, \ldots$$

können höchstens endlichviele benachbarte Elemente S_{m,i_m} und S_{m,j_m} enthalten.

(Zwei Ketten heißen dabei verschieden, falls wenigstens ein Element S_{m,i_m} der einen von dem entsprechenden Elemente S_{m,j_m} der anderen Kette verschieden ist.)

8. Unter den Voraussetzungen 1° bis 4° soll ein approximierendes Spektrum den („durch dieses Spektrum *approximierten*") Raum R in eindeutiger Weise folgendermaßen bestimmen:

Jede Kette (4) des Spektrums soll „Punkt des Raumes R" heißen,

(6) $$x = (S_{1,i_1}, S_{2,i_2}, \ldots, S_{m,i_m}, \ldots);$$

der Simplex S_{m,i_m} soll die *m-te Koordinate des Punktes x* heißen, *und die m-te Umgebung des Punktes x soll aus allen denjenigen Punkten*

(7) $$y = (S_{1,j_1}, S_{2,j_2}, \ldots, S_{m,j_m}, \ldots)$$

bestehen, deren sämtliche ersten m Koordinaten in den entsprechenden Koordinaten des Punktes x enthalten[6a]) *sind*:

(8) $$S_{k,j_k} \subset S_{k,i_k}, \quad \text{für alle } k \leqq m.$$

[6a]) Der Leser sei nochmals darauf aufmerksam gemacht, daß eine Koordinate ein Simplex, und ein Simplex eine endliche Menge ist. — Es sei noch endlich die selbstverständliche Bemerkung gemacht, daß zwei verschiedene Ketten als verschiedene Punkte des Raumes R betrachtet werden.

9. Es besteht

IV. Der Hauptsatz.

Jeder durch ein (approximierendes) Spektrum definierte Raum ist ein kompakter metrisierbarer topologischer Raum. Umgekehrt kann jeder kompakte metrisierbare Raum durch ein Spektrum approximiert werden; dabei ist die Dimension des Raumes der kleinsten Zahl (n oder ∞) gleich, die als Dimensionszahl eines diesen Raum definierenden Spektrums vorkommt.

Beweis. Vorbemerkung. Wir machen zuerst noch einen rein terminologischen Schritt in der Definition des Simplexes weiter: Im § 2 haben wir betont, daß wir keine Voraussetzung über die Natur der Elemente der Menge W machen; da aber für unsere Zwecke genügt diese Menge als eine abzählbare Menge vorauszusetzen, so treffen wir von jetzt an die Verabredung, *W sei die Menge aller natürlichen Zahlen.* Ein n-dimensionaler Simplex wird dadurch zu einer, *aus $n+1$ verschiedenen natürlichen Zahlen* bestehenden, Menge [7]).

10. Zuerst beweisen wir, daß unser durch das Spektrum (2) definierter Raum R ein topologischer Raum ist.

A [8]). Jeder Punkt x hat wenigstens eine Umgebung (in unserem Falle sogar abzählbar viele Umgebungen) und ist in jeder seiner Umgebungen enthalten.

B. Es sei $U_p(x)$ die p-te und $U_q(x)$ die q-te ($p \leqq q$) Umgebung des Punktes x. Dann ist offenbar $U_p(x) \cdot U_q(x) = U_q(x)$.

C. Es sei der Punkt

$$(7) \qquad y = (S_{1,j_1}, S_{2,j_2}, \ldots, S_{m,j_m}, \ldots)$$

in $U_m(x)$ enthalten, wobei

$$(6) \qquad x = (S_{1,i_1}, S_{2,i_2}, \ldots, S_{m,i_m}, \ldots)$$

ist. Dann gelten die Inklusionen

$$(8) \qquad S_{k,j_k} \subset S_{k,i_k}, \quad \text{für alle } k \leqq m.$$

Falls nun z ein Punkt von $U_m(y)$ ist, wobei

$$(9) \qquad z = (S_{1,h_1}, S_{2,h_2}, \ldots, S_{m,h_m}, \ldots),$$

so ist

$$S_{k,h_k} \subset S_{k,j_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

[7]) Es braucht kaum erwähnt zu werden, daß diese Verabredung nur aus Bequemlichkeitsgründen getroffen und keineswegs wesentlich ist; übrigens berührt sie auch gar nicht die Allgemeinheit unserer Überlegungen.

[8]) A, B, C, D sind die bekannten vier Hausdorffschen Axiome des topologischen Raumes bzw. die Beweise ihrer Geltung im Raume R.

also zufolge (8)

$$S_{k,h_k} \subset S_{k,i_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

was nichts anderes als $z \subset U_m(x)$ bedeutet. Da z ein beliebiger Punkt von $U_m(y)$ war, so ist $U_m(y) \subset U_m(x)$.

D. Es seien x und y ((6) und (7)) zwei beliebige (verschiedene) Punkte von R. Dann sind die Ketten (6) und (7) verschieden. Es gibt also (zufolge der Voraussetzung 4° des § 7) ein erstes derartiges m, daß S_{k,i_k} und S_{k,j_k} nicht benachbart sind, sobald $k \geqq m$ ist.

Ich behaupte nun, daß $U_m(x) \cdot U_m(y) = 0$ ist. Es sei, entgegen der Annahme, z ein (durch (9) gegebener) Punkt von $U_m(x) \cdot U_m(y)$. Dann ist, u. a.,

$$S_{m,h_m} \subset S_{m,i_m} \quad \text{und} \quad S_{m,h_m} \subset S_{m,j_m},$$

was der Definition der Zahl m widerspricht.

Die Umgebungen $U_m(x)$ genügen also den vier Hausdorffschen Axiomen A, B, C, D, was beweist, daß R ein topologischer Raum ist.

Bemerkung. Um dieses letztere Ergebnis zu erhalten, würde es genügen, die Voraussetzung 4° des § 7 durch eine viel schwächere zu ersetzen, nämlich:

Falls für jedes m $S_{m,i_m} \cdot S_{m,j_m} \neq 0$, so sind die Ketten (3) und (5) identisch.

Die Notwendigkeit der Voraussetzung 4° in der ursprünglichen Gestalt wird sich aber bald erweisen.

11. *R ist kompakt.* Es sei in der Tat

$$(10) \qquad M = \{x_\nu\} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots \text{ in infinitum})$$

eine abzählbare, in R gelegene Menge, wobei für jedes ν

$$(11) \qquad x_\nu = (S_{1,i_1^{(\nu)}}, S_{2,i_2^{(\nu)}}, \ldots, S_{m,i_m^{(\nu)}}, \ldots)$$

ist.

Da $i_1^{(\nu)} \leqq \lambda_1$ ist (vgl. (2)), so gibt es wenigstens eine natürliche Zahl $i_1^0 \leqq \lambda_1$ von der Beschaffenheit, daß für unendlich viele Werte von ν

$$(12_1) \qquad i_1^{(\nu)} = i_1^0$$

ist, und dann ist $[S_{1,i_1^0}]$ eine Gruppe. ($[S_{1,i_1^0}]$ bedeutet dabei die aus dem einzigen Elemente S_{1,i_1^0} bestehende Menge.)

Es sei jetzt vorausgesetzt, daß wir eine Gruppe

$$[S_{1,i_1^0}, S_{2,i_2^0}, \ldots, S_{m,i_m^0}]$$

von der Art bereits konstruiert haben, daß unendlich viele Werte von ν existieren, für die gleichzeitig

$$(12_m) \qquad i_1^{(\nu)} = i_1^0, \ldots, i_m^{(\nu)} = i_m^0$$

ist. Das heißt, daß es unter den Punkten (11) unendlich viele gibt, deren erste m Koordinaten der Reihe nach

$$(13_m) \qquad S_{1, i_1^0}, S_{2, i_2^0}, \ldots, S_{m, i_m^0}$$

sind. Da nun die $(m+1)$-te Koordinate nur endlich viele Werte annehmen kann, so existiert ein bestimmtes i_{m+1}^0 von der Art, daß es (unter denjenigen x_ν, deren erste m Koordinaten der Reihe nach die Werte (13_m) haben) unendlich viele Punkte gibt, die den Simplex S_{m+1, i_{m+1}^0} als ihre $(m+1)$-te Koordinate haben. In dieser Weise erhalten wir eine Folge

$$(4_0) \qquad S_{1, i_1^0}, S_{2, i_2^0}, \ldots, S_{m, i_m^0}, \ldots,$$

die u. a. die Eigenschaft hat, daß für beliebiges m die Menge der ersten m Elemente von (4_0) eine Gruppe ist. (4_0) ist also eine ausgezeichnete Folge. Falls überdies (4_0) eine Kette ist, so ist unsere Konstruktion beendigt. Falls nicht, unterziehen wir (4_0) folgender Transformation. Wir ersetzen, wenn dies möglich ist, ohne daß die Eigenschaft der Folge (4_0), ausgezeichnet zu sein dabei leide, S_{1, i_1^0} durch ein größeres Element S_{1, i_1^1} möglichst hoher Dimension und lassen alle anderen Elemente von (4_0) ruhig auf ihren Plätzen stehen. Dadurch wird (4_0) in eine Folge (4_1) verwandelt, deren Elemente S_{m, i_m^1} heißen sollen $(m = 1, 2, \ldots$, in inf.). (4_1) ist dann wieder eine ausgezeichnete Folge.

Es sei die ausgezeichnete, aus den Elementen S_{m, i_m^r} bestehende Folge (4_r) bereits konstruiert. Wir untersuchen das Element S_{r+1, i_{r+1}^r} und ersetzen, falls dabei der ausgezeichnete Charakter von (4_r) nicht zerstört wird, dieses Element durch ein größeres, möglichst hoher Dimension. Falls letzteres aber unmöglich ist, lassen wir S_{r+1, i_{r+1}^r} unverändert. Alle übrigen Elemente von (4_r) lassen wir jedenfalls unverändert. Die durch dieses Verfahren entstandene Folge ist ausgezeichnet und soll (4_{r+1}) heißen; ihre Elemente werden dementsprechend durch $S_{m, i_m^{r+1}}$ bezeichnet.

In dieser Weise entsteht für jedes r die ausgezeichnete Folge (4_r), wobei

$$(14) \qquad S_{r, i_r^r} = S_{r, i_r^{r+1}} = S_{r, i_r^{r+2}} = \ldots \text{ in inf.}$$

ist.

Wir setzen jetzt für jedes m

$$i_m = i_m^m$$

und erhalten so die (auf Grund der Identitäten (14)) *ausgezeichnete* Folge

$$(4) \qquad S_{1, i_1}, S_{2, i_2}, \ldots, S_{m, i_m}, \ldots .$$

Ich behaupte nun, daß letztere Folge eine Kette ist.

In der Tat, wenn dies nicht der Fall wäre, so könnte man in (4) ein bestimmtes Element S_{m,i_m} durch ein größeres Element S_{m,i'_m} ersetzen, so daß dadurch die ausgezeichnete Folge

$$(4') \qquad S_{1,i_1},\ S_{2,i_2},\ \ldots,\ S_{m,i'_m},\ \ldots$$

entsteht. Dann wäre aber auch die Folge

$$(4'_m) \qquad S_{1,i_1^m},\ S_{2,i_2^m},\ \ldots,\ S_{m,i'_m},\ S_{m+1,i_{m+1}^m},\ \ldots$$

ausgezeichnet, und das Element S_{m,i_m^m} wäre falsch gewählt.

Die Ketteneigenschaft der Folge (4) und die Existenz des Punktes

$$(6) \qquad x = (S_{1,i_1},\ S_{2,i_2},\ \ldots,\ S_{m,i_m},\ \ldots)$$

ist hiermit bewiesen.

Nun haben wir bereits gesehen, daß es für jedes m unendlich viele Punkte x_ν (siehe (11)) gibt, die gleichzeitig den Inklusionen

$$\begin{gathered} S_{1,i_1^{(\nu)}} \subset S_{1,i^0} \subset S_{1,i_1} \\ S_{2,i_2^{(\nu)}} \subset S_{2,i_2^0} \subset S_{1,i_2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ S_{m,i_m^{(\nu)}} \subset S_{m,i_m^0} \subset S_{m,i_m} \end{gathered}$$

genügen.

Das bedeutet aber, daß x ein Häufungspunkt der Menge (11) ist.

Die Kompaktheit des Raumes R ist hiermit bewiesen.

Um jetzt zu zeigen, daß R nicht nur kompakt, sondern auch metrisierbar ist, genügt es, einem bekannten Urysohnschen Metrisationssatze gemäß, die Geltung des II. Abzählbarkeitsaxioms in R zu beweisen. Zu diesem Zwecke betrachten wir einen beliebigen, durch (6) gegebenen Punkt x des Raumes R und eine beliebige Umgebung $U_m(x)$ dieses Punktes.

$U_m(x)$ ist die Menge derjenigen Punkte von R, deren erste m Koordinaten der Reihe nach in $S_{1,i_1}, S_{2,i_2}, \ldots, S_{m,i_m}$ enthalten sind. Jede $U_m(x)$ ist folglich durch die Kenntnis der natürlichen Zahlen $i_1, i_2, \ldots, i_m$ in der hier gegebenen Reihenfolge vollständig bestimmt. Da es aber nur abzählbar viele endliche Folgen natürlicher Zahlen gibt, so ist auch die Menge *aller* verschiedenen $U_m(x)$ abzählbar, womit die Metrisierbarkeit des Raumes R bewiesen ist.

Von jetzt an sei R als ein kompakter metrischer Raum gedacht.

12. Wir untersuchen zuerst den Fall, wo das Spektrum (2) endlich — und zwar n-dimensional ist, und beweisen, daß dann auch R höchstens von der Dimension n ist. Der Beweis stützt sich auf einen von Urysohn herrührenden dimensionstheoretischen Fundamentalsatz.

Um diesen Satz bequem formulieren zu können, führen wir folgende Hilfsdefinition ein.

Es sei ε eine beliebige positive und p eine natürliche Zahl. Ein endliches System von in einem metrischen Raume R gelegenen, abgeschlossenen Mengen

$$F_1, F_2, \ldots, F_s$$

soll eine (ε, p)-*Überdeckung* des Raumes R heißen, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) Die Vereinigungsmenge $\sum_{i=1}^{s} F_i$ ist mit dem ganzen Raume R identisch;

b) die Durchmesser $\delta(F_i)$ der Mengen F_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ sind sämtlich $< \varepsilon$;

c) es gibt keinen Punkt des Raumes R, der mehr als p unter den Mengen F_i angehört.

Dann lautet der Urysohnsche Fundamentalsatz [9]) folgendermaßen:

Damit ein kompakter metrischer Raum R die endliche Dimension n hat, ist notwendig und hinreichend, daß es für jedes $\varepsilon > 0$ eine $(\varepsilon, n+1)$-Überdeckung des Raumes R gibt, für ein hinreichend kleines ε dagegen keine (ε, n)-Überdeckung.

Wir müssen also jetzt beweisen, daß es für unseren, durch das n-dimensionale Spektrum (2) definierten kompakten metrischen Raum R stets eine $(\varepsilon, n+1)$-Überdeckung gibt und zwar für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$.

Wir bezeichnen zu diesem Zwecke durch $F_{m,i}$ die Menge aller Punkte von R, deren m-te Koordinate den Simplex $S_{m,i}$ enthält, und beweisen zuerst, daß $F_{m,i}$ *stets eine abgeschlossene Menge* ist. Es sei in der Tat

$$x = (S_{1,i_1}, S_{2,i_2}, \ldots, S_{m,i_m}, \ldots) \tag{6}$$

ein Häufungspunkt der Menge $F_{m,i}$. Die Umgebung $U_m(x)$ enthält Punkte von $F_{m,i}$, was u. a. bedeutet, daß S_{m,i_m} die m-te Koordinate wenigstens eines, der Menge $F_{m,i}$ angehörenden Punktes enthält, woraus, vermöge der Definition von $F_{m,i}$, die Inklusion $S_{m,i_m} \supset S_{m,i}$ folgt, die eben aussagt, daß x ein Punkt von $F_{m,i}$ ist.

---

[9]) Urysohn, „Mémoire ...“ Kap. V (Fund. Math. 8, S. 301).

Jetzt beweisen wir weiter, daß für jedes $\varepsilon > 0$ eine derartige natürliche Zahl m_ε existiert, daß die Ungleichung

(15) $$\delta(F_{m,i}) < \varepsilon$$

für alle $m \geqq m_\varepsilon$ gilt.

Es sei in der Tat letztere Behauptung falsch. Dann gibt es ein $\alpha > 0$ und unendlich viele Mengen

(16) $$F_{m_1, p_1}, F_{m_2, p_2}, \ldots, F_{m_k, p_k}, \ldots$$

für die sämtlich $\delta(F_{m_k, p_k}) \geqq \alpha$ ausfällt.

Es seien nun für jedes k x_k und y_k zwei zu F_{m_k, p_k} gehörende Punkte, deren Entfernung $\geqq \alpha$ ist. Indem man, wenn nötig, die Folge (16) durch eine Teilfolge ersetzt, darf man voraussetzen, daß die x_k bzw. y_k gegen x bzw. y konvergieren, wobei

(6) $$x = (S_{1, i_1}, S_{2, i_2}, \ldots, S_{m, i_m}, \ldots)$$

und

(7) $$y = (S_{1, j_1}, S_{2, j_2}, \ldots, S_{m, j_m}, \ldots)$$

zwei Punkte des Raumes R sind, deren Entfernung mindestens α beträgt, die also sicher verschieden sind.

Nun wollen wir zeigen, daß im Widerspruche mit der Voraussetzung 4° des § 7 die beiden Inklusionen

(17) $$S_{m_k, p_k} \subset S_{m_k, i_{m_k}}, \qquad S_{m_k, p_k} \subset S_{m_k, j_{m_k}}$$

für jedes k gelten.

Es sei in der Tat k beliebig gewählt.

Indem wir die m-te Koordinate von x_r bzw. y_r durch S_{m, i_m^r} bzw. S_{m, j_m^r} bezeichnen, wählen wir r so groß, daß

(18) $$x_r \subset U_{m_k}(x) \quad \text{und} \quad y_r \subset U_{m_k}(y)$$

ist und also die Inklusionen

(19) $$S_{m_k, i_{m_k}^r} \subset S_{m_k, i_{m_k}}, \quad S_{m_k, j_{m_k}^r} \subset S_{m_k, j_{m_k}}$$

gelten.

Da nach der Definition von x_r und y_r

(20) $$S_{m_k, i_{m_k}^r} \supset S_{m_k, p_k} \quad \text{und} \quad S_{m_k, j_{m_k}^r} \supset S_{m_k, p_k},$$

so ist a fortiori die Inklusion (17) richtig.

Die Relation (15) ist hiermit bewiesen.

Wir bezeichnen jetzt durch

(21) $$\Phi_1^m, \Phi_2^m, \ldots, \Phi_{\nu_m}^m$$

diejenigen unter den Mengen $F_{m,i}$, welche 0-dimensionalen Elementen $S_{m,i}$ des Komplexes $\mathfrak{K}_m$ entsprechen, und beweisen, daß sie (für $m \geqq m_\varepsilon$) eine $(\varepsilon, n+1)$-Überdeckung des Raumes R bilden. Dazu zeigen wir erstens, daß (für jedes m) der Raum in der Vereinigungsmenge der Mengen (21) enthalten ist, zweitens, daß es keinen Punkt $x \subset R$ gibt, der zu mehr als $n+1$ Mengen des Systems (21) gehört.

Wir fangen mit dem Beweise der letzten Behauptung an. Falls der Punkt

$$(6) \qquad x = (S_{1,i_1}, S_{2,i_2}, \ldots, S_{m,i_m}, \ldots)$$

zu mindestens $n+2$ verschiedenen Mengen Φ_i^m gehörte, so würde die m-te Koordinate von x, d. h. der Simplex S_{m,i_m}, die entsprechenden nulldimensionalen Elemente $S_{m,i}$, also mindestens $n+2$ verschiedene Eckpunkte enthalten, d. h. von der Dimension $\geqq n+1$ sein. Das widerspricht aber unserer Voraussetzung.

Die erste Behauptung, d. h. die Identität

$$(22) \qquad R = \sum_{i=1}^{\nu_m} \Phi_i^m,$$

folgt einfach daraus, daß jeder Punkt (6) des Raumes R in der entsprechenden Menge F_{m,i_m} und also a fortiori in jeder einem Eckpunkte von S_{m,i_m} entsprechenden Menge Φ_i^m enthalten ist.

Der Beweis der Tatsache $\dim R \leqq n$ ist hiermit erbracht.

13. Es sei jetzt C ein n-dimensionaler kompakter metrischer Raum. Um zu zeigen, daß C sich durch ein n-dimensionales Spektrum approximieren läßt, betrachten wir eine gegen Null konvergierende Folge positiver Zahlen ε_m, die alle klein genug sind um die Existenz einer (ε_m, n)-Überdeckung des Raumes C auszuschließen. Wir wählen alsdann für jedes m eine bestimmte $(\varepsilon_m, n+1)$-Überdeckung

$$(23) \qquad \Phi_1^m, \Phi_2^m, \ldots, \Phi_{\nu_m}^m,$$

und konstruieren einen n-dimensionalen Komplex $\mathfrak{K}_m$ folgendermaßen:

Ein Simplex $S = (s_1, s_2, \ldots, s_r)$, wo $s_1, s_2, \ldots, s_r$ beliebige (verschiedene) natürliche Zahlen sind, soll dann und nur dann dem Komplex $\mathfrak{K}_m$ angehören, falls die Menge

$$(24) \qquad \Phi_{s_1}^m \cdot \Phi_{s_2}^m \cdot \ldots \cdot \Phi_{s_r}^m = \Phi_{[S]}^m$$

nicht leer ist (dabei wird für $s > \nu_m$ definitionsgemäß Φ_s^m leer vorausgesetzt). Es ist unmittelbar klar, daß mit dem Simplex S auch jeder Teilsimplex von S dem Komplex $\mathfrak{K}_m$ angehört, daß also $\mathfrak{K}_m$ die in § 1 ausgesprochene Vollständigkeitsbedingung erfüllt.

14. Die Folge der in dieser Weise definierten, offenbar n-dimensionalen, Komplexe wird zu einem n-dimensionalen Spektrum, indem man folgende Verabredung trifft.

Es seien

(25) $$S_{m,1}, S_{m,2}, \ldots, S_{m,\lambda_m}$$

die Elemente von $\mathfrak{K}_m$ ($m = 1, 2, \ldots$ in inf.). Wir sagen dann, daß das Elementensystem

(26) $$[S_{1,i_1}, S_{2,i_2}, \ldots, S_{m,i_m}]$$

eine Gruppe ist, falls

(27) $$\Phi^m_{[S_1,i_1]} \cdot \Phi^m_{[S_2,i_2]} \cdot \ldots \cdot \Phi^m_{[S_m,i_m]} \neq 0$$

ist.

Zuerst ist, zufolge (24), $\Phi^m_{[S]} \subset \Phi^m_{[S^*]}$, sobald $S \supset S^*$ ist, woraus folgt, daß die Bedingung (27) erfüllt bleibt, falls man irgendeins der Elemente S_{k,i_k} ($k \leqq m$) durch Teilelemente ersetzt. Also ist die Voraussetzung 3° des § 6 erfüllt.

Die zweite Hälfte der Voraussetzung 2° folgt daraus, daß keine der Mengen Φ^m_s ($s \leqq \nu_m$) leer ist. Das Erfülltsein der Voraussetzung 1° und der ersten Hälfte der Voraussetzung 2° bedarf keines Beweises.

Bleibt nur übrig die Voraussetzung 4° des § 7 zu verifizieren, und das geschieht wie folgt. Es sei eine ausgezeichnete Folge

(28) $$S_{1,i_1}, S_{2,i_2}, \ldots, S_{m,i_m}, \ldots$$

gegeben. Zuerst behaupte ich, daß die Durchschnittsmenge

(29) $$\prod_{m=1}^{\infty} \Phi_{[S_{m,i_m}]}$$

einen und nur einen Punkt $x_{i_1,i_2,\ldots,i_m,\ldots}$ enthält.

In der Tat, da (28) eine ausgezeichnete Folge ist, so ist keine von den abgeschlossenen Mengen $F_m = \prod_{k=1}^{m} \Phi_{[S_{k,i_k}]}$ leer, also ist, da $F_m \supset F_{m+1}$ der Durchschnitt aller F_m, der ja mit (29) übereinstimmt, nach dem in jedem kompakten Raume gültigen Cantorschen Durchnittsatze ebenfalls nicht leer. Die Menge (29) kann aber unmöglich mehr als einen Punkt enthalten, da $\delta(\Phi^m_i)$, also a fortiori $\delta(\Phi^m_{[S_{m,i_m}]})$, also a fortiori $\delta(F_m)$ mit $\frac{1}{m}$ unendlich klein wird.

Es seien jetzt (28) und

(30) $$S_{1,j_1}, S_{2,j_2}, \ldots, S_{m,j_m}, \ldots$$

zwei „benachbarte" ausgezeichnete Folgen (d. h. es seien unendlich viele Elemente S_{m_k,i_k} und S_{m_k,j_k} ($k = 1, 2, 3, \ldots$) benachbart).

Falls

$$S_{m_k, i_k} \cdot S_{m_k, j_k} = S_{m_k, h_k}$$

ist, so ist, nach (24)

$$\Phi_{[S_{m_k, h_k}]} \supset \Phi_{[S_{m_k, i_k}]} + \Phi_{[S_{m_k, j_k}]} \tag{31}$$

Da aber $\delta(\Phi_{[S_{m_k, h_k}]})$ mit $\frac{1}{k}$ gegen Null strebt, so ist zufolge (31) auch

$$\lim_{k \to \infty} \delta(\Phi_{[S_{m_k, i_k}]} + \Phi_{[S_{m_k, j_k}]}) = 0.$$

Die beiden Punkte $x_{i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots}$ und $x_{j_1, j_2, \ldots, j_k, \ldots}$ gehören aber zu jeder der Mengen

$$\Phi_{[S_{m_k, i_k}]} + \Phi_{[S_{m_k, i_k}]} \qquad (k = 1, 2, \ldots \text{ in inf.}),$$

sie sind also notwendig identisch:

$$x_{i_1, i_2, \ldots, i_m, \ldots} = x = x_{j_1, j_2, \ldots, j_m, \ldots}. \tag{31*}$$

Nachdem dies bewiesen ist, setzen wir voraus, daß die benachbarten ausgezeichneten Folgen (28) und (30) *Ketten* sind, und zeigen, daß sie dann notwendig identisch sind.

Im entgegengesetzten Falle würde es in der Tat wenigstens ein Paar verschiedener Elemente S_{m, i_m} und S_{m, j_m} geben. Da die Elemente $S_{m. i_m}$ und $S_{m. j_m}$ verschieden sind, so gehört wenigstens ein Eckpunkt des einen dieser Elemente nicht dem andern an, und also ist die Kardinalzahl der Menge $S_{m, i_m} + S_{m, j_m}$ größer als die Kardinalzahl jeder von den Mengen S_{m, i_m} und $S_{m. j_m}$.

Wir bezeichnen nun die natürlichen Zahlen, aus denen S_{m, i_m} bzw. S_{m, j_m} besteht, durch $r_1, r_2, \ldots, r_p$ bzw. $t_1, t_2, \ldots, t_q$; es seien außerdem $s_1, s_2, \ldots, s_r$ alle verschiedenen unter den Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_p, t_1, t_2, \ldots, t_q$.

Dann ist zufolge (24) und (29)

$$x = x_{i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots} \subset \Phi^m_{r_1} \cdot \Phi^m_{r_2} \cdot \ldots \cdot \Phi^m_{r_p}$$

und

$$x = x_{j_1, j_2, \ldots, j_k, \ldots} \subset \Phi^m_{t_1} \cdot \Phi^m_{t_2} \cdot \ldots \cdot \Phi^m_{t_q},$$

also

$$x \subset \Phi^m_{s_1} \cdot \Phi^m_{s_2} \cdot \ldots \cdot \Phi^m_{s_r}. \tag{32}$$

Die Menge der natürlichen Zahlen $s_1, s_2, \ldots, s_r$ ist also ein zum Komplex $\mathfrak{K}_m$ gehörender Simplex S_{m, h_m}, und zwar enthält S_{m, h_m} die beiden Simplexe S_{m, i_m} und S_{m, j_m} als echte Teilmengen.

Die Folge

$$S_{1, i_1}, S_{2, i_2}, \ldots, S_{m-1, i_{m-1}}, S_{m, h_m}, S_{m+1, i_{m+1}}, \ldots \tag{33}$$

ist also, zufolge den Relationen

$$x = x_{i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots} \subset \Phi_{[S_{1, i_1}]} \cdot \Phi_{[S_{2, i_2}]} \cdots \Phi_{[S_{m-1, i_{m-1}}]} \cdot \Phi_{[S_{m, i_m}]} \cdots \Phi_{[S_{k, i_k}]}$$
$$(k = 1, 2, \ldots)$$

und der mit (32) identischen Inklusion

$$x \subset \Phi_{[S_{m, h_m}]},$$

eine ausgezeichnete Folge, was mit der Ketteneigenschaft von (28) im Widerspruch steht.

15. Das im § 14 konstruierte Spektrum definiert also einen Raum R, und es bleibt uns nur übrig die topologische Identität zwischen R und C zu beweisen.

Dies geschieht wie folgt.

Wir haben im § 14 bewiesen, daß jeder ausgezeichneten Folge (28) in eindeutiger Weise ein Punkt $x_{i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots}$ von C entspricht. Das gilt also insbesondere für jede Kette. Letzteres heißt aber, daß *jedem Punkte des Raumes R ein einziger Punkt von C entspricht.* Wir beweisen nun zuerst, daß *diese Beziehung zwischen R und C eine eineindeutige ist.*

Es sei in der Tat x ein beliebiger Punkt von C. Wir betrachten *alle* diejenigen unter den Mengen Φ_i^m, es seien $\Phi^m_{i^x_1}, \Phi^m_{i^x_2}, \ldots, \Phi^m_{i^x_{r_x}}$, die den Punkt x enthalten; der Simplex $\{i^x_1, i^x_2, \ldots, i^x_{r_x}\}$ ist dann ein bestimmter Simplex S_{m, i_m} des Komplexes $\mathfrak{K}_m$. Man sieht leicht ein, daß

$$(28) \qquad S_{1, i_1}, S_{2, i_2}, \ldots, S_{m, i_m}, \ldots$$

eine Kette ist, und daß der Punkt x mit dem durch die Kette (28) nach der Vorschrift des § 14 definierten Punkte $x_{i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots}$ (= dem einzigen Punkte der Menge (29)) identisch ist.

Daß ein Punkt x in dieser Weise unmöglich zwei verschiedenen Ketten (28) und (30) entsprechen kann, beweist man leicht, indem man das von der Relation (31*) zur Folge (33) führende Raisonnement des vorigen Paragraphen wörtlich wiederholt. (Die Relation (31*) ergibt sich daraus, daß der Punkt x selbst als ein mit $x_{i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots}$ und $x_{j_1, j_2, \ldots, j_k, \ldots}$ gleichzeitig identischer Punkt vorausgesetzt war).

16. Nachdem die eineindeutige Beziehung zwischen den Punkten von R und C festgestellt ist, kann man einfach die Punkte von R mit den entsprechenden Punkten von C identifizieren; dann haben also die beiden Räume R und C denselben Punktvorrat. Um jetzt die Homöomorphie der beiden Räume R und C zu beweisen bleibt nur übrig zu zeigen, daß das (durch das Spektrum definierte) Umgebungssystem von R mit dem System aller sphärischen Umgebungen von C gleichwertig ist.

Um letzteres Ziel zu erreichen genügt es die folgenden zwei Tatsachen zu verifizieren:

I. Jede Umgebung $U_m(x)$ (siehe §§ 8 u. 10) ist ein Gebiet (= eine offene Menge) rel C.

II. Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und einen beliebigen Punkt x gibt es eine $U_m(x)$ von einem Durchmesser $< \varepsilon$ („Durchmesser" ist selbstverständlich in der Metrik von C zu verstehen.)

Ad I. Es sei

(6) $$x = (S_{1, i_1}, S_{2, i_2}, \ldots, S_{m, i_m}, \ldots)$$

ein beliebiger Punkt von $R \sim C$. Wir bezeichnen durch $V_m(x)$ die Menge aller Punkte, deren m-te Koordinate in S_{m, i_m} enthalten ist. Dann ist $U_m(x) = \prod_{k=1}^{m} V_k(x)$, und es genügt zu zeigen, daß jedes $V_m(x)$ ein Gebiet (rel C) ist.

Es seien nun

(34) $$\Phi_{p_1}^m, \Phi_{p_2}^m, \ldots, \Phi_{p_t}^m$$

alle diejenigen unter den Mengen Φ_i^m $(i = 1, 2, \ldots, \nu_m$, siehe § 13), die den Punkt x nicht enthalten, und $\Psi_m(x)$ die Vereinigungsmenge aller Mengen (34). $\Psi_m(x)$ ist eine *abgeschlossene*, den Punkt x nicht enthaltende Teilmenge von C. Die Behauptung I wird also bewiesen, wenn wir zeigen, daß

(35) $$V_m(x) = C - \Psi_m(x)$$

ist.

Es sei y ein Punkt von $V_m(x)$,

(7) $$y = (S_{1, j_1}, S_{2, j_2}, \ldots, S_{m, j_m}, \ldots),$$

und es bestehe der Simplex S_{m, j_m} aus den Zahlen $s_1^{j_m}, s_2^{j_m}, \ldots, s_r^{j_m}$. Dann ist, da (7) eine Kette ist, y unter allen Mengen Φ_i^m nur in den Mengen

(36) $$\Phi_{s_1^{j_m}}^{m}, \Phi_{s_2^{j_m}}^m, \ldots, \Phi_{s_r^{j_m}}^m$$

enthalten. Wir zeigen nun, daß jede der Mengen (36) auch den Punkt x enthält. In der Tat ist $S_{m, j_m} \subset S_{m, i_m}$, also nach (24),

$$\Phi_{[S_{m, i_m}]} \subset \Phi_{[S_{m, j_m}]} = \prod_{k=1}^{r} \Phi_{s_k^{j_m}}^m.$$

Da aber

(37) $$x = x_{i_1, i_2, \ldots, i_m, \ldots} = \prod_{m=1}^{\infty} \Phi_{[S_{m, i_m}]}$$

ist, so ist a fortiori $x \subset \Phi_{[S_{m, i_m}]}$, also x in jeder der Mengen (36) enthalten.

Wir haben also bewiesen, daß eine Menge Φ_i^m den Punkt x enthält, sobald ihr y angehört. Das heißt aber, daß keine der Mengen (34) den Punkt y enthält, und also $y \subset C - \Psi_m(x)$ ist.

Da y ein beliebiger Punkt von $V_m(x)$ war, so gilt die Inklusion

$$V_m(x) \subset C - \Psi_m(x). \tag{38}$$

Es sei jetzt z ein Punkt von $C - \Psi_m(x)$

$$z = (S_{1,h_1}, S_{2,h_2}, \ldots, S_{m,h_m}, \ldots). \tag{9}$$

Wir wollen beweisen, daß $z \subset V_m(x)$ ist, also daß

$$S_{m,h_m} \subset S_{m,i_m} \tag{39}$$

ist. Falls nun dies nicht richtig wäre, d. h. eine natürliche Zahl s vorhanden wäre, die wohl in S_{m,h_m}, aber nicht in S_{m,i_m} enthalten ist, so würde das bedeuten, daß die Inklusion $z \subset \Phi_s^m$ richtig, die Inklusion $x \subset \Phi_s^m$ dagegen falsch ist. Φ_s^m würde also eine der Mengen (34) sein und z würde in $\Psi_m(x)$, also nicht in $C - \Psi_m(x)$ enthalten sein. Die Inklusion (39) und folglich die ganze Behauptung I ist hiermit bewiesen.

17. Ad II. Es seien $x \subset C$ und $\varepsilon > 0$ beliebig, x dabei durch seine „Koordinatenentwicklung" (6) gegeben. Wir wählen m genügend groß um $\delta(\Phi_i^m) < \varepsilon$ für jedes i zu haben.

Nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen ist

$$U_m(x) \subset V_m(x) = C - \Psi_m(x),$$

d. h. jeder Punkt $y \subset U_m(x)$ gehört zu einer den Punkt x enthaltenden Menge Φ_i^m. Da $\delta(\Phi_i^m) < \varepsilon$ ist, so folgt daraus, daß die Entfernung $\varrho(x, y)$ für einen beliebigen Punkt $y \subset U_m(x)$ weniger als ε beträgt, also $U_m(x)$ in der sphärischen Umgebung $S(x, \varepsilon)$ enthalten ist, w. z. b. w.

18. Es sei jetzt C ein unendlich dimensionaler kompakter metrischer Raum.

Man kann für jedes $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_{(\varepsilon)}$ und eine $(\varepsilon, n_{(\varepsilon)})$-Überdeckung folgendermaßen bestimmen. Man nimmt für jeden Punkt x des Raumes C eine Umgebung $U(x)$ vom Durchmesser $< \varepsilon$ und wählt zufolge dem Borel-Lebesgueschen Satze eine endliche Zahl ν_ε dieser Umgebungen aus, so daß ihre Vereinigungsmenge mit C identisch ist.

Es seien $U_1^{(\varepsilon)}, U_2^{(\varepsilon)}, \ldots, U_{\nu_{(\varepsilon)}}^{(\varepsilon)}$ diese Umgebungen. Dann bilden die Mengen

$$\Phi_1^{(\varepsilon)}, \Phi_2^{(\varepsilon)}, \ldots, \Phi_{\nu_{(\varepsilon)}}^{(\varepsilon)}, \qquad \Phi_i^{(\varepsilon)} = \overline{U_i^{(\varepsilon)}} \qquad (i \leqq \nu_{(\varepsilon)})$$

eine $(\varepsilon, n_{(\varepsilon)})$-Überdeckung, wobei $n_{(\varepsilon)}$ die Ordnung[9]) des Systems aller

$\Phi_i^{(\varepsilon)}$, $i \leqq \nu_{(\varepsilon)}$, d. h. die größte Anzahl einen und denselben Punkt enthaltender $\Phi_i^{(\varepsilon)}$ ist.

Wir lassen jetzt ε eine gegen Null strebende Folge von Werten

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m, \ldots$$

annehmen und wählen für jedes ε_m eine Überdeckung

$$(23) \qquad \{\Phi_1^m, \Phi_2^m, \ldots, \Phi_{\nu_m}^m\} \qquad (\text{wo } \Phi_i^m = \Phi_i^{(\varepsilon_m)},\ \nu_m = \nu_{(\varepsilon_m)} \text{ gesetzt ist})$$

von der soeben beschriebenen Art. Da C unendlich dimensional ist, so konvergiert $n_m = n_{\varepsilon_m}$ mit m notwendig gegen ∞.

Von diesem Augenblick an geschieht die Konstruktion des, den Raum C approximierenden, Spektrums durch wörtliche Wiederholung der Überlegungen der §§ 13—17. Das Spektrum ist unendlich dimensional, da $\mathfrak{K}_m$ von der Dimension n_m ist.

Der Hauptsatz ist bewiesen.

V. Schluß.

19. Jede topologische Eigenschaft eines kompakten metrischen Raumes läßt sich also immer in einer der folgenden Formen ausdrücken.

1. Der Raum kann durch wenigstens *ein, gewissen Nebenbedingungen* (die eben die in Frage stehende Eigenschaft charakterisieren) *genügendes* Spektrum approximiert werden.

2. *Jedes* den gegebenen Raum approximierende Spektrum genügt gewissen (soeben besprochenen) Nebenbedingungen.

Dabei ist aber zu bemerken, daß jede Nebenbedingung, der ein Spektrum genügen kann, nichts anderes ist, als eine Eigenschaft gewisser Anordnungen von Simplexen (also im letzten Grunde gewisser Anordnungen natürlicher Zahlen).

Die Anordnungen, die den Aufbau des Spektrums bestimmen und auf die es also allein ankommt, lassen sich in folgende drei Klassen teilen:

Anordnungen erster Art sind Anordnungen je endlich vieler „Eckpunkte“ (= natürlicher Zahlen) zu einem Simplex. Sie besitzen nur eine Eigenschaft und das ist die *Anzahl* der natürlichen Zahlen (= der Eckpunkte), die notwendigerweise in jedem den gegebenen Raum definierenden Spektrum zu einem Simplex vereinigt werden müssen. *Diese Eigenschaft ist nichts anderes als die Dimension des Raumes.*

Anordnungen zweiter Art sind Anordnungen der Simplexe zu einem Komplex $\mathfrak{K}_m$. Die entsprechenden Eigenschaften des Raumes sind nichts anderes als Eigenschaften (rein kombinatorischer Natur), die möglicheroder notwendigerweise den das Spektrum bildenden Komplexen zugeschrieben werden. Diese Eigenschaften des Raumes werden wir *kombinatorische Eigenschaften* nennen[10]).

Anordnungen dritter Art sind Anordnungen endlich vieler, in verschiedenen Komplexen enthaltener Simplexe zu einem ausgezeichneten System.

Die diesen Anordnungen entsprechenden Eigenschaften des Raumes sind natürlich die kompliziertesten vom logischen Standpunkt aus: sie lassen sich nämlich nur selten in einer „reinen", d. h. von den Eigenschaften erster und zweiter Art unabhängigen Form darstellen. Übrigens scheint es, daß die Anordnungen dritter Art den Aufbau des Raumes *im kleinen* bestimmen, soweit das ohne Hinzunahme der Dimensionseigenschaft geschehen kann.

Wir wollen nun *elementare Beispiele* „reiner" Eigenschaften zweiter und dritter Art geben.

20. Ein Komplex $\mathfrak{K}$ heißt *zusammenhängend*, wenn er sich nicht in zwei zueinander fremde Komplexe zerlegen läßt. (Dabei heißt ein Komplex $\mathfrak{K}$ in zwei Komplexe $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ zerlegt, falls jedes Element von $\mathfrak{K}$ ein Element von $\mathfrak{K}_1$ oder $\mathfrak{K}_2$, und jedes Element von $\mathfrak{K}_i$ $(i = 1, 2)$ ein Element von $\mathfrak{K}$ ist.)

Man beweist leicht, daß ein Komplex $\mathfrak{K}$ dann und nur dann zusammenhängend ist, falls je zwei Elemente von $\mathfrak{K}$, S_0 und S_{p+1} durch eine (endliche) Folge der Reihe nach benachbarter Elemente von $\mathfrak{K}$, etwa $S_0, S_1, \ldots, S_p, S_{p+1}$, verbunden werden können.

Es gelten folgende zwei Sätze:

I. *Falls ein kompakter metrisierbarer topologischer Raum R zusammenhängend ist, so besteht jedes, diesen Raum approximierende Spektrum aus lauter zusammenhängenden Komplexen.*

Es sei ein den Raum R approximierendes Spektrum:

$$\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_m, \ldots \tag{2}$$

gegeben und z. B. $\mathfrak{K}_m$ nicht zusammenhängend, also

$$\mathfrak{K}_m = \mathfrak{K}_m^1 + \mathfrak{K}_m^2, \tag{24}$$

wobei $\mathfrak{K}_m^1$ und $\mathfrak{K}_m^2$ zueinander fremd sind.

Es seien ${}_1\Phi_k^m$ bzw. ${}_2\Phi_k^m$ die den nulldimensionalen Elementen von $\mathfrak{K}_m^1$ bzw. $\mathfrak{K}_m^2$ entsprechenden abgeschlossenen Mengen Φ_i^m (s. § 12, (21)),

[10]) Die auf diese Arbeit unmittelbar folgende Abhandlung beschäftigt sich mit kombinatorischen Eigenschaften allgemeiner Kurven, d. h. eindimensionaler Kontinua.

und Ψ_1^m bzw. Ψ_2^m die Vereinigungsmenge aller Mengen ${}_1\Phi_k^m$ bzw. ${}_2\Phi_k^m$. Dann ist

$$R = \Psi_1^m + \Psi_2^m. \tag{25}$$

Ich behaupte nun, daß die abgeschlossenen Mengen Ψ_1^m und Ψ_2^m zueinander fremd sind. Falls in der Tat ein zu $\Psi_1^m \cdot \Psi_2^m$ gehörender Punkt x vorhanden wäre, so würde seine m-te Koordinate S_{m,i_m} ein Element des Komplexes $\mathfrak{K}_m^1$ und gleichzeitig auch ein Element des Komplexes $\mathfrak{K}_m^2$ enthalten. S_{m,i_m} könnte also weder zu $\mathfrak{K}_m^1$ noch zu $\mathfrak{K}_m^2$ gehören.

II. *Wenn ein kompakter metrisierbarer Raum sich mittels eines aus lauter zusammenhängenden Komplexen bestehenden Spektrums approximieren läßt, so ist er zusammenhängend.*

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich sofort (unter Berücksichtigung der am Anfang dieses Paragraphen erwähnten notwendigen und hinreichenden Bedingung für den Zusammenhang eines Komplexes und der elementaren Eigenschaften der kompakten metrischen Räume) aus einer Anwendung der Ungleichung (15) (und des diese Ungleichung enthaltenden Absatzes) des § 12.

Wir sehen also, daß *die Eigenschaft eines kompakten metrisierbaren Raumes, zusammenhängend zu sein, eine kombinatorische Eigenschaft des Raumes ist, die sich dabei in jeder der Formen* 1., 2. (§ 19) *ausdrücken läßt.*

21. Dagegen ist *durch den Zusammenhang im Kleinen ein Beispiel einer Eigenschaft gegeben, die sich ausschließlich auf die Anordnungen dritter Art zurückführen läßt.*

Um dies einzusehen, führen wir zuerst folgende Bezeichnung ein:

Es seien beliebig gegeben:

1. Ein approximierendes Spektrum (2),

2. ein *nulldimensionales* Element S_{m,i_m} eines beliebigen, aber bestimmten Komplexes $\mathfrak{K}_m$ des Spektrums (2),

3. eine natürliche Zahl $s > m$.

Dann bezeichnen wir durch $Q_{m,i_m,s}$ den Komplex, der aus allen denjenigen Elementen von $\mathfrak{K}_s$ besteht, die zu wenigstens einer, das Element S_{m,i_m} enthaltenden Gruppe gehören.

22. Man beweist jetzt leicht den folgenden Satz:

III. *Damit der kompakte metrische Raum R im Kleinen zusammenhängend sei, ist notwendig und hinreichend, daß es ein den Raum R approximierendes Spektrum gibt, für welches alle Komplexe $Q_{m,i_m,s}$ zusammenhängend sind.*

Der Beweis läßt sich folgendermaßen skizzieren:

Zuerst beweist man, daß der Zusammenhang aller $Q_{m,\,i_m,\,s}$ (m, i_m fest, $s > m$ variabel) notwendig und hinreichend ist, damit die betreffende Menge $\Phi_{i_m}^m$ (§ 12 (21)) zusammenhängend sei. Wenn aber alle $\Phi_{i_m}^m$ Kontinua sind, so folgt der Zusammenhang im Kleinen des Raumes R sofort aus der Ungleichung (15) (§ 12) und einem bekannten Sierpińskischen Satze[11]).

Die Bedingung des Satzes III ist also hinreichend.

Um ihre Notwendigkeit einzusehen, beachte man zuerst, daß man für jeden im Kleinen zusammenhängenden n-dimensionalen kompakten metrischen Raum R und für jedes $\varepsilon > 0$ eine $(\varepsilon, n+1)$ Überdeckung finden kann, die aus lauter Kontinuen besteht[12]). Daraus folgt aber leicht, daß man R durch ein Spektrum[13]) approximieren kann, zu dem zusammenhängende Mengen $\Phi_{i_m}^m$ und folglich zusammenhängende Komplexe $Q_{m,\,i_m,\,s}$ gehören.

23. Aus dem letzteren Beispiele kann man die Wichtigkeit der Anordnungen dritter Art erkennen.

Übrigens kann man auch sehr leicht Räume angeben, die gleiche Dimension und *dieselben* kombinatorischen Eigenschaften haben (die sich nämlich durch aus *denselben Komplexen* bestehende Spektra approximieren lassen), trotzdem aber topologisch verschieden sind. Es genügt für den einen Raum eine abgeschlossene geradlinige Strecke, für den andern die bekannte, in Cartesischen Koordinaten folgendermaßen erklärte Kurve zu wählen:

$$\begin{cases} y = \sin\dfrac{1}{x}, & \text{für} \quad 0 < x \leqq \dfrac{1}{\pi} \\ -1 \leqq y \leqq 1, & \text{für} \quad x = 0\,. \end{cases}$$

Beide Kurven lassen sich durch Spektra approximieren, deren sämtliche Komplexe $\mathfrak{K}_m$ z. B. aus m linear aneinander schließenden 1-dimensionalen Simplexen bestehen (man erhält also $\mathfrak{K}_m$, indem man einfach eine Strecke in m Teilstrecken teilt).

24. Ich hoffe mit dieser ganzen Untersuchung gezeigt zu haben, daß zwischen der Topologie der klassischen Gebilde und der modernen mengentheoretischen Topologie gar nicht eine so tiefe Kluft liegt, wie man es sich oft vorstellt. Vielmehr dürfte man eigentlich sagen, daß die topologischen Eigenschaften in beiden Fällen Eigenschaften *kombinatorischen Ursprungs* sind, weil sie sich als Anordnungseigenschaften gewisser end-

---

[11]) Fund. Math. I.

[12]) Urysohn, „Mémoire ...", Kap. V (Fund. Math. 8, S. 301).

[13]) Und zwar derselben Dimension wie R selbst.

licher Schemata deuten lassen[14]). Es besteht aber doch ein wesentlicher Unterschied zwischen unserem allgemeinen Falle und dem Falle klassischer Gebilde. Hier wie dort hat man eine Folge von „beliebig fein“ werdenden Schemata, deren Gesamtheit den Raum definiert. Der Unterschied liegt aber darin, daß im klassischen Falle die Eigenschaften der Schemata und ihre sukzessive Zuordnung stationär bleiben, so daß sich der Raum mit seinem Schema einfach identifizieren läßt. Im allgemeinen Falle variieren dagegen diese Eigenschaften, indem man zu immer feineren Schemata übergeht und die Verfeinerung selbst („Anordnungen dritter Art“) läßt sich nicht einmal als ein *sukzessiver* Prozeß darstellen.

Der Raum läßt sich demgemäß *nur* durch einen Grenzübergang erzeugen.

Le Batz (Loire Inférieure), August 1925.

[14]) Falls der Raum R, der durch ein Spektrum approximiert wird, etwa eine geschlossene Mannigfaltigkeit ist, so entsprechen die Anordnungen dritter Art in einer bestimmten, aber indirekten Weise denjenigen Anordnungen, die durch Verfeinerung der betreffenden Zellengebäude hervorgerufen werden. (Vgl. die §§ 3—5.) Nur müssen diese Zellengebäude in einer von der üblichen abweichenden Weise aufgerichtet werden (man vergleiche z. B. die Lebesgueschen Würfeleinteilungen der euklidischen Räume in seiner Arbeit „Sur les correspondances entre les points de deux espaces“, Fund. Math. 2).

(Eingegangen am 10. 9. 1925.)

Berichtigung.

In den in Bd. 92 der Mathematischen Annalen erschienenen Arbeiten:

P. Alexandroff und P. Urysohn †, „Zur Theorie der topologischen Räume“,

P. Alexandroff, „Über die Struktur der bikompakten topologischen Räume“,

P. Alexandroff, „Über die Metrisation der im kleinen kompakten topologischen Räume“,

wird S. 258, S. 264, S. 269 und S. 299 hingewiesen auf die noch nicht erschienenen Abhandlungen: P. Alexandroff und P. Urysohn †, „Mémoire sur les espaces topologiques compacts“ und P. Alexandroff, „Sur les espaces localement compacts“, und mitgeteilt, daß diese Abhandlungen in den Fundamenta Mathematicae zur Veröffentlichung gelangen werden. Diese Veröffentlichung ist indes wegen technischer Schwierigkeiten nicht zu Stande gekommen, und die beiden Abhandlungen werden im Laufe des Jahres 1927, vereinigt unter dem gemeinsamen Titel: P. Alexandroff und P. Urysohn †, „Mémoire sur les espaces topologiques compacts“, in den Verhandelingen der Amsterdamer Akademie zum Abdruck gebracht werden.