Über kombinatorische Eigenschaften allgemeiner Kurven.

Von

Paul Alexandroff in Moskau.

Zweck vorliegender Arbeit ist in einer mehr oder weniger systematischen Weise diejenigen Eigenschaften der allgemeinen Kurven (d. h. der eindimensionalen kompakten metrisierbaren topologischen Räume)[1]) darzustellen, die ich in meinem vorstehenden Aufsatze[1a]) als *kombinatorische* Eigenschaften bezeichnet habe.

Eine ausführliche Kenntnis der soeben zitierten Arbeit wird im folgenden nicht vorausgesetzt.

Inhaltsübersicht.

---

[1]) Vgl. Urysohn, C. R. **175** (1922), p. 481; „Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes“, II. Teil (erscheint demnächst in den Verhandelingen der Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Amsterdam); Menger, Monatshefte f. Math. u. Phys. **33** (1923), S. 148, Grundzüge einer Theorie der Kurven“, Amsterdamer Proceedings **28**, S. 67 und Math. Ann. **95**, S. 277.

[1a]) „Simpliziale Approximationen in der allgemeinen Topologie“, § 19.

I. Zusammenhängende eindimensionale Komplexe.

1. Wir denken uns zuerst eine aus endlich vielen Bögen gebildete, im gewöhnlichen dreidimensionalen Raume R_3 liegende Kurve L. Zwei Bögen haben dabei natürlich keinen von ihren Endpunkten verschiedenen gemeinsamen Punkt und jeder von ihnen ist etwa als ein einfacher Streckenzug zu denken. Vom Standpunkte der kombinatorischen Topologie aus kann L offenbar als ein zusammenhängender Streckenkomplex aufgefaßt werden. Aber auch umgekehrt kann bekanntlich jeder abstrakt gegebene zusammenhängende Streckenkomplex als eine in R_3 liegende Kurve L von der soeben beschriebenen Art interpretiert werden.

Um sprachliche Mißverständnisse zu vermeiden werden wir von *Bogen*komplexen (statt *Strecken*komplexen) sprechen: das Wort „Strecke" soll nämlich nur für geometrisch gegebene im Euklidischen Raume liegende *geradlinige* Strecken gebraucht werden. Falls wir also im dreidimensionalen Raume eine geometrische Realisation eines gegebenen (eindimensionalen) Komplexes vor uns haben, so besteht jeder Bogen dieses (geometrisch realisierten) Komplexes aus endlich vielen Strecken.

2. Die Kurven der soeben erwähnten Art und die ihnen homöomorphen Kontinua sind Linien im elementaren, nicht einmal mathematischen Sinne des Wortes und können etwa mit Hilfe eines Fadens mit endlich vielen Zusammenheftungen materiell dargestellt werden. Nun scheint eine der wichtigsten und gleichzeitig anschaulichsten topologischen Invarianten dieser Linien diejenige zu sein, die die Zahl der eventuell auftretenden „Schlingen", das heißt z. B. die Zahl der verschiedenen Möglichkeiten, den Faden auf einen Haken zu hängen, angibt.

Mathematisch ausgedrückt handelt es sich um *die größte Zahl* $s = s(L)$ *von der Art, daß es ein System von* s *einfachen geschlossenen, in* L *enthaltenen Polygonen*

$$P_1, P_2, \ldots, P_s \tag{1}$$

gibt, zu dem sich ein ebenfalls aus s zu L fremden Polygonen

(2) $$\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_s$$

bestehendes System so bestimmen läßt, daß für jedes m $(1 \leqq m \leqq s)$ Π_m *mit* P_m *und mit keinem der Polygone* $P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}, P_{m+1}, \ldots, P_s$ *verschlungen*[2]) *ist.* Die ganze Konstruktion ist dabei selbstverständlich im dreidimensionalen Raume zu denken. Es sei noch ein für allemal bemerkt, daß wir (falls nichts anderes ausdrücklich formuliert ist) stets unter einer *Verschlingung* zweier Polygone eine Verschlingung von der Ordnung 1 verstehen.

3. Bei der Bestimmung der Zahl $s(L)$ haben wir vorausgesetzt, daß die Polygone $P_1, P_2, \ldots, P_s$ (ebenso wie $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_s$) *einfache* geschlossene Polygone sind. Nun kann man eine analoge Zahl $s'(L)$ definieren, indem man die Forderung der Einfachheit der Polygone $P_1, P_2, \ldots, P_s$ fallen läßt. Offenbar ist $s(L) \leqq s'(L)$; wir werden aber bald beweisen, daß $s(L) = s'(L)$ ist.

4. Man kann jeden zusammenhängenden Komplex[3]) L auf folgende, wie wir sie nennen wollen, *normale* Weise konstruieren.

Wir fangen mit einem beliebigen, in L enthaltenen Bogen S_1 an und bezeichnen durch L_1 den aus dem einzigen Bogen S_1 bestehenden, zusammenhängenden in L enthaltenen Komplex. Falls der aus m Bögen bestehende, in L enthaltene zusammenhängende Komplex L_m schon konstruiert ist, bezeichnen wir durch S_{m+1} irgendeinen in L, jedoch nicht in L_m enthaltenen Bogen, der mit L_m wenigstens einen Endpunkt gemeinsam hat, und setzen

$$L_{m+1} = L_m + S_{m+1}.$$

L_{m+1} ist wieder zusammenhängend. Das Verfahren bricht erst ab, wenn wir zu einem mit L identischen Komplex L_r gelangen; r ist dann die Anzahl der den Komplex L bildenden Bögen.

Nun können bei jedem Schritte m dieser Konstruktion zwei Fälle auftreten, je nachdem einer oder beide Endpunkte von S_{m+1} zu L_m gehören. Wir bezeichnen durch $p(L)$ die Anzahl derjenigen Schritte m $(m = 1, 2, \ldots, r-1)$, bei denen der zweite Fall vorkommt.

5. Die Bezeichnung $p(L)$ soll durch den Beweis der Unabhängigkeit der Zahl $p(L)$ von der Wahl der einzelnen normalen Konstruktionsweisen

---

[2]) Brouwer, *On looping coefficients,* Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen Amsterdam **15** (1912), S. 113–122.

[3]) Falls die Dimension nicht angegeben ist, soll das Wort „Komplex", stets einen eindimensionalen (d. h. einen Bogenkomplex) bedeuten.

rechtfertigt werden. Dazu genügt es aber, folgende (u. a. auch die Behauptung des § 3 enthaltende) grundlegende Identität

$$s(L) = p(L) = s'(L) \tag{3}$$

zu bestätigen. Falls L aus einem einzigen Bogen besteht, ist

$$s(L) = s'(L) = p(L) = 0,$$

also (3) gewiß richtig. Wir setzen voraus, (3) wäre für alle aus $\leqq r-1$ Bögen bestehende Komplexe bewiesen, und wollen den betreffenden Beweis für einen beliebigen aus r Bögen bestehenden Komplex L erbringen.

Es seien also die Komplexe

$$L_1, L_2, \ldots, L_{r-1}, \quad L_r = L \tag{4}$$

unter der Bedingung

$$L_{m+1} = L_m + S_{m+1}, \quad L_1 = S_1 \qquad (1 \leqq m \leqq r-1) \tag{5}$$

gegeben.

Wir bezeichnen durch $s'_m = s_m = p_m$, $1 \leqq m \leqq r-1$, die einander gleichen Zahlen $s'(L_m)$, $s(L_m)$, $p(L_m)$, durch s' bzw. s die Zahl $s'(L)$ bzw. $s(L)$, und endlich durch p die der normalen Konstruktionsweise (4) entsprechende Zahl $p(L)$.

Es handelt sich um den Beweis der Identität

$$s' = p = s. \tag{6}$$

Indem wir in (5) $m = r-1$ setzen, haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Es gibt nur einen zu L_{r-1} gehörenden Endpunkt von S_r. Dann ist, wie leicht ersichtlich, $p = p_{r-1}$, $s = s_{r-1}$, $s' = s_{r-1}$, und also $s' = p = s$.

b) Beide Endpunkte von S_r gehören zu L_{r-1}. In diesem Falle ist $p = p_{r-1} + 1$, und wir müssen nur beweisen, daß $s' = s_{r-1} + 1 = s$ ist.

Zuerst beweisen wir, daß

$$s' \leqq s_{r-1} + 1 \tag{7}$$

ist. Im entgegengesetzten Falle würde es sicher $s_{r-1} + 2 = t$ verschiedene (im allgemeinen nicht singularitätenfreie) Polygone

$$P_1, P_2, \ldots, P_t \tag{8}$$

geben, zu denen die die Verschlingungsvorschriften des § 2 erfüllenden Polygone

$$\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_t \tag{9}$$

angebbar sind.

Wenigstens zwei der Polygone (8), es seien P_t und P_{t-1}, enthalten den Bogen S_r (weil sonst wenigstens $t-1 = s'_{r-1}+1$ Polygone (8) im Widerspruch mit der Definition der Zahl s'_{r-1}, in L_{r-1} enthalten wären).

Zufolge unserer Voraussetzungen kann man zwei bzw. durch P_{t-1} und P_t begrenzte (im allgemeinen sowohl Selbstdurchdringungen, als durch eventuelle mehrfache Elemente ihrer Begrenzungen hervorgerufene Singularitäten besitzende) Flächenstücke D_{t-1} bzw. D_t derart wählen, daß die *algebraische* Anzahl ihrer Schnittpunkte mit Π_{t-1} bzw. Π_t gleich 1, mit Π_t bzw. Π_{t-1} dagegen gleich Null ist. Daraus folgt, daß jedes der Polygone Π_{t-1} und Π_t, von denen wir das eine durch Π_0 bezeichnen, mit dem D_1+D_2 begrenzenden, aus $P_{t-1}+P_t$ durch Fortlassung des Bogens S_r entstandenen Polygon P_0 verschlungen ist.

P_0 ist sicher von jedem der Polygone $P_1, P_2, \ldots, P_{t-2}$ verschieden (weil sonst z. B. Π_t gleichzeitig mit zwei verschiedenen Polygonen (8) verschlungen wäre); das Polygonsystem

$$\begin{cases} P_0, P_1, \ldots, P_{t-2} \\ \Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_{t-2} \end{cases}$$

genügt also allen Bedingungen des § 2 (insbesondere sind alle P_m, $0 \leqq m \leqq t-2$, in L_{r-1} enthalten), so daß die Zahl $s'(L_{r-1})$ mindestens gleich $t-1$ sein sollte, was unmöglich ist, weil sie gleich $t-2$ ist.

Durch diesen Widerspruch ist die Ungleichung (7) bewiesen.

6. Unser Ziel wird erreicht sein, sobald wir beweisen, daß

$$s \geqq s_{r-1}+1 \tag{10}$$

ist. Vorausgesetzt, es wären P_i bzw. Π_i, $1 \leqq i \leqq s_{r-1}$, $P_i \subset L_{r-1}$, die zufolge der Identität $s(L_{r-1}) = s_{r-1}$ vorhandenen, den üblichen Bedingungen genügenden *einfachen* Polygone. Da beide Endpunkte von S_r zum zusammenhängenden Komplex L_{r-1} gehören, kann man sie durch einen einfachen Weg W innerhalb L_{r-1} verbinden und

$$P_0 = W + S_r \tag{11}$$

ist dann ein einfaches, in L_r enthaltenes Polygon. Um das entsprechende Π_0 zu erhalten braucht man nur durch den Mittelpunkt c einer der den Bogen S_r bildenden Strecken die zu dieser Strecke senkrecht stehende Ebene zu legen und in dieser Ebene ein hinreichend kleines den Punkt c als Mittelpunkt besitzendes Quadrat zu konstruieren. Das System aller P_i bzw. Π_i $(0 \leqq i \leqq r-1)$ genügt dann allen nötigen Bedingungen und ergibt die Ungleichung (10), die, zusammen mit (7) und der im § 3 erwähnten evidenten Ungleichung $s \leqq s'$ die Identität $s = s' = s_{r-1}+1 = p_{r-1}+1 = p$ und folglich auch die allgemeine Identität (3) beweist.

6 bis. Man könnte die Invarianz der Zahl $p(L)$ auch beweisen, indem man zeigt, daß

(11 bis) $$p(L) = 1 - \chi(L)$$

ist, wobei $\chi(L)$ die Eulersche Charakteristik der Kurve L ist, d. h. die Differenz $\alpha_0 - \alpha_1$ zwischen der Anzahl $\alpha_0 = \alpha_0(L)$ der in L enthaltenen Eckpunkte und der Anzahl $\alpha_1 = \alpha_1(L)$ der daselbst vorhandenen Bögen [4]).

Um die Identität (11 bis) zu beweisen, schließen wir uns an die Bezeichnungen des § 4 an und betrachten irgendeine normale Konstruktionsweise von L.

Für $S_1 = L_1$ ist $p(L_1) = p(S_1) = 0$, $\alpha_0(L_1) = 2$, $\alpha_1(L_1) = 1$, $\chi(L_1) = 1$, und also stimmt für diesen Fall unsere Identität.

Wenn jetzt

$$L_{m+1} = L_m + S_{m+1}$$

ist, so ist, falls S_{m+1} mit L_m beide Endpunkte gemeinsam hat,

$$p(L_{m+1}) = p(L_m) + 1; \quad \alpha_0(L_{m+1}) = \alpha_0(L_m); \quad \alpha_1(L_{m+1}) = \alpha_1(L_m) + 1,$$

also $\chi(L_{m+1}) = \chi(L_m) - 1$ und $1 - \chi(L_{m+1}) = (1 - \chi(L_m)) + 1$.

Falls aber S_{m+1} nur einen gemeinsamen Endpunkt mit L_m hat, so ist

$$p(L_{m+1}) = p(L_m) \quad \text{und} \quad \chi(L_{m+1}) = \chi(L_m).$$

Daraus folgt, daß die Identität (11 bis) für L_{m+1} zutrifft, sobald sie für L_m stimmt, und da sie für L_1 richtig ist, so gilt sie allgemein.

7. Wir gehen jetzt zu einer andern Interpretation der Zahl $s(L) = s'(L)$ über. Wir fangen mit folgender Hilfsdefinition an.

Def. I. Ein endliches System von (abstrakt gegebenen) geschlossenen Polygonen heißt ein *Nullsystem*, falls jeder Bogen, der zu einem Polygone dieses Systems gehört, wenigstens zweimal (in einem oder in mehreren Polygonen dieses Systems) vorkommt.

Def. II. Ein System von geschlossenen Polygonen heißt *irreduzibel*, falls es kein Nullsystem enthält.

Wir bezeichnen jetzt durch $\nu' = \nu'(L)$ die größte Zahl von der Beschaffenheit, daß es in L wenigstens ein aus ν' Polygonen bestehendes irreduzibles System gibt.

Wir bemerken sofort, daß man eine Zahl $\nu(L) \leq \nu'(L)$ erhält, wenn man sich in den Definitionen I und II auf *einfache* Polygone beschränkt.

Wir wollen jetzt die Identität

(12) $$\nu(L) = \nu'(L) = p(L)$$

beweisen.

---

[4]) Die Invarianz von $\chi(L)$ ist z. B. bei O. Veblen, Cambridge Colloquium 1916, S. 7 bis 9 bewiesen.

8. Wir verfahren wieder mittels Induktion: für einen aus einem einzigen Bogen S_1 bestehenden Komplex ist $\nu(L)=\nu'(L)=p(L)=0$. Wir setzen voraus, die Identität (12) wäre für alle aus höchstens $r-1$ Bögen bestehende Komplexe bereits bewiesen, und beweisen sie für einen beliebigen aus r Bögen bestehenden Komplex L.

Da der Beweis für ν' und ν absolut analog ist, so bezeichnen wir im folgenden Raisonnement durch $\tilde{\nu}$ eine beliebige der Zahlen $\nu'(L)$ bzw. $\nu(L)$.

Es sei

$$P_0, P_1, \ldots, P_{\tilde{\nu}-1} \tag{13}$$

ein in L enthaltenes, aus $\tilde{\nu}$ Polygonen (bzw. *einfachen* Polygonen) bestehendes irreduzibles System. Es gibt wenigstens einen Bogen S, der in (13) ein einzigesmal vorkommt, und es sei z. B. $S \subset P_0$. Nach Weglassung des Bogens S verwandelt sich L in einen, noch immer zusammenhängenden, Komplex L'. Dann ist

$$\tilde{\nu}(L') = \tilde{\nu} - 1 \tag{14}$$

(wobei $\tilde{\nu}(L')$ die Zahl $\nu(L') = \nu'(L')$ bedeutet).

In der Tat: einerseits bilden $P_1, \ldots, P_{\tilde{\nu}-1}$ ein aus $\tilde{\nu}-1$ Polygonen bestehendes, in L' enthaltenes irreduzibles System, woraus folgt, daß $\tilde{\nu}(L') \geqq \tilde{\nu} - 1$ ist. Andrerseits kann aber $\tilde{\nu}(L')$ unmöglich größer als $\tilde{\nu}-1$ sein, weil im letzteren Falle ein aus $\tilde{\nu}$ Polygonen

$$P_1^*, P_2^*, \ldots, P_{\tilde{\nu}}^*$$

bestehendes, in L' enthaltenes irreduzibles System vorhanden wäre, das durch Hinzufügung des Polygones P_0 in ein in L enthaltenes, aus $\tilde{\nu}+1$ Polygonen bestehendes, der Definition der Zahl $\tilde{\nu}$ widersprechendes, irreduzibles System übergehen würde. Da aber $\tilde{\nu}(L') = p(L')$ und $p(L') = p(L) - 1$ ist, so folgt die Identität (12) ohne weiteres aus (14), w. z. b. w.

9. Wir geben endlich noch eine Interpretation von $p(L)$, die, obwohl im folgenden nicht gebraucht, in mancher Untersuchung als nützlich erscheinen dürfte.

10. Ein Paar von identischen, aber verschieden orientierten Bögen eines Komplexes werden wir ein *Nullpaar* nennen.

Wir wollen jetzt eine Einschiebung eines Nullpaares zwischen zwei aufeinanderfolgenden Bögen eines beliebigen Polygons P und ebenso eine Fortlassung aus P eines eventuell daselbst enthaltenen Nullpaares als *erlaubte* Abänderungen des Polygons P bezeichnen.

Wir sagen nun, daß das Polygon P sich auf ein gegebenes System $\mathfrak{S}$ von in L enthaltenen Polygonen *zurückführen läßt*, falls durch sukzessive

Anwendung erlaubter Abänderungen man P in ein Polygon P^* verwandeln kann, welches durch Durchlaufung gewisser Polygone

$$P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(\lambda)},$$

unter denen es beliebig viele identische geben darf, die aber alle zu $\mathfrak{S}$ gehören, konstruierbar ist.

Wir bezeichnen endlich durch $\mu(L)$ die kleinste so beschaffene Zahl, daß es ein aus $\mu(L)$ in L enthaltenen Polygonen bestehendes System $\mathfrak{S}$ gibt, auf welches sich alle in L vorhandenen Polygone zurückführen lassen[5]).

Wir überlassen dem Leser den leichten (mittels des wiederholt angewandten Induktionsverfahrens durchzuführenden) Beweis der Identität $\mu(L) = p(L)$,

Es sei endlich bemerkt, daß, falls L eine ebene, einen Bogenkomplex realisierende Kurve ist, die Anzahl der zusammenhängenden Gebiete, in die L die Ebene zerlegt, gleich der Zahl $p(L)+1$ ist. (Der Beweis ist unmittelbar einleuchtend: man bediene sich der Identität $p(L) = s(L)$).

11. Die Zahl $\varkappa(L) = p(L) + 1$, wobei also

$$p(L) = s(L) = s'(L) = \nu(L) = \nu'(L) = \mu(L) = \alpha_1(L) - \alpha_0(L) + 1 \quad {}^{6})$$

ist, wollen wir die *Zusammenhangszahl* des Bogenkomplexes L nennen.

12. Wir schreiten jetzt zum Beweise folgenden Satzes.

Additionssatz für Bogenkomplexe. *Es seien L_0 und L_1 zwei gemeinsame Elemente besitzende einfach zusammenhängende*[7]) *Bogenkomplexe und q die Komponentenzahl des* (im allgemeinen nicht zusammenhängenden) *Bogenkomplexes $L_1 \cdot L_0$. Indem wir durch L den* (zusammenhängenden) *Bogenkomplex $L_1 + L_0$ bezeichnen, gilt die Identität:*

$$\varkappa(L) = q.$$

Beweis. Man kann den Komplex L in der Weise aufbauen, daß man mit L_1 anfängt und dann der Reihe nach sämtliche in L_1 nicht vorhandene Bögen des Komplexes L_0 anheftet, dabei jedoch dafür sorgt, daß alle sukzessiv entstehenden Komplexe

$$L_1, L_2, \ldots, L_m, \ldots, L_r = L, \quad L_m = L_{m-1} + S_{m-1} \qquad (m = 2, \ldots, r)$$

zusammenhängend seien. Wir bezeichnen durch q_m die Komponentenzahl

[5]) Die Zahl $\mu(L)$ dürfte als ein kombinatorisches Äquivalent der Brouwerschen Zyklosis betrachtet werden.

[6]) $\alpha_1(L)$ bzw. $\alpha_0(L)$ bezeichnet die Anzahl der in L vorkommenden 1- bzw. 0-dimensionalen Elemente.

[7]) Ein Bogenkomplex L soll einfach zusammenhängend heißen, falls $\varkappa(L) = 1$ ist.

von $L_m \cdot L_0$ $(m = 1, 2, \ldots, r)$. Unser Satz wird bewiesen, sobald wir zeigen werden, daß für jedes m $(1 \leqq m \leqq r)$

$$(15) \qquad p(L_m) + q_m = q$$

ist (da letztere Gleichung für $m = r$ in $p(L) + 1 = q$ übergeht).

Für $m = 1$ ist $p(L_m) = 0$ und $q_m = q$, also (15) richtig.

Vorausgesetzt, die Gleichung (15) wäre für m bewiesen; wir wollen sie für $m + 1$ beweisen.

Wir betrachten zwei Fälle:

1. S_m hat mit L_m beide Endpunkte a und b gemeinsam. Dann ist $p(L_{m+1}) = p(L_m) + 1$. Die Punkte a und b können aber unmöglich zu einer Komponente Q von $L_m \cdot L_0$ gehören, weil man sie in diesem Falle innerhalb $Q \subset L_0$ durch einen einfachen Weg W verbinden könnte, der zusammen mit S_m ein in L_0 enthaltenes geschlossenes Polygon liefern würde, was zufolge dem einfachen Zusammenhange des Komplexes L_0 unmöglich ist.

Da also S_m zwei Komponenten von $L_m \cdot L_0$ verbindet, so ist die Komponentenzahl q_{m+1} von $L_{m+1} \cdot L_0 = L_m \cdot L_0 + S_m$ gleich $q_m - 1$, so daß $p(L_{m+1}) + q_{m+1} = p(L_m) + q_m = q$ ist.

2. S_m hat mit L_m nur einen Endpunkt gemeinsam. Dann hat S_m nur mit einer Komponente von $L_m \cdot L_0$ einen Endpunkt gemeinsam, und es ist $p(L_{m+1}) = p(L_m)$; $q_{m+1} = q_m$, also auch $p(L_{m+1}) + q_{m+1} = q$, w. z. b. w.

Bemerkung. Eine auf der Hand liegende Modifikation[8]) der soeben angewandten Methode zeigt daß, falls man auf den *einfachen* Zusammenhang von L_0 und L_1 verzichtet, man jedenfalls die Ungleichung

$$(15\text{ bis}) \qquad \varkappa(L) \geqq q$$

beweisen kann. Man könnte auch in diesem Falle einen genauen Wert für $\varkappa(L)$ angeben, für unsere weiteren Zwecke aber wird die Abschätzung (2) im Falle einer höheren Zusammenhangszahl von L_0 oder L_1 vollkommen genügen.

II. Die Zusammenhangszahl der allgemeinen Kurven.

Nachdem wir den Begriff der Zusammenhangszahl für Bogenkomplexe eingehend untersucht haben, ist der Weg zur Übertragung dieses Begriffes

[8]) Man ersetzt die Gleichung (15) durch die Ungleichung

$$p(L_m) + q_m \geqq q$$

und bemerkt, daß im Falle 1., wie früher, $p(L_{m+1}) = p(L_m) + 1$, dabei aber $q_{m+1} \geqq q_m - 1$ ist (weil S_m jedenfalls *höchstens* zwei verschiedene Komponenten von $L_m \cdot L_0$ verbinden kann).

auf allgemeine Kurven durch die Betrachtungen der unter [1a]) zitierten Arbeit von selbst und gewissermaßen eindeutig bestimmt.

13. Es sei C eine allgemeine Kurve, d. h. ein zusammenhängender kompakter eindimensionaler metrischer Raum. Zwei Fälle sind möglich:

1°. Für jedes das Kontinuum C definierende eindimensionale Spektrum[9])

$$L_1, L_2, \ldots, L_m, \ldots \tag{16}$$

wächst $\varkappa(L_m)$ mit m ins Unendliche; in diesem Falle soll C *unendlich hoch zusammenhängend* heißen, und $\varkappa(C) = \infty$ gesetzt sein.

2°. Es gibt wenigstens ein das Kontinuum C definierendes Spektrum (16) und eine natürliche Zahl h_0 von der Beschaffenheit, daß für unendlich viele L_m

$$\varkappa(L_m) \leqq h_0$$

ist. Dann gibt es eine Zahl $h \leqq h_0$ derart, daß für unendlich viele L_m

$$\varkappa(L_m) = h$$

ist. Indem man nur dieser Gleichung genügende L_m behält, erhält man ein Spektrum, für dessen *sämtliche* Komplexe die Zusammenhangszahl denselben endlichen Wert h annimmt.

Im Falle 2 soll C *endlich hoch zusammenhängend* heißen und zwar soll die Zusammenhangszahl $\varkappa(C)$ als die kleinste derjenigen Zahlen h definiert werden, für die es ein das Kontinuum C definierendes Spektrum gibt, dessen sämtliche Komplexe die Zusammenhangszahl h besitzen.

14. Aus Betrachtungen der unter [1a]) zitierten Abhandlung ergibt sich sofort, daß die Zahl $\varkappa(C)$ eine kombinatorische Eigenschaft der Kurve C ausdrückt, die auch folgendermaßen definiert werden kann.

Es sei $\mathfrak{P}^{(\varepsilon)}$ irgendeine $(\varepsilon, 2)$-Überdeckung der Kurve C, d. h. es sei $\mathfrak{P}^{\varepsilon}$ ein System von abgeschlossenen Mengen

$$F_1, F_2, \ldots, F_n, \tag{17}$$

die den Bedingungen

$$\sum_{m=1}^{n} F_m = C, \quad \delta(F_m) < \varepsilon \quad (\text{für } m = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen und außerdem so beschaffen sind, daß *kein Punkt von C mehr als in zwei Mengen des Systems* (17) *enthalten ist.* (Letztere Bedingung

---

[9]) L_m sind die das Spektrum bildenden eindimensionalen Komplexe; in den folgenden Paragraphen dieses Abschnittes wird der Begriff der Zusammenhangszahl in einer von den Entwicklungen der unter [1a]) zitierten Arbeit unabhängigen Form dargestellt.

wird auch so zum Ausdruck gebracht, daß wir sagen, das System (17) sei ein System von der *Ordnung* 2 [10]).

Wir bestimmen einen zusammenhängenden Bogenkomplex $L_{\mathfrak{P}^\varepsilon}$, indem wir jeder Menge F_i $(1 \leqq i \leqq n)$ einen „Punkt“ a_i und jedem *gemeinsame Punkte besitzenden* Mengenpaare F_i, F_j einen „Bogen“ $\overline{a_i a_j}$ des Komplexes $L_{\mathfrak{P}^\varepsilon}$ entsprechen lassen.

Dann ist $\varkappa(C) = \infty$, falls (für ein genügend kleines ε) $\varkappa(L_{\mathfrak{P}^\varepsilon})$, wie auch $\mathfrak{P}^\varepsilon$ gewählt sei, beliebig groß ausfällt.

Falls dies nicht zutrifft, heißt C endlich hoch zusammenhängend und zwar ist dann $\varkappa(C)$ gleich der kleinsten natürlichen Zahl k, die so beschaffen ist, daß es für *jedes* $\varepsilon > 0$ ein $\mathfrak{P}^\varepsilon$ mit $\varkappa(L_{\mathfrak{P}^\varepsilon}) = k$ gibt.

15. Bemerkung. Falls C in einem mindestens 3 dimensionalen Euklidischen Raume R liegt, kann man für jedes $\mathfrak{P}^\varepsilon$ den Komplex $L_{\mathfrak{P}^\varepsilon}$ geometrisch realisieren, indem man für a_i wirkliche, voneinander verschiedene Punkte $a_i \subset F_i$ wählt, und diese Punkte in R durch von den geradlinigen Strecken $a_i a_j$ sich beliebig wenig entfernende Streckenzüge $\overline{a_i a_j}$ dann und nur dann verbindet, falls $F_i \cdot F_j \neq 0$. Dabei ist natürlich dafür zu sorgen, daß die auf diese Weise gewonnenen Bögen keine weiteren gemeinsamen Punkte haben.

Die soeben erhaltene elementare Kurve $L_{\mathfrak{P}^\varepsilon}$ approximiert C mit einer gleichzeitig mit $\frac{1}{\varepsilon}$ unendlich wachsenden Genauigkeit.

16. Man kann endlich bei der Definition der Zusammenhangszahl den Gebrauch der Bogenkomplexe wenigstens formal vermeiden, wenn man direkt mit Überdeckungen und zwar folgendermaßen operiert.

Definition. Ein Mengensystem $\mathfrak{S}$ heißt ein Zyklus, falls jede Menge des Systems genau mit zwei anderen Mengen desselben Systems gemeinsame Punkte hat.

Def. I′ (vgl. Def. I des § 7). Ein System von Zyklen heißt ein *Nullsystem*, falls jedes Paar gemeinsame Punkte besitzender Mengen, die in einem Zyklus vorkommen, wenigstens noch zu einem anderen Zyklus desselben Systems gehört.

Def. II′ (vgl. Def. II des § 7). Ein System von Zyklen heißt irreduzibel, falls es kein Nullsystem enthält.

Es sei jetzt $\mathfrak{P}^\varepsilon$ eine beliebige ε-Überdeckung von C. Wir nennen $\nu(\mathfrak{P}^\varepsilon)$ die größte Zahl ν, die als Zyklenanzahl eines irreduziblen Zyklensystems,

---

[10]) Im folgenden soll unter einer Überdeckung immer eine solche von der Ordnung 2 verstanden werden, und wir werden eine $(\varepsilon, 2)$-Überdeckung auch kurz als eine ε-Überdeckung bezeichnen.

dessen sämtliche Zyklen aus Elementen von $\mathfrak{P}^\varepsilon$ gebildet sind, vorkommt, und definieren weiter:

$$\varkappa(\mathfrak{P}^\varepsilon) = \nu(\mathfrak{P}^\varepsilon) + 1.$$

$\varkappa(C)$ soll alsdann (falls endlich) gleich der kleinsten Zahl gesetzt werden, die so beschaffen ist, daß es für jedes ε ein $\mathfrak{P}^\varepsilon$ mit

$$\varkappa(\mathfrak{P}^\varepsilon) = \varkappa(C)$$

gibt.

17. Diese Betrachtungsweise, die unserer früheren unmittelbar äquivalent ist, gestattet, den Begriff des *mehrfachen* ($\varkappa(C) > 1$) bzw. *einfachen* ($\varkappa(C) = 1$) Zusammenhanges einer Kurve besonders einfach zu formulieren.

Eine Kurve heißt *mehrfach zusammenhängend*, falls für ein genügend kleines ε jede ε-Überdeckung wenigstens einen Zyklus enthält.

Im entgegengesetzten Falle (d. h. wenn für jedes ε wenigstens eine, *keinen* Zyklus enthaltende Überdeckung vorhanden ist) heißt die Kurve *einfach zusammenhängend*.

Dabei braucht man gar nichts über die *Ordnung* der Überdeckungen vorauszusetzen, weil drei beliebige, einen und denselben Punkt enthaltende Mengen einen Zyklus bilden.

18. Eine unmittelbare Folge der Definition der Zahl $\varkappa(C)$ ist folgender wichtiger Satz: *Falls die Kurve C_0 in der Kurve C enthalten ist, so ist*

$$\varkappa(C_0) \leqq \varkappa(C). \tag{18}$$

In der Tat „induziert" jede (aus den Mengen (17) bestehende) Überdeckung $\mathfrak{P}^\varepsilon$ der Kurve C die aus den Mengen $C_0 \cdot F_m$ $(1 \leqq m \leqq n)$ gebildete Überdeckung $\mathfrak{P}_0^\varepsilon$ der Kurve C_0. Man erhält $L_{\mathfrak{P}_0^\varepsilon}$, indem man diejenigen „Punkte" a_i bzw. „Bögen" $\overline{a_i a_j}$ in $L_{\mathfrak{P}^\varepsilon}$ markiert, die nicht leeren Mengen $C_0 \cdot F_i$ bzw. $C_0 \cdot F_i \cdot F_j$ entsprechen.

Da also $L_{\mathfrak{P}_0^\varepsilon} \subset L_{\mathfrak{P}^\varepsilon}$ und folglich $\varkappa(L_{\mathfrak{P}_0^\varepsilon}) \leqq \varkappa(L_{\mathfrak{P}^\varepsilon})$ ist, so ist auch $\varkappa(C_0) \leqq \varkappa(C)$, w. z. b. w.

19. Wir wollen jetzt einen Satz beweisen, der, wie es sich im nächsten Abschnitte zeigen wird, eine direkte Verallgemeinerung eines bekannten ebenen Zerlegungssatzes von Janiszewski[11]) darstelltt.

Additionssatz. *Falls C_1 und C_2 zwei einfach zusammenhängende Kurven sind und die Menge $C_0 = C_1 \cdot C_2$ aus $k \geqq 1$ Komponenten besteht*

[11]) S. Janiszewski, Sur les coupures du plan faites par les continus, Prace mat.-fiz. 1913.

(wo k eine natürliche Zahl oder ∞ ist), so ist $C_1 + C_2 = C$ eine k-fach zusammenhängende Kurve.

Beweis. Zuerst beweisen wir, daß $\varkappa(C) \leqq k$ ist. Dabei kann man selbstverständlich sich auf den Fall, wo k eine natürliche Zahl ist, beschränken.

20. Es sei ε eine positive Zahl, die kleiner als die Hälfte der kleinsten Entfernung zwischen je zwei Komponenten von $C_0 = C_1 \cdot C_2$ und sonst beliebig ist. Wir wollen eine ε-Überdeckung $\mathfrak{P}$ der Kurve C konstruieren, für die der Komplex $L = L_{\mathfrak{P}}$ k-fach zusammenhängend ist.

Dazu wählen wir zuerst eine keinen Zyklus enthaltende $\frac{\varepsilon}{2}$-Überdeckung

$$\mathfrak{P}_0 = \{F_1^0, F_2^0, \ldots, F_{n_0}^0\} \tag{19}$$

der abgeschlossenen Menge C_0 und bestimmen eine positive Zahl δ, die folgenden Bedingungen genügt:

1°. δ ist kleiner als jede *positive* unter den Zahlen $\frac{1}{2}\varrho(F_i^0, F_k^0)$ und als $\frac{\varepsilon}{4}$.

2°. Die Mengen $\bar{S}(F_m^0, \delta)$ $(m = 1, 2, \ldots, n_0)$ bilden ein System von der Ordnung 2 (dabei bedeutet $\bar{S}(F_m^0, \delta)$ die Menge aller Punkte, deren Entfernung von F_m^0 höchstens gleich δ ist).

Wir wählen weiter für $\lambda = 1$ bzw. $\lambda = 2$ eine keinen Zyklus enthaltende δ-Überdeckung

$$\mathfrak{P}_\lambda = \{F_1^\lambda, F_2^\lambda, \ldots, F_{\bar{n}_\lambda}^\lambda\} \tag{20}$$

von C_λ, und bezeichnen durch $F_{m,i}^\lambda$ $(1 \leqq m \leqq n_0,\ 1 \leqq i \leqq r_m^{(\lambda)})$ diejenigen F_k^λ $(1 \leqq k \leqq \bar{n}_\lambda)$, die mit keiner Menge F_h^0 $(1 \leqq h \leqq m-1)$, wohl aber mit F_m^0 gemeinsame Punkte haben. Wir setzen

$$\Phi_m^0 = F_m^0 + \sum_{i=1}^{r_m^{(1)}} F_{m,i}^1 + \sum_{i=1}^{r_m^{(2)}} F_{m,i}^2 \qquad (1 \leqq m \leqq n_0). \tag{21}$$

Da $\Phi_m^0 \subset S(F_m^0, \delta)$ ist, so bilden die Φ_m^0 ein Mengensystem $\mathfrak{P}^0$ von der Ordnung 2.

Wir bezeichnen endlich durch

$$\Phi_1^1, \Phi_2^1, \ldots, \Phi_{n_1}^1 \tag{22_1}$$

bzw.

$$\Phi_1^2, \Phi_2^2, \ldots, \Phi_{n_2}^2 \tag{22_2}$$

alle „übrigen" (d. h. zu $\sum_{m=1}^{n_0} F_m^0 = C_0$ fremden) Mengen F_m^λ, und merken uns, daß stets

$$\Phi_i^1 \cdot \Phi_k^2 = 0 \qquad (1 \leqq i \leqq n_1;\ 1 \leqq k \leqq n_2) \tag{23}$$

ist. Daraus, aus der Definition der Φ_m^0, und aus der Bemerkung über die Ordnung des Systems $\mathfrak{P}^0$ folgt, daß das System $\mathfrak{P}$ aller Mengen Φ_m^0, Φ_k^1, Φ_l^2 (die sämtlich einen Durchmesser $< \frac{\varepsilon}{2} + 2\delta < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ haben) die Ordnung 2 besitzt und also eine ε-Überdeckung[10]) der Kurve C bildet.

Wir wollen nun zeigen, daß der dieser Überdeckung entsprechende Bogenkomplex $L = L_{\mathfrak{P}}$ k-fach zusammenhängend ist. Dazu betrachten wir den zufolge unserer Voraussetzung über ε und δ aus k Komponenten bestehenden Komplex $L_0 = L_{\mathfrak{P}^0}$ und die beiden Komplexe $L^\lambda = L_{\mathfrak{P}^\lambda}$ $(\lambda = 1; 2)$, wobei $\mathfrak{P}^\lambda$ das aus sämtlichen Mengen Φ_m^0 $(1 \leqq m \leqq n_0)$ und $\Phi_m^\lambda (1 \leqq m \leqq n_\lambda)$ gebildete System ist. Dann ist $L = L^1 + L^2$, $L_0 = L^1 \cdot L^2$. Zufolge dem Additionssatz für Komplexe (§ 12) brauchen wir nur zu zeigen, daß $\varkappa(L_\lambda) = 1$ ist $(\lambda = 1; 2)$, d. h. daß L^λ kein geschlossenes Polygon enthalten kann.

Es sei in der Tat P ein in L^λ enthaltenes einfaches geschlossenes Polygon. Da P weder in L^0 noch in $L^\lambda - L^0$ enthalten sein kann, so besteht $P \cdot L^0$ aus einem oder mehreren Wegen, von denen jeder sich übrigens in einen einzigen Eckpunkt von P ausarten kann, und die die Komponenten von $P \cdot L^0$ bilden.

Indem wir allgemein den Mengen Φ_n^λ bzw. F_n^λ die „Punkte" α_n^λ bzw. a_n^λ $(\lambda = 1; 2)$ der betreffenden Komplexen zuordnen, bezeichnen wir durch

$$W = \overline{\alpha_{\sigma_1}^0 \ldots \alpha_{\sigma_p}^0}$$

einen beliebigen der soeben erwähnten Wege, und es sei

$$\alpha_\sigma^\lambda = a_s^\lambda, \quad \text{bzw.} \quad \alpha_\tau^\lambda = a_t^\lambda$$

der in P dem Punkt $\alpha_{\sigma_1}^0$ vorangehende bzw. auf $\alpha_{\sigma_p}^0$ folgende Eckpunkt.

Da $\Phi_\sigma^\lambda = F_s^\lambda$ bzw. $\Phi_\tau^\lambda = F_t^\lambda$ mit $\Phi_{\sigma_1}^0$ bzw. $\Phi_{\sigma_p}^0$ gemeinsame Punkte hat, zu $F_{\sigma_1}^0$ bzw. $F_{\sigma_p}^0$ dagegen fremd ist, so gibt es eine Menge $F_{s_0}^\lambda = F_{\sigma_1, i}^\lambda \subset \Phi_{\sigma_1}^0$ bzw. $F_{s_{p+1}}^\lambda = F_{\sigma_p, j}^\lambda \subset \Phi_{\sigma_p}^0$ derart, daß

$$F_{s_0}^\lambda \cdot F_s^\lambda \neq 0 \neq F_{s_0}^\lambda \cdot F_{\sigma_1}^0$$

bzw.

$$F_{s_{p+1}}^\lambda \cdot F_t^\lambda \neq 0 \neq F_{s_{p+1}}^\lambda \cdot F_{\sigma_p}^0$$

ist. Es folgt daraus insbesondere, daß die beiden Bögen $\overline{a_{s_0} a_s}$ bzw. $\overline{a_{s_{p+1}} a_t}$ im Komplex $L_\lambda = L_{\mathfrak{P}_\lambda}$ vorhanden sind.

Infolge der getroffenen Wahl von ε und δ gehört die Menge $C_0 \cdot \sum_{i=1}^{p} \Phi_{\sigma_i}^0$ zu einer Komponente Q von C_0. Der der Gesamtheit aller zu Q nicht fremden Mengen F_n^λ entsprechende Teilkomplex $L_{\lambda, Q}$ des Komplexes L_λ ist zusammenhängend und enthält die beiden Punkte a_{s_0} und $a_{s_{p+1}}$, woraus folgt, daß diese Punkte innerhalb $L_{\lambda, Q}$ durch einen Weg

$$\overline{a_{s_0} a_{s_1} \dots a_{s_{p+1}}}$$

verbunden werden können.

Den in L_λ enthaltenen Weg

$$\overline{a_s a_{s_0} \dots a_{s_{p+1}} a_t} \qquad (a_s = \alpha_\sigma, \quad a_t = \alpha_\tau)$$

bezeichnen wir durch W^* und ersetzen in P den Weg W durch W^*. Nachdem wir dies für jede Komponente W von $P \cdot L^0$ tun, verwandelt sich P in ein geschlossenes (im allgemeinen nicht singularitätenfreies), in L_λ auf eine widerspruchsvolle Weise enthaltenes Polygon P^* [12]). Die Ungleichung $\varkappa(C) \leqq k$ ist hiermit bewiesen.

21. Um jetzt die Ungleichung $\varkappa(C) \geqq \bar{k}$ zu beweisen ($\bar{k}$ ist dabei gleich k, falls letztere Zahl endlich ist; falls dagegen $k = \infty$, so nimmt man für $\bar{k}$ eine beliebig große Zahl), womit offenbar auch der ganze Satz bestätigt sein wird, genügt es zu zeigen, daß, falls $\varepsilon > 0$ hinreichend klein gewählt ist und $\mathfrak{P}$ eine beliebige ε-Überdeckung der Kurve C ist, der Komplex $L = L_{\mathfrak{P}}$ mindestens $\bar{k}$-fach zusammenhängend ist.

Da die Komponentenzahl für C_0 mindestens gleich $\bar{k}$ ist, so kann man C_0 in die Summe Q von $\bar{k}$ paarweise zueinander fremden abgeschlossenen Mengen $Q_1, Q_2, \dots, Q_{\bar{k}}$ so einschließen, daß

$$2\gamma = p(C_1 - Q,\ C_2 - Q)$$

positiv ist. Wir wählen nun ε kleiner als jede der Zahlen γ, $\frac{1}{2}\varrho(Q_p, Q_q)$, $1 \leqq p < q \leqq \bar{k}$, und bezeichnen durch $\mathfrak{P} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ eine beliebige ε-Überdeckung der Kurve C und durch $\mathfrak{P}_0$ bzw. $\mathfrak{P}_1$ bzw. $\mathfrak{P}_2$ das System derjenigen unter den Mengen $F_1, F_2, \dots, F_n$, die zu Q bzw. C_1 bzw. C_2 nicht fremd sind. Zufolge der Wahl der Zahl ε besteht der Komplex $L_0 = L_{\mathfrak{P}_0}$ mindestens aus $\bar{k}$ Komponenten, und da

$$L = L_1 + L_2$$

$$L_0 = L_1 \cdot L_2$$

ist (wo $L_\lambda = L_{\mathfrak{P}_\lambda}$ gesetzt ist), so folgt aus dem Resultat des § 12 (Ungl. 15 bis), daß $\varkappa(L) \geqq \bar{k}$ ist, w. z. b. w.

---

[12]) Das Polygon P^* ist sicher kein „Nullpolygon" (d. h. es läßt sich nicht durch Aufheben von je zweimal in verschiedener Richtung zu durchlaufenden Seiten auf einen Punkt reduzieren). In der Tat: alle Punkte vom Typus a_r^λ des Polygons P bleiben einfache Punkte des Polygons P^*, weil die Eckpunkte der neu hinzukommenden Wege W^* denjenigen F_n^λ entsprechen, die mit C_0 gemeinsame Punkte haben und also von den $a_r^\lambda = \alpha_\varrho^\lambda$ gewiß verschieden sind.

III. Der Brouwersche Invarianzsatz.

22. Es sei F eine in der Ebene E liegende, beschränkte abgeschlossene Menge. Wir werden stets durch $k(F)$ die Anzahl der durch F in E bestimmten, zusammenhängenden Gebiete (= Komponenten der Menge $E - F$) bezeichnen.

Der Zweck dieses Abschnittes ist die Identität

$$k(C) = \varkappa(C) \tag{24}$$

für jede ebene Cantorsche Kurve C zu beweisen, womit insbesondere der Brouwersche Satz[13]) über die Invarianz der Zahl $k(C)$ für alle Cantorschen Kurven aufs neue bewiesen wird. Da dadurch auch der Jordansche Kurvensatz und folglich auch die Invarianz des ebenen Gebietes bewiesen werden und da jedes ebene Kontinuum sich in eine Cantorsche Kurve C und eine höchstens abzählbare Menge zueinander fremder, sich unter den Komponenten der Menge $E - C$ befindender Gebiete eindeutig zerlegen läßt, so folgt aus unserer Behauptung (24) der Brouwersche Invarianzsatz in seiner vollen Allgemeinheit. Das Hauptziel dieses Abschnittes ist aber nicht einen zweiten Beweis des Brouwerschen Satzes zu geben, sondern die Identität (24) selbst zu beweisen: dadurch wird nämlich u. a. gezeigt, daß die Anzahl der durch eine ebene Kurve bestimmten komplementären Gebiete eine im Sinne des § 19 der vorstehenden Abhandlung kombinatorische Eigenschaft der Kurve ist.

A. Beweis der Ungleichung $\varkappa(C) \geqq k(C)$.

23. Es sei C eine in der Ebene E des dreidimensionalen Raumes R liegende Cantorsche Kurve und k eine natürliche Zahl, die gleich $k(C)$, falls $k(C)$ endlich ist, und beliebig groß, im Falle $k(C) = \infty$, zu wählen ist.

Wir bezeichnen durch $G_1, G_2, \ldots, G_{k-1}$ alle (bzw. irgendwelche unter den) beschränkten Komponenten der Menge $E - C$. Es seien weiter $G_1^*, G_2^*, \ldots, G_{k-1}^*$ bzw. in $G_1, G_2, \ldots, G_{k-1}$ liegende, durch einfache geschlossene Polygone $P_1^*, P_2^*, \ldots, P_{k-1}^*$ begrenzte Bereiche; $c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}$ bzw. im Inneren dieser Bereiche liegende Punkte; $d_1, d_2, \ldots, d_{k-1}$ außerhalb eines die Kurve C im Innern enthaltenden Kreises K liegende, voneinander verschiedene Punkte; $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{k-1}$ zu einander fremde, einfache, geschlossene Polygone, die folgendermaßen definiert sind:

Π_m besteht aus einer, den Punkt c_i als Mittelpunkt besitzenden, zu der Ebene E senkrecht stehenden Strecke $c_m' c_m''$; aus zwei einfachen Streckenzügen $c_m' d_m'$ bzw. $c_m'' d_m''$, die in den durch c_m' bzw. c_m'' gezogenen

[13]) Brouwer, Beweis der Invarianz der geschlossenen Kurve, Math. Ann. 72 (1912), S. 422—425.

zu E parallelen Ebenen liegen und in den sich orthogonal in d_m projizierenden Punkten d'_m bzw. d''_m endigen; endlich aus der geradlinigen Strecke $d'_m d d''_m$.

Es wird außerdem vorausgesetzt, daß die ganze Konstruktion so eingerichtet ist, daß für jeden innerhalb K gelegenen Punkt der Ebene E der nächste Punkt des Polygones Π_m eben der Punkt c_m ist.

Das Polygon Π_m ist mit P_m, dagegen mit keinem der übrigen Polygone $P_1^*, \ldots, P_{m+1}^*, \ldots, P_{k-1}^*$ verschlungen und zwar ist die betreffende Verschlingungsordnung gleich 1.

24. Die Verschlingungsverhältnisse zwischen den Polygonen Π_m und P_m^* bleiben dieselben, falls man ein beliebiges der Polygone P_m^* durch ein in G_m enthaltenes, den Bereich G_m^* im Innern enthaltendes Polygon P_m^{**} ersetzt.

25. Es sei nun σ die kleinste unter allen Zahlen $\frac{1}{2}\varrho(P_m^*, C)$ und $\frac{1}{2}\varrho(P_m^*, \Pi_h) = \frac{1}{2}\varrho(P_m^*, c_h)$ (wobei m und h unabhängig voneinander alle Werte $1, 2, \ldots, k-1$ durchlaufen). Dann ist die Entfernung $\varrho(P_m^{**}, \Pi_h) \geqq 2\sigma$, wie auch das den Bedingungen des § 24 genügende Polygon P_m^{**} gewählt sei. In der Tat ist für $m \neq h$

$$\varrho(P_m^{**}, \Pi_h) = \varrho(P_m^{**}, c_h) \geqq \varrho(C, c_h) > \varrho(C, P_h^*) \geqq 2\sigma$$

und außerdem

$$\varrho(P_m^{**}, \Pi_m) = \varrho(P_m^{**}, c_m) \geqq \varrho(P_m^*, c_m) \geqq 2\sigma.$$

Falls wir also irgendein P_m^{**} durch ein Polygon P_m ersetzen, dessen sämtliche Punkte durch weniger als σ betragende Verrückungen entsprechender Punkte von P_m^{**} entstanden sind, so bleiben die Verschlingungsverhältnisse zwischen allen P_m und Π_h dieselben wie zwischen (P_m^{**} und Π_h, also wie zwischen) P_m^* *und* P_h [14]).

26. Wir wählen jetzt eine positive Zahl $\varepsilon < \frac{1}{6}\sigma$ und irgendeine ε-Überdeckung

$$\mathfrak{P} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \tag{25}$$

der Kurve C.

Wir bezeichnen weiter durch δ eine positive Zahl, die kleiner als ε und sämtliche positive unter den Zahlen $\frac{1}{3}\varrho(F_i, F_j)$ ist. Es seien endlich

---

[14]) In der Tat hat Brouwer in der unter [2]) zitierten Arbeit, § 3, bewiesen, daß es für jedes Paar zueinander fremder geschlossener Polygone P und Π (im dreidimensionalen Raume) eine positive Zahl η gibt, die so beschaffen ist, daß, falls wir durch eine weniger als η betragende Verrückung jedes Punktes von P bzw. Π diese Polygone in Polygone $\tilde{P}$ bzw. $\tilde{\Pi}$ verwandeln, die Verschlingungszahl $(\tilde{P}, \tilde{\Pi})$ dieselbe wie (P, Π) bleibt. Es ist dabei leicht einzusehen, daß man für η die Hälfte von $\varrho(P, \Pi)$ nehmen kann (Antoine, Thèse, p. 37).

$a_i \subset F_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ durchweg verschiedene Punkte der Mengen F_i und $\overline{a_i a_j}$ die in R liegenden, gemäß der Vorschrift des § 15 konstruierten, die Punkte a_i und a_j, dann und nur dann, falls $F_i \cdot F_j \neq 0$ ist, verbindenden Streckenzüge. Auf diese Weise erhalten wir einen im Raume R realisierten Bogenkomplex $L = L_{\mathfrak{P}}$. Wir setzen noch voraus, daß die Bögen $\overline{a_i a_j}$ dieses Komplexes sich von den entsprechenden geradlinigen Strecken $\overline{a_i a_j}$ um weniger als ε entfernen.

Die Ungleichung $\varkappa(c) \geqq k(c)$ wird jetzt bewiesen, sobald gezeigt wird, daß $s'(L) \geqq k-1$ ist.

27. Es sei zu diesem Zwecke für jedes $m \leqq k-1$ P_m^{**} ein nach der Vorschrift des § 24 gebildetes Polygon, das so beschaffen ist, daß es zu jedem Punkte von P_m^{**} einen um weniger als δ entfernten Punkt von C gibt.

Nach eventueller Unterteilung der Seiten von P_m^{**} kann man erreichen, daß die Eckpunkte $b_1, b_2, \ldots, b_h, \ldots \pmod r$[15]) von P_m^{**} der Bedingung

$$\varrho(b_h, b_{h+1}) < \delta \tag{26}$$

genügen.

Es sei nun $\tilde{b}_h$ einer derjenigen Punkte von C, die am nächsten bei b_h liegen. Ich behaupte, daß, falls $\tilde{b}_h$ bzw. $\tilde{b}_{h+1}$ zu F_i bzw. zu F_j gehören, notwendig $F_i \cdot F_j \neq 0$ ist.

In der Tat, falls

$$\tilde{b}_h \subset F_i, \quad \tilde{b}_{h+1} \subset F_j \quad \text{und dabei} \quad F_i \cdot F_j = 0$$

wäre, so würde man die unmögliche Ungleichung

$$3\delta < \varrho(F_i, F_j) \leqq \varrho(\tilde{b}_h, \tilde{b}_{h+1}) \leqq \varrho(\tilde{b}_h, b_h) + \varrho(b_h, b_{h+1}) + \varrho(b_{h+1}, \tilde{b}_{h+1}) < 3\delta$$

haben. Falls wir für jedes h eine den Punkt $\tilde{b}_h$ enthaltende Menge F_{i_h} wählen und dabei nur dafür sorgen, daß für geometrisch zusammenfallende Punkte $\tilde{b}_h$ auch dieselben Mengen F_{i_h} gewählt seien, erhalten wir ein in L enthaltenes geschlossenes, im allgemeinen nicht singularitätenfreies Polygon

$$P_m = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}).$$

28. Wir lassen jetzt jedem Punkte b_h den Punkt a_{i_h} entsprechen und bilden irgendwie die Strecke $\overline{b_h b_{h+1}}$ eindeutig und stetig auf den Bogen $\overline{a_{i_h} a_{i_{h+1}}}$ (der geometrisch sich auch auf einen Punkt $a_{i_h} = a_{i_{h+1}}$ zusammenziehen kann) ab, so daß dabei die Punkte a_{i_h}, b_h bzw. $a_{i_{h+1}}, b_{h+1}$ einander entsprechen.

Dadurch wird jeder Punkt x von P_m^{**} in einen einzigen Punkt y

[15]) Die Bezeichnung $\pmod r$ besagt, daß b_h und b_{h+r} identisch sind.

von P_m und das ganze Polygon P_m^{**} in P_m eindeutig und stetig abgebildet, wobei folgende Ungleichung gilt:

$$\varrho(x, y) \leqq \varrho(x, b_h) + \varrho(b_h, \tilde{b}_h) + \varrho(\tilde{b}_h, a_{i_h}) + \varrho(a_{i_h}, y) < \delta + \delta + \varepsilon + 3\varepsilon < 6\varepsilon < \sigma \tag{26}$$

(es wird hier vorausgesetzt, daß x zur Strecke $\overline{b_h b_{h+1}}$ gehört).

Der Bemerkung des § 25 zufolge ist, auf Grund von (26), P_m mit Π_m und mit keinem der Polygone $\Pi_1, \ldots, \Pi_{m-1}, \Pi_{m+1}, \ldots, \Pi_{k-1}$ verschlungen; da dies für beliebiges $m \leqq k-1$ gilt, so ist $s'(L) \geqq k-1$ und also $\varkappa(L) \geqq k$, wodurch unsere Behauptung bewiesen ist[16]).

B. Beweis der Ungleichung $\varkappa(C) \leqq k(C)$.

29. Wir fangen mit folgendem *Hilfssatze* an:

Es seien

$$B_1, B_2, \ldots, B_n \tag{$\mathfrak{B}$}$$

ein System $\mathfrak{B}$ von der Ordnung 2 bildende, in der Ebene liegende, paarweise keinen gemeinsamen inneren Punkt besitzende, *einfach* zusammenhängende Polygonbereiche[17]), deren Vereinigungsmenge B zusammenhängend ist. Es sei weiter $L_{\mathfrak{B}}$ der Bogenkomplex, den man wie üblich erhält, indem man jeder Menge B_i, $1 \leqq i \leqq n$, einen „Punkt" a_i und jedem Paare gemeinsame Punkte besitzender Mengen B_i, B_j einen Bogen $\overline{a_i a_j}$ entsprechen läßt. Dann behauptet der Hilfssatz, daß

$$k(B) \geqq \varkappa(L_{\mathfrak{B}}) \tag{27}$$

ist.

30. Beweis. Es sei für jedes Paar $B_i \cdot B_j \neq 0$ $(i \neq j)$ eine bestimmte Komponente T_{ij} der Menge $B_i \cdot B_j$ gewählt. Also ist T_{ij} entweder ein gleichzeitig auf den Begrenzungen von B_i und B_j liegender Punkt d_{ij} oder ein Streckenzug $t' t''$, auf dem wir dann einen bestimmten, von seinen Eckpunkten verschiedenen Punkt d_{ij} markieren.

In dieser Weise wird auf der Begrenzung jedes Bereiches B_i eine gewisse Anzahl lauter verschiedener Punkte $d_{ij_1}, d_{ij_2}, \ldots, d_{ij_k}$ bestimmt, und zwar unter der Bedingung, daß stets d_{ij} und d_{ji} denselben Punkt bedeuten.

Es sei nun c_i ein bestimmter im Innern von B_i liegender Punkt. Indem man (für jedes i) c_i innerhalb B_i mit allen Punkten d_{ij} durch

[16]) Der soeben dargestellte Beweis hat manchen Berührungspunkt mit einem Teile des Brouwerschen Invarianzbeweises.

[17]) Unter einem (zusammenhängenden) Polygonbereich verstehen wir immer die abgeschlossene Hülle eines durch einen oder mehrere zueinander fremde *einfache* geschlossene Polygone begrenzten ebenen Gebietes.

einfache Wege W_{ij} verbindet und dafür sorgt, daß zwei Wege W_{ij} und W_{ik} keinen von c_i verschiedenen gemeinsamen Punkt haben, erhält man, indem man $W_{ij} + W_{ji}$ als einen Bogen $\overline{c_i c_j}$ betrachtet, eine, als Bogenkomplex betrachtet, mit $L_{\mathfrak{B}}$ identische, in B liegende Kurve L.

Die Kurve L bestimmt also[18]) in der Ebene E genau $\varkappa = \varkappa(L) = \varkappa(L_{\mathfrak{B}})$ zusammenhängende Gebiete

(28) $$G_1, G_2, \ldots, G_\varkappa.$$

Da jede Komponente der Menge $E - B$ in einem der Gebiete (28) enthalten ist, so wird unser Hilfssatz bewiesen, sobald wir zeigen, daß für kein m $(1 \leqq m \leqq \varkappa)$ die Menge $G_m - B$ leer ist.

31. Es sei zu diesem Zwecke L_m das das Gebiet G_m begrenzende (im allgemeinen nicht singularitätenfreie) Polygon und $\overline{a_i a_j} = W_{ij} + W_{ji}$ ein in L_m enthaltener Bogen. Wir betrachten die beiden Bereiche B_i und B_j und das entsprechende T_{ij}. Wir setzen zuerst voraus, daß T_{ij} ein Streckenzug $\overline{t' t''}$ ist. Da $\overline{t' t''}$ im Punkte d_{ij} den Bogen $\overline{a_i a_j}$ durchkreuzt, so kann man auf wenigstens einem der beiden Streckenzüge $\overline{d_{ij} t'}$ bzw. $\overline{d_{ij} t''}$, z. B. auf $\overline{d_{ij} t'}$ einen Punkt g derart finden, daß die ganze Strecke $\overline{d_{ij} g}$, abgesehen von ihrem Endpunkte d_{ij}, in G_m enthalten ist. Da aber d_{ij} der einzige Punkt der Menge $T_{ij} \cdot L$ ist, so ist der ganze Bogen $\overline{d_{ij} t'}$ bis auf den Punkt d_{ij}, insbesondere also der Punkt t' in G_m enthalten. Da der Punkt t' einerseits nur zu B_i und B_j gehört, andrerseits aber kein innerer Punkt der Menge $B_i + B_j$ ist, so ist t' auch kein innerer Punkt von B. Jede Umgebung des Punktes t' (*also insbesondere auch jede in* G_m *enthaltene Umgebung* dieses Punktes) enthält also Punkte von $E - B$, woraus folgt, daß $(E - B) \cdot G_m = G_m - B \neq 0$ ist.

Im Falle, wo T_{ij} mehr als einen Punkt enthält, ist hiermit unsere Behauptung bewiesen.

Es sei jetzt T_{ij} mit dem Punkte d_{ij} identisch. Hier ist wieder d_{ij} der einzige Durchkreuzungspunkt von $\overline{a_i a_j}$ und eines gewissen, auf der Begrenzung von B_i liegenden, aus zwei in d_{ij} zusammenhängenden, geradlinigen Strecken $\overline{d_{ij} e'}$, $\overline{d_{ij} e''}$ bestehenden Bogens $\overline{e' e''}$, den man so klein nehmen kann, daß z. B. $\overline{d_{ij} e'}$ bis auf d_{ij} erstens in G_m enthalten ist, zweitens (mit Ausnahme desselben Punktes d_{ij}) mit keinem der Bereiche B_h $(h \neq i)$ gemeinsame Punkte hat. Es sei nun x ein beliebiger, von d_{ij} verschiedener Punkt von $\overline{d_{ij} e'}$. Eine hinreichend kleine Umgebung von x ist einerseits in G_m enthalten, andrerseits enthält sie aber Punkte der

[18]) Da für ebene Bogenkomplexe $k(L) = \varkappa(L)$ ist (vgl. die am Ende des § 10 gemachte Bemerkung).

Menge $E - B$. Also ist wieder $G_m - B \neq 0$, womit unser Hilfssatz vollständig bewiesen ist.

32. Es sei jetzt C eine in der Ebene E liegende Cantorsche Kurve. Wir bezeichnen durch k eine natürliche Zahl, die beliebig groß ist, falls $\varkappa(C) = \infty$ ist, und die gleich $\varkappa(C)$ ist, falls letztere Zahl endlich ist.

Wir bezeichnen durch ε eine positive Zahl, die genügend klein ist, damit für jede 3ε-Überdeckung $\mathfrak{P}^{3\varepsilon}$ von C die Bedingung

$$\varkappa(L_{\mathfrak{P}^{3\varepsilon}}) \geqq k$$

erfüllt sei. Wir wählen jetzt eine bestimmte ε-Überdeckung

$$\mathfrak{P} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \tag{29}$$

der Kurve C und eine so kleine positive Zahl $\vartheta < \varepsilon$, daß die Mengen $\bar{S}(F_m, \vartheta)$ ein System von der Ordnung 2 bilden.

Die beiden folgenden, ganz evidenten, Bemerkungen werden für die Beweisführung von Wichtigkeit sein:

a) Falls

$$M_1, M_2, \ldots, M_r$$

irgendein Mengensystem von der Ordnung 2 und N_m eine Teilmenge von M_m ist, so ist auch das System aller N_m höchstens von der Ordnung 2.

b) Falls unter der ersten Voraussetzung des Satzes a) $M_m = \sum_{i=1}^{r_m} M_{m,i}$ und $M_{m,i} \cdot M_{m,k} = 0$ ist, so ist das System aller Mengen $M_{m,i}$ $(1 \leqq i \leqq r_m$, $1 \leqq m \leqq r)$ von der Ordnung 2.

33. Wir unterziehen jetzt die Ebene einer kanonischen [19]) quadratischen Unterteilung $\mathfrak{T}$ von der Seitenlänge $a < \frac{\vartheta}{2}$, und bezeichnen durch $\tilde{B}_m^*$ die Vereinigungsmenge derjenigen Quadrate des Systems $\mathfrak{T}$, die im Innern oder auf der Begrenzung Punkte von F_m enthalten.

Es seien weiter

$$B_1^*, B_2^*, \ldots, B_{r^*}^* \tag{30}$$

sämtliche Komponenten aller Mengen $\tilde{B}_m^*$ $(1 \leqq m \leqq n)$.

Wir setzen nun $\tilde{B}_1^0 = B_1^*$ und $\tilde{B}_m^0$ gleich der Vereinigungsmenge der-

[19]) D. h. einer solchen, die aus einer gewöhnlichen Unterteilung mit der Seitenlänge a dadurch entsteht, daß man von zwei benachbarten vertikalen Quadratreihen die eine eine Parallelverschiebung vom Betrage $\frac{a}{2}$ (in der Richtung der vertikalen Achse) erleiden läßt. Vgl. Lebesgue, Fund. Math. 2. — Der kanonische Charakter der Unterteilung $\mathfrak{T}$ garantiert das Erfülltsein der Bedingung $4^{(i)}$ des nächsten Paragraphen.

jenigen in B_m^* enthaltenen Quadrate der Unterteilung $\mathfrak{T}$, die nicht bereits in $\tilde{B}_1^0, \ldots, \tilde{B}_{m-1}^0$ aufgenommen sind. Es seien wieder

(31) $$B_1^0, B_2^0, \ldots, B_{n^{(0)}}^0$$

sämtliche Komponenten aller Mengen $\tilde{B}_m^0$ $(1 \leqq m \leqq r_0)$.

Das Mengensystem (32) besitzt folgende zum Teil evidente, zum Teil durch wiederholte Anwendung der beiden Bemerkungen a) und b) und der Voraussetzungen über die Zahl ϑ unmittelbar ersichtliche Eigenschaften, in deren Formulierung der obere Index $i = 0$ zu setzen ist:

$1^{(i)}$ Die Mengen B_m^i bilden ein System von der Ordnung 2

$2^{(i)}$ $B^i = \sum_{m=1}^{n^{(i)}} B_m^i \supset C$

$3^{(i)}$ $\delta(B_m^i) < 3\varepsilon \quad (1 \leqq m \leqq n^{(i)})$

$4^{(i)}$ Jede Menge B_m^i ist ein zusammenhängender Polygonbereich [17])

$5^{(i)}$ Zwei verschiedene Bereiche B_p^i und B_q^i haben keine gemeinsamen inneren Punkte

$\Bigg\}\; i = 0.$

Es kann vorkommen, daß man die Zusammenhangszahl (im klassischen Sinne) des Polygonbereiches B^0 durch Zerschneidung längs passend gewählter, *das Kontinuum C nicht treffender* einfacher polygonaler Wege erniedrigen kann. Man kann dann der Reihe nach endlich viele solcher Wege derart ziehen, daß ohne das Kontinuum C zu treffen keine weitere Erniedrigung der Zusammenhangszahl von B^0 möglich ist. Indem man unter Geltung evidenter Vorsichtsmaßnahmen [20]) jeden unserer Schnitte durch einen schmalen, das Kontinuum C nicht treffenden, etwa aus Quadraten einer genügend feinen Unterteilung der Ebene bestehenden Streifen ersetzt und dann die nach Tilgung dieser Streifen entstandenen Komponenten $B_{m,h}^0$ $(h = 1, 2, \ldots, r_h,\ 1 \leqq m \leqq n^0)$ der übrigbleibenden Teilmengen der Mengen B_m^0 in eine neue endliche Folge

(33) $$B_1^1, B_2^1, \ldots, B_{n^{(1)}}^1$$

ordnet, erhält man, wie früher, ein allen Bedingungen $1^{(i)}$ bis $5^{(i)}$ $(i = 1)$ genügendes Mengensystem.

34. Wir betrachten nun die zum Polygonbereiche $B^1 = \sum_{m=1}^{n^{(1)}} B_m^1$ komplementären Gebiete G_h^1, $1 \leqq h \leqq k(B^1)$. Jedes dieser zusammenhängen-

[20]) Die erwähnten Vorsichtsmaßnahmen werden getroffen, um Doppelpunkte (= Selbstberührungen) auf den Begrenzungspolygonen der Bereiche B_m^1 zu vermeiden und dadurch die Geltung der Bedingung $4^{(i)}$ $(i = 1)$ zu sichern.

den Gebiete ist in einer Komponente der Menge $E - C$ enthalten. Falls aber *zwei* Gebiete $G^1_{h_1}$ und $G^1_{h_2}$ in einer Komponente der Menge $E - C$ enthalten wären, so würde es einen diese Gebiete innerhalb B^1 verbindenden, C nicht treffenden Weg geben und der entsprechende Schnitt würde den Zusammenhangsgrad von B^1 erniedrigen. Da letzteres zufolge unserer Voraussetzung über B^1 unmöglich ist, so können keine zwei Komponenten von $E - B^1$ zu einer Komponente von $E - C$ gehören, und also ist

$$k(B^1) \leqq k(C). \tag{34}$$

Es bleibt uns noch ein Schritt übrig: Wir wollen nämlich die Bereiche B^1_m durch einfach zusammenhängende, allen Bedingungen $1^{(i)}$ bis $5^{(i)}$ genügende Bereiche ersetzen. Das geschieht aber sehr leicht durch wiederholte Anwendung folgenden Verfahrens:

Man ersetzt einen mehrfach zusammenhängenden Bereich B^1_m durch den kleinsten B^1_m enthaltenden, einfach zusammenhängenden Bereich B_m und streicht einfach in (33) alle in B_m enthaltenen Bereiche B^1_h.

Nach endlich vielen Schritten erhalten wir so ein System $\mathfrak{B}$ *einfach zusammenhängender* Bereiche

$$B_1, B_2, \ldots, B_n, \tag{$\mathfrak{B}$}$$

welche allen Bedingungen 1 bis 5, die durch Streichen des Indexes i aus den Bedingungen $1^{(i)}$ bis $5^{(i)}$ entstehen, Genüge leisten.

Indem wir $B = \sum_{m=1}^{n} B_m$ setzen, bemerken wir einerseits, daß

$$k(B) \leqq k(B^1),$$

und also a fortiori

$$k(B) \leqq k(C)$$

ist. Andrerseits genügt aber das System $\mathfrak{B}$ allen Bedingungen unseres Hilfssatzes, so daß $k(B) \geqq \varkappa(L_{\mathfrak{B}})$ ist.

Indem wir jetzt $\Phi_m = C \cdot B_m$ setzen und das System $\mathfrak{P}$ aller Φ_m betrachten, erhalten wir eine 3ε-Überdeckung der Kurve C. Also ist $\varkappa(L_{\mathfrak{P}}) \geqq k$, und da $L_{\mathfrak{P}} \subset L_{\mathfrak{B}}$ ist, so ist

$$k \leqq \varkappa(L_{\mathfrak{P}}) \leqq \varkappa(L_{\mathfrak{B}}) \leqq k(B) \leqq k(C),$$

w. z. b. w.

IV. Geschlossene Kurven.

35. Aus dem soeben Bewiesenen folgt unmittelbar folgender

Satz. *Damit eine ebene Kurve C die gemeinsame Grenze aller durch sie in der Ebene bestimmten Gebiete sei, ist notwendig und hinreichend, daß jedes echte Teilkontinuum von C einfach zusammenhängend, die Kurve C selbst aber mehrfach zusammenhängend sei.*

Folgende Definition erscheint also als berechtigt:

Eine mehrfach zusammenhängende Kurve heißt geschlossen, falls ihre sämtlichen echten Teilkontinua einfach zusammenhängend sind.

Insbesondere heißt eine geschlossene Kurve *regelmäßig* oder *unregelmäßig geschlossen*, je nachdem ihre Zusammenhangszahl gleich oder größer als 2 ist.

Nach dem bis jetzt Bewiesenen *sind die ebenen*, in unserem Sinne *regelmäßig geschlossenen Kurven mit den im Schoenfliesschen Sinne geschlossenen Kurven identisch.*

Dagegen sind die unregelmäßig geschlossenen ebenen Kurven nichts anderes als gemeinsame Grenzen von mindestens 3 ebenen Gebieten.

36. Eine regelmäßig — ebensogut wie unregelmäßig — geschlossene Kurve C kann bekanntlich unzerlegbar[21]) (d. h. als Vereinigungsmenge keiner zweier ihrer echten Teilkontinua darstellbar), also u. a. irreduzibel sein. Falls aber die geschlossene Kurve C kein unzerlegbares Kontinuum ist, so ist $C = C_1 + C_2$, wobei C_1 und C_2 notwendig einfach zusammenhängend sind und also (zufolge des Satzes des § 19) eine genau aus $\varkappa(C)$ Komponenten bestehende Durchschnittsmenge $C_1 \cdot C_2 = K_1 + K_2 + \ldots + K_{\varkappa(C)}$ haben. Indem wir z. B. die Punkte $a \subset K_1$ und $b \subset K_2$ wählen und sie innerhalb C_1 bzw. C_2 durch irreduzible Kontinuen C_1^* bzw. C_2^* verbinden, erhalten wir eine *wenigstens zweifach zusammenhängende* Kurve $C_1^* + C_2^*$, die also mit C identisch ist; $C_1^* \cdot C_2^*$ besteht wieder aus $\varkappa(C)$ Komponenten.

Wir können also für *allgemeine* geschlossene Kurven einen bekannten Satz über die ebenen geschlossenen Kurven folgendermaßen aussprechen:

Jede geschlossene Kurve C ist entweder unzerlegbar, oder sie läßt sich in zwei zwischen demselben Punktepaare a, b irreduzible, einfach zusammenhängende Kurven C_1, C_2 derart zerlegen, daß $C_1 \cdot C_2$ genau aus $\varkappa(C)$ Komponenten besteht.

37. Falls eine geschlossene Kurve unzerlegbar ist, so ist sie natürlich ein (sogar gleichzeitig zwischen unendlich vielen ihrer Punktepaare) irreduzibles Kontinuum. Eine geschlossene Kurve kann aber ein zwischen gewissen Punktepaaren irreduzibles Kontinuum sein, ohne dabei notwendig ein unzerlegbares Kontinuum zu bilden.

---

[21]) Beispiele von unzerlegbaren Kontinuen waren zuerst von Brouwer („Zur Analysis Situs", Math. Ann. **68**) gegeben. Ihre Theorie war später von Janiszewski und Kuratowski in ihrer Arbeit „Sur les continus indécomposables", Fund. Math. **1**, entwickelt worden. Letztere Arbeit wird in diesem Abschnitt als bekannt vorausgesetzt.

Um das einfachste Beispiel einer solchen Kurve zu haben, braucht man nur

$$C = C^* + C_*$$

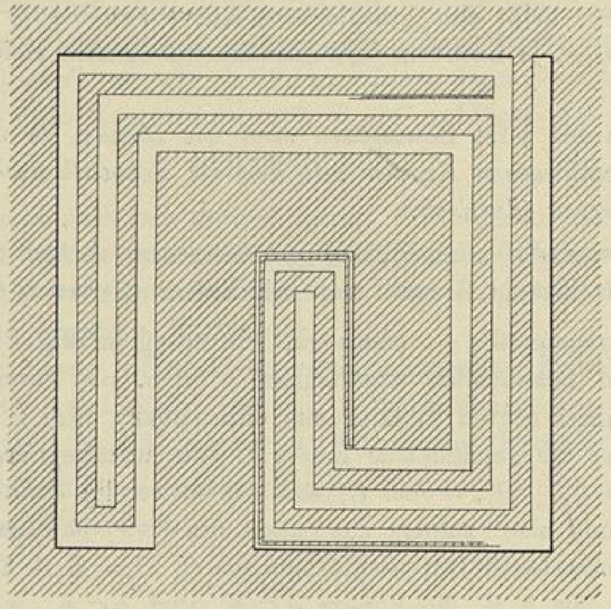

Fig. 1.

zu setzen, wo C^* das in der xoy-Ebene gelegene, durch eine Modifikation des bekannten Brouwerschen Kontinuums entstandene, auf der Fig. 1 dargestellte unzerlegbare Kontinuum ist und C_* sein Spiegelbild in bezug auf die x-Achse. Offenbar ist $C^* \cdot C_*$ in einer einzigen Menge $\mathfrak{P}_{c^*, C^*}$ bzw. $\mathfrak{P}_{c_*, C_*}$ enthalten[22]).

[22]) Es dürfte vielleicht von Interesse sein, an dieser Stelle zu bemerken, daß, falls $C = F_1 + F_2$ *eine Zerlegung irgendeines unzerlegbaren Kontinuums* C *in zwei echte abgeschlossene Teilmengen ist,* $F_1 \cdot F_2$ *notwendig aus unabzählbar vielen Komponenten besteht.* Es sei in der Tat $\mathfrak{P}_{a, C}$ die Menge aller derartigen Punkte x von C, daß C zwischen a und x reduzibel ist. Bekanntlich ist in unserem Falle jede $\mathfrak{P}_{a, C}$-Menge ein in C dichtes Semikontinuum, das in bezug auf C eine Menge von der ersten Kategorie (im Baireschen Sinne) darstellt. C wird in dieser Weise in unabzählbar viele zusammenhängende, zueinander fremde Teilmengen zerlegt, die die Eigenschaft haben, daß jedes echte Teilkontinuum von C in einer dieser Teilmengen enthalten ist. Da kein $\mathfrak{P}_{a, C}$ (als in C dichte Menge) in einer der Mengen F_1, F_2 enthalten sein kann, und da $\mathfrak{P}_{a, C}$ zusammenhängend ist, so enthält jedes $\mathfrak{P}_{a, C}$ Punkte von $F_1 \cdot F_2$. Da andrerseits keine Komponente der Menge $F_1 \cdot F_2$ mit mehr als einem $\mathfrak{P}_{a, C}$ gemeinsame Punkte haben kann, so ist die Mächtigkeit der Menge aller Komponenten von $F_1 \cdot F_2$ mindestens gleich der Mächtigkeit der Menge aller $\mathfrak{P}_{a, C}$, d. h. sie ist unabzählbar und folglich (da es sich um Komponenten abgeschlossener Mengen handelt) von der Mächtigkeit des Kontinuums.

Falls a^* und b^* zwei in untereinander und von $\mathfrak{P}_{c^*, C^*}$ verschiedenen $\mathfrak{P}_{a^*, C^*}$ und $\mathfrak{P}_{b^*, C^*}$ enthaltene Punkte sind und b_* das Spiegelbild von b^* ist, so ist C zwischen a^* und b_* irreduzibel.

C ist eine regelmäßig geschlossene Kurve. Man könnte aber leicht auch eine unregelmäßig geschlossene Kurve von derselben Art konstruieren.

38. Die soeben betrachtete Kurve C ist zwar zerlegbar, wohl aber als Vereinigungsmenge zweier unzerlegbarer Kontinuen definiert worden. Wir wollen zeigen, daß dies kein Zufall ist. Es besteht in der Tat folgender

Satz. *Jede* (regelmäßig oder unregelmäßig) *geschlossene Kurve C, für die es wenigstens ein Paar von Punkten a, b gibt, zwischen denen sie irreduzibel ist, ist entweder unzerlegbar oder Vereinigungsmenge zweier unzerlegbarer Kurven.*

Beweis. Da C kein unzerlegbares Kontinuum ist, so gibt es zwei echte Teilkontinua C_1, C_2 von C, deren Vereinigungsmenge die ganze Kurve C ist. Da die beiden Punkte a und b gleichzeitig weder zu C_1 noch zu C_2 gehören können, so ist z. B. $a \subset C_1 - C_2$ und $b \subset C_2 - C_1$. Wir werden zeigen, daß man außerdem voraussetzen darf, daß $C_1 - C_2$ bzw. $C_2 - C_1$ in C_1 bzw. in C_2 dicht sind, d. h. daß $C_1 = \overline{C_1 - C_2}$ bzw. $C_2 = \overline{C_2 - C_1}$ ist.

In der Tat, falls dies nicht der Fall wäre, so würden wir setzen:

$$C_2^* = \overline{Comp_b}(C_2 - C_1), \tag{35}$$

$$C_1^* = \overline{Comp_a}(C_1 - C_2^*), \tag{36}$$

wobei wie üblich $Comp_x M$ die Komponente des Punktes x in bezug auf die Menge M bedeutet.

Bekanntlich[23]) folgt aus (35) (da $C_1 \cdot C_2$ sicher nicht leer ist), daß $C_2^* \cdot C_1$, und also zufolge (36) auch $C_1^* \cdot C_2^*$ nicht leer ist. Daraus ergibt sich aber, daß $C_1^* + C_2^*$ ein beide Punkte a und b enthaltendes, folglich mit C identisches Kontinuum ist.

Weiter ist (da z. B. $Comp_b(C_2 - C_1) \subset C_2^*$ und also mit $C_2^* \cdot Comp_b(C_2 - C_1)$ identisch ist):

$$\begin{aligned} C_2^* &= \overline{Comp_b(C_2 - C_1)} \subset \overline{C_2^* \cdot Comp_b(C_2 - C_1)} \subset \overline{C_2^* \cdot (C_2 - C_1)} \\ &= \overline{C_2^* - C_1} \subset \overline{C_2^* - C_1^*}, \\ C_1^* &= \overline{Comp_a(C_1 - C_2^*)} = \overline{C_1^* \cdot Comp_a(C_1 - C_2^*)} \subset \overline{C_1^* \cdot (C_1 - C_2^*)} \\ &= \overline{C_1^* - C_2^*}. \end{aligned}$$

[23]) Auf Grund eines (von Janiszewski in Journ. Ec. Polytechnique, (2) **16** (1912) bewiesenen) allgemeinen Satzes, der besagt, daß, wenn F und Φ abgeschlossen sind, und sowohl $F \cdot \Phi$ als $F - \Phi$ nicht leer sind, jede Komponente von $F - \Phi$ zu Φ gehörende Häufungspunkte hat.

Die beiden Kontinuen C_1^* und C_2^* genügen allen unseren Voraussetzungen und können C_1 und C_2 ersetzen.

39. Wir setzen also voraus, daß $C = C_1 + C_2$ und

$$(37) \qquad a \subset C_1 - C_2 \subset C_1 \subset \overline{C_1 - C_2}; \qquad b \subset C_2 - C_1 \subset C_2 \subset \overline{C_2 - C_1}$$

ist, und beweisen jetzt, daß C_1 und C_2 unzerlegbar sind.

Zufolge dem Additionssatze besteht $C_1 \cdot C_2$ mindestens aus zwei Komponenten. Es seien also c und d zwei zu verschiedenen Komponenten der Menge $C_1 \cdot C_2$ gehörende Punkte.

1°. *C_1 ist irreduzibel zwischen c und d.* In der Tat, falls ein echtes, beide Punkte c und d enthaltendes Teilkontinuum K_1 von C_1 vorhanden wäre, so wäre $C_1 - K_1$ ein Relativgebiet von C_1 und, da $C_1 - C_2$ in C_1 dicht ist, so würde man einen Punkt

$$p \subset C_1 - (K_1 + C_2)$$

finden können. Das Kontinuum $K_1 + C_2$ ist also sicher von C verschieden, was unmöglich ist, weil (da c und d zu $K_1 \cdot C_2$ und zu verschiedenen Komponenten von $C_1 \cdot C_2$ also a fortiori zu verschiedenen Komponenten von $K_1 \cdot C_2$ gehören, und folglich $K_1 \cdot C_2$ nicht zusammenhängend ist) $K_1 + C_2$ zufolge dem Additionssatze kein einfach zusammenhängendes Kontinuum ist.

2° *C_1 ist zwischen a und d irreduzibel.* Falls in der Tat Q_1 ein den Bedingungen

$$a + d \subset Q_1 \subset C_1 - p, \qquad p \subset C_1 - C_2$$

genügendes Kontinuum wäre, so würde $Q_1 + C_2$ von C verschieden sein, was unmöglich ist, da

$$a + b \subset Q_1 + C_2 \subset C,$$

und $d \subset Q_1 \cdot C_2$, also $Q_1 + C_2$ ein der Irreduzibilität von C zwischen a und b widersprechendes Kontinuum ist.

3° *C_1 ist zwischen a und c irreduzibel.* Der Beweis ist demjenigen von der Behauptung 2° ganz analog.

Da C_1 zwischen jeden zwei unter den Punkten a, c, d irreduzibel ist, so ist C_1 ein unzerlegbares Kontinuum[24]).

In derselben Weise würde man auch die Unzerlegbarkeit von C_2 zeigen können, womit unser Satz bewiesen wird.

40. Der soeben bewiesene Satz läßt sich — wenigstens teilweise — umkehren: wir wollen nämlich folgendes beweisen:

---

[24]) Letztere Behauptung ist bei Janiszewski und Kuratowski, loc. cit. bewiesen.

Jede endlich hoch zusammenhängende (also insbesondere jede regelmäßig) *geschlossene Kurve, die die Vereinigungsmenge zweier unzerlegbarer Kontinuen ist, ist* (und zwar zwischen unabzählbar vielen ihrer Punktepaare) *irreduzibel.*

Es sei

$$C = C_1 + C_2$$

eine geschlossene Kurve mit endlicher Zusammenhangszahl $k = \varkappa(C)$, die als Vereinigungsmenge zweier unzerlegbarer Kontinuen C_1 und C_2 dargestellt ist. Da C_1 und C_2 einfach zusammenhängend sind, so besteht $C_1 \cdot C_2$ aus k Komponenten und ist also in höchstens k verschiedenen $\mathfrak{P}_{a,C_1}$- bzw. $\mathfrak{P}_{a,C_2}$-Mengen enthalten. Diese endlich vielen Mengen wollen wir für einen Augenblick ausgezeichnete Mengen nennen.

Es sei nun $\mathfrak{P}_{p,C_1}$ bzw. $\mathfrak{P}_{q,C_2}$ eine nicht ausgezeichnete Menge (deren es unabzählbar viele gibt) und p bzw. q ein Punkt von $\mathfrak{P}_{p,C_1}$ bzw. $\mathfrak{P}_{q,C_2}$. Es sei weiter K irgendein zwischen p und q irreduzibles Teilkontinuum von C. Wir wollen zeigen, daß K notwendig jedes der Kontinuen C_1 und C_2 enthält und folglich mit C identisch ist. Es genügt zu zeigen, daß $K \supset C_1$ ist (weil die Inklusion $K \supset C_2$ in genau derselben Weise verifizierbar ist).

Wir bemerken zuerst, daß p im Relativgebiete $K - C_2$ enthalten ist. Es existiert also[25]) ein Teilkontinuum P von K, das der Bedingung

$$p \subset P \subset \overline{K - C_2} \subset C_1,$$

$$P \cdot C_2 \neq 0$$

genügt. Es sei p' irgendein Punkt von $P \cdot C_2 \subset C_1 \cdot C_2$. Da p' notwendig zu einer ausgezeichneten (also von $\mathfrak{P}_{p,C_1}$ sicher verschiedenen) Menge gehört, so ist C_1 irreduzibel zwischen p und p' und, da $p + p' \subset P \subset C_1$ ist, so ist $P = C_1$ und folglich $C_1 \subset K$, w. z. b. w.

Die Frage, ob es eine unendlich hoch zusammenhängende geschlossene Kurve gibt, die zwischen keinem Punktpaare irreduzibel ist, bleibt offen (obwohl wir gleich sehen werden, daß jede derartige Kurve entweder unzerlegbar ist oder durch Vereinigung zweier unzerlegbarer Kontinuen entsteht).

Dagegen ist es leicht (nicht geschlossene) Kurven zu konstruieren, die Vereinigungsmengen zweier unzerlegbarer Kontinuen sind und die zwischen keinen zwei ihrer Punkte irreduzibel sind: um dies zu erreichen genügt es, wie leicht ersichtlich, zwei derartige unzerlegbare Kontinua C_1 und C_2 zu konstruieren, daß jedes $\mathfrak{P}_{a,C_1}$ mit jedem $\mathfrak{P}_{b,C_2}$ gemeinsame Punkte hat. Es sei nun C_1 das im Einheitsquadrate [1] der xoy-Ebene

[25]) Siehe Fußnote [23]).

konstruierte Brouwersche Kontinuum der Fig. 2 und C_2 das (dem Kontinuum C_1 kongruente) Kontinuum, das aus C_1 durch eine Drehung von der Amplitude $\frac{\pi}{2}$ entsteht um den Mittelpunkt des Quadrates [1]. $C = C_1 + C_2$ ist zwischen je zwei seiner Punkte reduzibel.

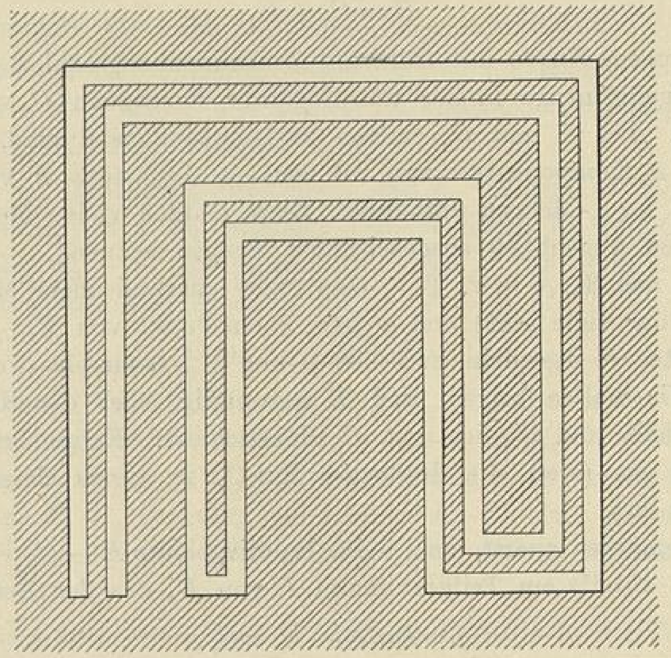

Fig. 2.

41. Wir erwähnen noch folgenden wichtigen

Satz. *Jede unregelmäßig geschlossene Kurve ist entweder unzerlegbar oder die Vereinigungsmenge zweier unzerlegbarer Kontinua.*

Der Beweis ergibt sich durch wörtliche Wiederholung des Gedankenganges, mit Hilfe dessen Herr Kuratowski auf dem Janiszewskischen Zerlegungssatz fußend einen analogen Satz für ebene unregelmäßig geschlossene Kurven (die bei ihm als gemeinsame Grenzen von mindestens 3 Gebieten erscheinen) beweist[26]). Nur ist im vorliegenden allgemeinen Falle der Janiszewskische Zerlegungssatz durch unsern Additionssatz zu ersetzen.

Korollar. *Jede endlich hoch zusammenhängende, unregelmäßig geschlossene Kurve ist (zwischen unabzählbar vielen ihrer Punktepaare) irreduzibel.*

[26]) Kuratowski, Sur les coupures irréductibles du plan. Fund. Math. 6 (1924), S. 136 bis 139.

V. Stetige Kurven.

42. Unter einer *stetigen Kurve* verstehen wir (unter Aufgabe des Schoenflies-Hahnschen gleichlautenden Begriffes, der sich nach den neuesten Entwicklungen der Kurventheorie, durch welche der Kurvenbegriff endgültig festgelegt sein dürfte, nicht länger aufrecht erhalten läßt) eine allgemeine Kurve, die im Kleinen zusammenhängend ist. Diesen stetigen Kurven soll der vorliegende letzte Abschnitt gewidmet sein. Insbesondere erlauben die stetigen Kurven endlicher Zusammenhangszahl eine, wie es scheint, erschöpfende Charakterisierung ihrer topologischen Struktur.

Die einfachsten unter allen stetigen Kurven sind natürlich der einfache Bogen (d. h. das topologische Bild einer geradlinigen Strecke) und die einfache geschlossene (Jordansche) Linie, die wir kurz *Kreis* nennen werden, weil sie topologisch mit der Kreislinie identisch ist.

43. Die stetigen Kurven erlauben, die abstrakten Definitionen der §§ 13, 14 auf einen geometrischen Boden zu übertragen. So sagen wir, daß ein System von Kreisen ein *Nullsystem* ist, falls jeder Punkt, der einem Kreise des Systems gehört, wenigstens noch in einem Kreise desselben Systems enthalten ist. Ebenso nennen wir ein System von Kreisen *irreduzibel*, wenn unter seinen sämtlichen Teilsystemen kein Nullsystem vorkommt.

44. Der Beweis des Satzes, daß jede als ein Bogenkomplex darstellbare stetige Kurve eine Zusammenhangszahl $\geqq k$ hat, sobald sie ein irreduzibles aus $k-1$ Kreisen bestehendes System enthält, läßt sich leicht (z. B. mittels eines elementaren Induktionsverfahrens) darstellen. Daraus folgt aber, daß *jede stetige Kurve, die ein irreduzibles* $(k-1)$-*Kreissystem*[27]) *enthält, mindestens k-fach zusammenhängend ist.* Man könnte die Umkehrung dieses Satzes direkt beweisen, wir werden sie aber bald als Teil eines genauer gefaßten Satzes erhalten.

45. Bevor wir zur Formulierung dieses Satzes schreiten, führen wir folgende Definition ein. Wir sagen, daß eine (im allgemeinen nicht abgeschlossene) zusammenhängende Menge M ein *offener* k-fach zusammenhängender Bogenkomplex ist, falls M die Darstellung

$$M = C_0 + \sum_{k, i_1, i_2, \ldots, i_k} S_{i_1 i_2 \ldots i_k}$$

zuläßt, wobei folgendes erfüllt ist:

1° C_0 ist eine k-fach zusammenhängende, als ein Bogenkomplex darstellbare Kurve.

[27]) Wir werden im folgenden stets statt „ein irreduzibles, aus k Kreisen bestehendes System" einfach „ein irreduzibles k-Kreissystem", oder sogar ein „k-Kreissystem" sagen.

2° $k, i_1, i_2, \ldots, i_k$ nehmen unabhängig voneinander alle positiven ganzzahligen Werte an.

3° $S_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ ist entweder die leere Menge oder ein einfacher Bogen $\overline{a_{i_1 i_2 \ldots i_k} b_{i_1 i_2 \ldots i_k}}$ (einen einfachen Bogen mit den Endpunkten a und b werden wir oft durch $\overline{ab}$ bezeichnen).

4° $S_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ ist für $k > 1$ zu C_0 fremd; falls aber $k = 1$ ist, so besteht $C_0 \cdot S_{i_1}$ aus dem einzigen Punkte a_{i_1}.

5° Zwei Bögen $S_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ und $S_{j_1 j_2 \ldots j_h}$ $(k > h)$ sind zueinander fremd, es sei denn, daß $k = h + 1$ und $j_1 = i_1$, $j_2 = i_2, \ldots, j_h = i_{k-1}$ ist, in welchem Falle

$$S_{i_1 i_2 \ldots i_k} \cdot S_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} = a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$$

ist.

6° Zwei Punkte $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ und $b_{j_1 j_2 \ldots j_h}$ sind immer verschieden, ebenso wie zwei Punkte $b_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ und $b_{j_1 j_2 \ldots j_h}$. Dagegen können zwei Punkte $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ und $a_{j_1 j_2 \ldots j_h}$ zusammenfallen, aber nur im Falle, wenn $k = h$ und $i_1 = j_1, \ldots, i_{k-1} = j_{k-1}$ ist.

7° Zwei Bögen $S_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ und $S_{j_1 j_2 \ldots j_h}$ sind zueinander fremd, es sei denn, daß $i_1 = j_1$, $i_2 = j_2, \ldots, i_{k-1} = j_{k-1}$ und $a_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k} = a_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} j_k}$, in welchem Falle

$$S_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k} \cdot S_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} j_k} = a_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k}$$

ist.

8° Jede unendliche Punktfolge von der Art $a_{i_1}, a_{i_1 i_2}, \ldots, a_{i_1 i_2 \ldots i_k}, \ldots$ ist (in M) divergent.

9° $\delta(S_{i_1 i_2 \ldots i_k})$ strebt gegen Null, d. h. daß für jedes $\varepsilon > 0$ es höchstens endlich viele, der Ungleichung $\delta(S_{i_1 i_2 \ldots i_k}) \geqq \varepsilon$ genügende Bögen gibt.

46. Aus dieser Definition folgt, daß jeder in M enthaltene Kreis notwendigerweise in C_0 enthalten ist; letztere Behauptung liefert den auf der Hand liegenden Beweis, daß die Zusammenhangszahl $k = \varkappa(M)$ alle Interpretationen der für gewöhnliche Komplexe L definierten Zahl $\varkappa(L)$ zuläßt.

47. Wir formulieren nun folgenden

Satz. *Jede endlich hoch und zwar k-fach zusammenhängende stetige Kurve C ist die Vereinigungsmenge eines (offenen) k-fach zusammenhängenden Bogenkomplexes M und einer zu M fremden, höchstens 0-dimensionalen, aus lauter Endpunkten*[28]) *von C bestehenden G_δ-Menge J. Dabei konvergieren zwei verschiedene Folgen vom Typus 8^0 zu verschiedenen Punkten von C.*

[28]) d. h. Punkten von Verzweigungsordnung 1 (vgl. die zu Anfang dieses Aufsatzes zitierten Arbeiten von Urysohn und Menger).

Zufolge dem Ergebnisse des § 44 wird unser Satz bewiesen sein, sobald wir gezeigt haben werden, daß jede stetige Kurve C, die ein $(k-1)$-aber kein k-Kreissystem enthält ($k \geqq 1$), die soeben behauptete Zerlegung $C = M + J$ zuläßt und höchstens k-fach zusammenhängend ist[29]).

48. Um diese Behauptung zu beweisen, fangen wir mit folgendem Hilfssatz an:

Es sei C eine stetige Kurve, die ein $(k-1)$-Kreissystem

$$(1) \qquad Q_1, Q_2, \ldots, Q_{k-1},$$

aber kein k-Kreissystem enthält. Wir bezeichnen durch ε eine beliebige positive Zahl. *Dann ist jede Menge zueinander fremder Teilbögen von C, deren Durchmesser sämtlich $\geqq \varepsilon$ sind, notwendigerweise endlich.*

Es sei in der Tat

$$(2) \qquad S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$$

eine unendliche Folge von Teilbögen der Kurve C, die sämtlich vom Durchmesser $\geqq \varepsilon$ sind. Offenbar kann man voraussetzen[30]), daß für jedes n $\delta(S_n \cdot Q) < \frac{\varepsilon}{4}$ ist, wobei Q die Vereinigungsmenge aller Kreise (1) bedeutet.

Es seien nun a_n und b_n zwei Punkte von S_n, deren Entfernung $> \frac{\varepsilon}{2}$ ist.

Indem man, wenn nötig, die Folge (2) durch eine Teilfolge ersetzt, kann man voraussetzen, daß die beiden Folgen aller a_n ($n = 1, 2, \ldots$ in inf.) und aller b_n konvergent sind.

Wir bezeichnen durch δ eine so kleine positive Zahl, daß jede zwei Punkte a und b der Kurve C, deren Entfernung kleiner als δ ist, innerhalb C durch einen einfachen Bogen von einem Durchmesser $< \frac{\varepsilon}{8}$ verbindbar sind. Es sei nun n so groß, daß gleichzeitig

$$\varrho(a_n, a_{n+1}) < \delta, \qquad \varrho(b_n, b_{n+1}) < \delta$$

sind; es seien weiter $\overline{a_n a_{n+1}}$ bzw. $\overline{b_n b_{n+1}}$ die die Punkte a_n und a_{n+1} bzw. b_n und b_{n+1} verbindenden Bögen vom Durchmesser $< \frac{\varepsilon}{8}$. Zufolge der Wahl der Punkte a_n und b_n sind $\overline{a_n a_{n+1}}$ und $\overline{b_n b_{n+1}}$ zueinander fremd. Es seien nun a_n^* bzw. b_n^* der letzte bzw. der erste in $\overline{a_n a_{n+1}}$ bzw. $\overline{b_n b_{n+1}}$

[29]) Auch die Umkehrung des soeben formulierten Satzes ist richtig, d. h. daß *jede die Zerlegung $C = M + J$ zulassende Kurve eine k-fach zusammenhängende stetige Kurve ist, sobald keine zwei verschiedene Folgen vom Typus 8⁰ zum selben Punkt konvergieren.*

[30]) Indem man, wenn nötig, endlich viele Glieder der Folge (2) streicht.

enthaltene Punkt, dem man auf dem Wege $\overline{a_n b_n} \subset S_n$ in der Richtung von a_n nach b_n begegnet. Der Teilbogen $\overline{a_n^* b_n^*}$ von S_n ist, bis auf seine Endpunkte, zu der Menge $\overline{a_n a_{n+1}} + \overline{b_n b_{n+1}}$ fremd und hat einen Durchmesser $\geqq p(a_n^*, b_n^*) > \frac{\varepsilon}{2} - 2 \cdot \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4}$.

Auf dieselbe Weise definieren wir die Punkte a_{n+1}^* und b_{n+1}^*. Wenn man unter $\overline{a_n^* b_n^*}$ bzw. $\overline{a_{n+1}^* b_{n+1}^*}$ den entsprechenden Teilbogen von $\overline{a_n b_n}$ bzw. $\overline{a_{n+1} b_{n+1}}$ versteht, sieht man leicht ein, daß $\overline{a_{n+1}^* a_n^*} + \overline{a_n^* b_n^*} + \overline{b_n^* b_{n+1}^*} + \overline{b_{n+1}^* a_{n+1}^*}$ ein Kreis K, dessen Durchschnitt $K \cdot S_m$ mit S_m von einem Durchmesser $> \frac{\varepsilon}{4}$ ist. Unserer Voraussetzung gemäß kann also K unmöglich in Q enthalten sein, woraus folgt, daß

$$K, Q_1, Q_2, \ldots, Q_{k-1}$$

ein irreduzibles k-Kreissystem ist. Dies bedeutet aber einen Widerspruch mit den Eigenschaften der Kurve C, w. z. b. w.

49. Um unsern Beweis bequem weiter entwickeln zu können, führen wir folgende Modifikation eines bekannten Brouwerschen Begriffes ein: Wir sagen, daß eine Eigenschaft, die gewissen abgeschlossenen Mengen (eines kompakten metrischen Raumes) zukommen kann, *induktiv nach oben* ist, falls aus ihrer Geltung für sämtliche abgeschlossene Mengen einer wachsenden Folge

$$F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots \tag{3}$$

die Existenz einer gleichzeitig alle Mengen der Folge (3) enthaltenden abgeschlossenen Menge F_ω folgt, für die die erwähnte Eigenschaft ebenfalls gilt.

Man beweist nun leicht, daß jede eine nach oben induktive Eigenschaft besitzende Menge in einer größten, dieselbe Eigenschaft besitzenden Menge enthalten ist.

50. Wir bezeichnen jetzt durch C^* irgendein das gegebene $(k-1)$-Kreissystem der den Bedingungen der Behauptung 1 (§ 47) genügenden stetigen Kurve C enthaltendes, in der genannten Kurve C enthaltenes Kontinuum. Wir sagen, daß der einfache Bogen $S = \overline{a\,b} \subset C$ *ein* (C^*, C)-*Bogen* ist, falls $C^* \cdot S = a$ ist; a soll dann der *Mündungspunkt* des Bogens S heißen. Aus der Tatsache, daß jeder zu C gehörende Kreis bereits in C^* enthalten ist und aus dem Hilfssatze des § 48 folgt dann leicht, daß die Eigenschaft eines einfachen Bogens ein (C^*, C)-Bogen zu sein eine nach oben induktive Eigenschaft ist; also ist jeder (C^*, C)-Bogen in wenigstens einem Maximalbogen derselben Natur — wir sagen kurz: *in einem* (C^*, C)-*Aste* — enthalten. Der Mündungspunkt dieses Astes ist derselbe Punkt a, der als Mündungspunkt des ursprünglichen (C^*, C)-Bogens S galt.

Jeder Punkt von C^*, der als Mündungspunkt wenigstens eines (C^*, C)-Bogens vorkommt, soll ein *erreichbarer* Punkt von C^* heißen. Wir beweisen jetzt, daß die Menge aller erreichbaren Punkte von C^* *höchstens abzählbar* ist. In der Tat, wir bemerken zuerst, daß, falls a und a_1 zwei verschiedene erreichbare Punkte von C^* sind und S bzw. S_1 zwei in diesen Punkten mündende, sonst ganz beliebige (C^*, C)-Bögen sind, S und S_1 unmöglich gemeinsame Punkte haben können (weil dies die Existenz eines in C^* nicht enthaltenen Kreises zur Folge haben würde). Falls also unabzählbar viele erreichbare Punkte vorhanden wären, würde man unabzählbar viele paarweise zueinander fremde Teilbögen von C haben, was in einem evidenten Widerspruch mit unserm Hilfssatze steht.

51. Falls andererseits $S = \overline{a\,b}$ und $S_1 = \overline{a\,b_1}$ zwei in demselben Punkte $a \subset C^*$ mündende (C^*, C)-Bögen sind, so folgt aus den schon mehrere Male erwähnten Gründen, daß $S \cdot S_1$ entweder aus dem einzigen Punkte a oder aus einem Bogen $\overline{a\,d}$ besteht. Letztere Bemerkung gibt Anlaß zur folgenden Konstruktion. Wir betrachten die Menge $\mathfrak{M}_1$ aller im Punkte a mündenden Äste und wählen einen bestimmten, es sei $\overline{a\,b_1}$, unter denjenigen Ästen des Systems $\mathfrak{M}_1$, für die $\mu(\overline{a\,b})$ seinen größtmöglichen Wert annimmt; dabei bedeutet $\mu(\overline{a\,b})$ den Maximalwert $\varrho(a, c)$ von $\varrho(a, x)$, $x \subset \overline{a\,b}$ [31]).

Vorausgesetzt,

$$(4) \qquad \overline{a\,b_1}, \overline{a\,b_2}, \ldots, \overline{a\,b_m}$$

wären schon konstruiert. Wir betrachten dann die Menge $\mathfrak{M}_{m+1}$ aller mit keinem der Äste (4) einen gemeinsamen Bogen besitzender, in a mündender Äste und wählen einen bestimmten, es sei $\overline{a\,b_{m+1}}$, unter denjenigen Ästen des Systems $\mathfrak{M}_{m+1}$, für die $\mu(\overline{a\,b})$ den größtmöglichen Wert annimmt [31]).

Auf diese Weise werden die endlich oder abzählbar vielen Äste

$$(5) \qquad \overline{a\,b_1}, \overline{a\,b_2}, \ldots, \overline{a\,b_m}, \ldots$$

konstruiert, wobei $\mu(\overline{a\,b_m}) \geqq \mu(\overline{a\,b_{m+1}})$ ist und die Folge $\delta(\overline{a\,b_m})$ konvergiert (falls (5) unendlich viele Elemente enthält), auf Grund des Hilfssatzes, notwendig gegen Null. Das gleiche gilt dann a fortiori für $\mu(\overline{a\,b_m})$.

Es sei jetzt $\overline{a\,x}$ ein beliebiger, in a mündender Ast und m die erste natürliche Zahl, für die entweder kein $\overline{a\,b_m}$ mehr existiert (im Falle, wenn

---

[31]) Ein solcher Ast ist immer vorhanden. Es sei in der Tat α die obere Grenze aller in Frage kommender $\mu(\overline{a\,b})$, und es seien ferner $\overline{a_n\,b_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ so gewählt, daß $\lim \mu(\overline{a_n\,b_n}) = \lim \varrho(a_n, c_n) = \alpha$ ist, und gleichzeitig $c = \lim c_n$ existiert. Es genügt dann (für ein hinreichend großes n), c mit c_n durch einen kleinen Bogen $\overline{c_n\,c}$ zu verbinden, einen (C^*, C)-Bogen $\overline{a\,c} \subset \overline{a\,c_n} + \overline{c_n\,c}$ zu wählen und einen letzteren Bogen enthaltenden Ast zu betrachten.

(3) endlich ist) oder $\mu(\overline{a\,b_m}) < \mu(\overline{a\,x})$ ist. Falls es kein $h < m$ gäbe von der Beschaffenheit, daß $\overline{a\,b_h}$ mit $\overline{a\,x}$ einen Bogen gemeinsam hat (also insbesondere, falls $m = 1$ wäre), so wäre $\overline{a\,b_m}$ (bzw. die leere Menge statt eines $\overline{a\,b_m}$) falsch gewählt. Also gibt es ein $\overline{a\,b_h}$, das der soeben erwähnten Bedingung genügt, und, da $h \leqq m-1$ ist, so ist $\mu(\overline{a\,b_h}) \geqq \mu(\overline{a\,x})$.

Indem wir diese Konstruktion für jeden erreichbaren Punkt $a \subset C^*$ ausführen, erhalten wir ein höchstens abzählbares System von (C^*, C)-Ästen

(6) $$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots, \quad S_n = \overline{a_n\,b_n},$$

die folgendermaßen beschaffen sind:

1°. Zwei Äste des Systems (6) haben entweder keinen oder nur einen gemeinsamen Punkt, der dann ihr gemeinsamer Mündungspunkt ist.

2°. Jeder (C^*, C)-Ast $\overline{a\,x}$ hat mit einem Aste $S_m = \overline{a_m\,b_m}$ des Systems (6) einen gemeinsamen Bogen $\overline{a_m\,d}$ (insbesondere ist dann natürlich $a = a_m$) und ist zu allen übrigen Ästen des Systems (6) fremd, bis evt. auf seinen Mündungspunkt.

3°. Falls $\overline{a\,x}$ mit $\overline{a_m\,b_m}$ $(a_m = a)$ einen gemeinsamen Bogen hat, so ist $\mu(\overline{a\,x}) \leqq \mu(\overline{a\,b_m})$.

4°. $\lim\limits_{n \to \infty} \delta(S_n) = 0$.

Ein den Bedingungen 1°, 2°, 3°, 4° genügendes System (6) werden wir *eine* (C^*, C)-*Basis* oder kurz *eine* $\mathfrak{B}(C^*, C)$ nennen.

52. Es sei Q die Vereinigungsmenge aller $k-1$-Kreise, die ein irreduzibles, in C enthaltenes, System bilden. Falls Q zusammenhängend ist, setzen wir $C_0 = Q$. Falls aber Q aus mehreren Komponenten besteht, erhalten wir eine Q enthaltende Kurve $C_0 \subset C$, indem wir die verschiedenen Komponenten von Q innerhalb C durch eine gewisse Anzahl einfacher Bögen verbinden. Im Falle $k = 1$ setzen wir dabei C_0 einem beliebigen in C enthaltenen Bogen gleich. C_0 kann evidentermaßen als ein k-fach zusammenhängender Komplex betrachtet werden. Wir konstruieren jetzt eine aus den einfachen Bögen

(7) $$S_1, S_2, \ldots, S_{i_1}, \ldots, \quad S_{i_1} = \overline{a_{i_1}\,b_{i_1}}$$

bestehende $\mathfrak{B}(C_0, C)$. Der Bedingung 4° zufolge ist $C_0 + \sum\limits_{(i_1)} S_{i_1} = C_1$ eine abgeschlossene Menge, also ein Kontinuum, und jeder erreichbare Punkt von C_1 gehört zu einem einzigen der Bögen S_{i_1}.

Es sei jetzt das Kontinuum

$$C_k = C_{k-1} + \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_k)} S_{i_1 i_2 \ldots i_k} \subset C$$

unter der Bedingung, daß jeder erreichbare Punkt von C_k zu einem und nur einem der Bögen $S_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ gehört, bereits konstruiert. Wir konstruieren dann eine $\mathfrak{B}(C_k, C)$ und bezeichnen diejenigen Bögen der letzteren Basis, die in Punkten von $S_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ münden, der Reihe nach durch

$$S_{i_1 i_2 \ldots i_k 1},\ S_{i_1 i_2 \ldots i_k 2},\ \ldots,\ S_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}},\ \ldots$$

$$S_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}} = (\overline{a_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}} b_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}}}).$$

Eine leichte, auf wiederholter Benutzung der Bedingung 4° des § 51 beruhende Überlegung zeigt, daß $C_{k+1} = C_k + \sum\limits_{(i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1})} S_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}}$ ein Kontinuum ist; jeder erreichbare Punkt dieses Kontinuums gehört dabei zu einem einzigen $S_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}}$.

Das Verfahren kann nur dann im Endlichen abbrechen, falls für ein bestimmtes m $C_m = C$ ist.

53. Es sei jetzt $M = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k$, also $M = C_0 + \sum\limits_{k, i_1 i_2 \ldots i_k} S_{i_1 i_2 \ldots i_k}$. Aus unserer Konstruktion ergeben sich die Eigenschaften 1° bis 7° des § 45 unmittelbar.

Der Beweis der Eigenschaft 9° läßt sich leicht auf den Hilfssatz (§ 48) zurückführen (auf Grund der Bedingungen 5° und 7°[32])).

Was die Voraussetzung 8° betrifft, so ergibt sie sich folgendermaßen: Aus 5° und 9° folgt, daß, falls ein Punkt $b \subset M$, also $b \subset C_k$ (für ein bestimmtes k) ein Häufungspunkt der Menge

$$a_{i_1},\ a_{i_1 i_2},\ \ldots,\ a_{i_1 i_2 \ldots i_k},\ \ldots$$

wäre, so würde diese Menge notwendigerweise nach b konvergieren. Daraus und aus unserem Hilfssatz folgt, daß die Menge $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \overline{a_{i_1 i_2 \ldots i_k} a_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}}} + b$ (wobei $\overline{a_{i_1 i_2 \ldots i_k} a_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}}}$ als Teilbogen von $S_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \overline{a_{i_1 i_2 \ldots i_k} b_{i_1 i_2 \ldots i_k}}$ eindeutig bestimmt ist) ein einfacher Bogen W_1 ist.

Indem man a_{i_1} und b innerhalb C_k verbindet, erhält man einen zweiten einfachen Bogen W_2 und dann enthält $W_1 + W_2$ einen zu Q nicht gehörenden Kreis. Durch diesen Widerspruch ist bewiesen, daß auch 8° stimmt und daß also M ein offener Komplex ist.

Außerdem ist aber in der letzten Überlegung auch der Beweis dafür enthalten, daß jede Folge

$$(8) \qquad S_{i_1},\ S_{i_1 i_2},\ \ldots,\ S_{i_1 i_2 \ldots i_k},\ \ldots$$

in eineindeutiger Weise einen Punkt

$$(9) \qquad \lim_{k \to \infty} S_{i_1 i_2 \ldots i_k} = b_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots} \subset C - M$$

bestimmt.

[32]) Man vgl. evtl. mit § 56.

Wir werden jetzt zeigen, daß umgekehrt jeder Punkt $\xi \subset C - M$ ein Punkt $b_{i_1 i_2 \dots i_k \dots}$ von der Art (9) ist.

Es sei ξ ein beliebiger Punkt von $C - M$ und $\overline{a\,\xi}$ irgendein einfacher Bogen, der ξ mit einem Punkte $a \subset C_0$ verbindet. Indem wir evtl. $\overline{a\,\xi}$ durch einen Teilbogen ersetzen, können wir voraussetzen, daß a der einzige zu C_0 gehörende Punkt des Bogens $\overline{a\,\xi}$ ist, so daß $\overline{a\,\xi}$ ein (C_0, C)-Bogen und $a = a_{i_1}$ sein Mündungspunkt ist. Es folgt also aus dem bis jetzt bewiesenen, daß $\overline{a\,\xi}$ mit einem bestimmten Bogen $\overline{a_{i_1} b_{i_1}} = S_{i_1}$ einen Bogen $\overline{a_{i_1} \cdot a_{i_1 i_2}}$ gemeinsam hat (wobei der Teilbogen $\overline{a_{i_1 i_2}\,\xi}$ ein in $a_{i_1 i_2}$ mündender (C_1, C)-Bogen ist). In dieser Weise fortfahrend, erhalten wir auf $\overline{a\,\xi}$ eine Reihe aneinander anschließender Bögen.

(10) $$\overline{a\,a_{i_1 i_2}} = \overline{a_{i_1} a_{i_1 i_2}},\ \overline{a_{i_1 i_2} a_{i_1 i_2 i_3}},\ \dots,\ \overline{a_{i_1 i_2 \dots i_k} a_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}}},\ \dots$$

Diese Bögen konvergieren gegen einen Punkt $b_{i_1 i_2 \dots i_k \dots}$, der auf dem Bogen $\overline{a\,\xi}$ liegt. Ich behaupte, daß $b_{i_1 i_2 \dots i_k \dots} = \xi$ ist. In der Tat, falls dies nicht der Fall wäre, würden wir durch k die erste Zahl bezeichnen, für die $\delta\,(\overline{a_{i_1 i_2 \dots i_k}\, b_{i_1 i_2 \dots i_k}}) < \varrho(a_{i_1 i_2 \dots i_k}, \xi)$ ist. Da der Teilbogen $\overline{a_{i_1 i_2 \dots i_k}\,\xi}$ von $\overline{a\,\xi}$ ein in $a_{i_1 i_2 \dots i_k}$ mündender (C_{k-1}, C)-Bogen ist, der mit $S_{i_1 i_2 \dots i_k}$ den gemeinsamen Bogen $\overline{a_{i_1 i_2 \dots i_k} a_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}}}$ hat, so widerspricht die letzte Ungleichung der Bedingung 3° des § 51.

Ein analoger Widerspruch würde uns den Beweis dafür erbringen, daß $\overline{a\,\xi} = \overline{a_{i_1} b_{i_1 i_2 \dots i_k \dots}}$ ein Ast ist.

54. Wir bezeichnen durch J die Menge aller Punkte $b_{i_1 i_2, \dots, i_k \dots}$, durch $J_{i_1 i_2 \dots i_k}$ die Menge aller Punkte $b_{i_1 i_2 \dots i_k, h_1, h_2 \dots}$, wobei $i_1, i_2, \dots, i_k$ fest gedacht sind, die h dagegen alle Werte annehmen. Wir haben bewiesen, daß $C = M + J$ ist, uns bleibt jetzt noch übrig zu zeigen, daß J eine (falls nicht leere!) nulldimensionale, nur aus Endpunkten der Kurve C bestehende G_δ-Menge ist. Daß J eine G_δ-Menge ist, folgt einfach daraus, daß M eine F_σ-Menge ist. Um zu beweisen, daß J nulldimensional ist, genügt es zu zeigen, daß J aus lauter Endpunkten besteht (weil die Menge aller Endpunkte jeder Kurve höchstens null-dimensional ist [33])).

55. Bevor wir für jeden Punkt $b_{i_1 i_2 \dots i_k \dots}$ die Gleichung

$$\operatorname*{ind}_{b_{i_1 i_2 \dots i_k \dots}} C = 1$$

beweisen, bezeichnen wir durch $M_{i_1 i_2 \dots i_k}$ den offenen Komplex $S_{i_1 i_2 \dots i_k} + \sum\limits_{l, h_1, \dots, h_l} S_{i_1 i_2 \dots i_k, h_1 h_2 \dots h_l}$, und bemerken, daß ein Punkt $b_{i_1 i_2 \dots i_k \dots}$ niemals Häufungspunkt eines $M_{j_1 j_2 \dots j_k}$ sein kann, es sei denn, daß

[33]) Urysohn, a. a. O. [1]); Menger, Math. Ann. **95**, S. 283.

$j_1 = i_1, j_2 = i_2, \ldots, j_k = i_k$ ist. In der Tat, falls ein Punkt $b_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots}$ der Menge J ein Häufungspunkt von $M_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ wäre, so würde eine Punktfolge von der Art

$$a_{j_1 j_2 \ldots j_k}, \quad a_{j_1 j_2 \ldots j_k j_{k+1}}, \ldots, \quad a_{j_1 j_2 \ldots j_k, j_{k+1} \ldots j_{k+h}}, \ldots$$

zu $b_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ konvergieren; dann wäre aber

$$b_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots} + \sum_{h=0}^{\infty} \overline{a_{j_1 j_2 \ldots j_{k+h}} a_{j_1 j_2 \ldots j_{k+h+1}}},$$

(zufolge unserem Hilfssatze) ein den Punkt $b_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots}$ als Endpunkt besitzender einfacher Bogen, also wären die Punkte $b_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots}$ und $b_{j_1 j_2 \ldots j_k \ldots}$ identisch, was nur dann möglich ist, wenn für jedes k $i_k = j_k$ ist.

Aus dem soeben Bewiesenen folgt, daß die Kontinuen $K_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \overline{M_{i_1 i_2 \ldots i_k}}$ folgenden Bedingungen genügen:

1°_k $K_{i_1 i_2 \ldots i_k} = M_{i_1 i_2 \ldots i_k} + J_{i_1 i_2 \ldots i_k}$,

2°_k $K_{i_1 i_2 \ldots i_k} \cdot C_{k-1} = a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$,

3°_k $K_{i_1 i_2 \ldots i_k} \cdot K_{j_1 j_2 \ldots j_k} = S_{i_1 i_2 \ldots i_k} \cdot S_{j_1 j_2 \ldots j_k}$,

4°_k $K_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ und $K_{j_1 j_2 \ldots j_h}$, $h \geqq k$, sind zueinander fremd, abgesehen von dem Falle $i_1 = j_1, \ldots, i_k = j_k$, in welchem $K_{i_1 i_2 \ldots i_k} \supset K_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots i_h}$ ist.

5°_k $\prod_{k=1}^{\infty} K_{i_1 i_2 \ldots i_k} = b_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots}$

56. Es seien jetzt

$$(11) \qquad K_{i_1^1 i_2^1 \ldots i_{k_1}^1}, \quad K_{i_1^2 i_2^2 \ldots i_{k_2}^2}, \ldots, \quad K_{i_1^m i_2^m \ldots i_{k_m}^m} \ldots$$

alle untereinander verschieden. Wir wollen zeigen, daß unmöglich für alle m die Ungleichung

$$(12) \qquad \delta(K_{i_1^m i_2^m \ldots i_{k_m}^m}) \geqq \varepsilon$$

gelten kann. Falls sie in der Tat erfüllt wäre, so würde man zwei Fälle betrachten müssen:

a) Alle k_m sind kleiner als eine bestimmte Zahl N. Dann könnte man voraussetzen (indem man (11), wenn nötig, durch eine Teilfolge ersetzt), daß alle $k_m = k$ sind, was zufolge 3°_k zu einem Widerspruche mit unserem Hilfssatze führen würde.

b) Es gibt unter den k_m beliebig große. Dann kann man voraussetzen, daß $k_m < k_{m+1} - 1$ ist, womit auf Grund von 2°_k derselbe Widerspruch erreicht wird.

Wir können also zu den Bedingungen 1°_k bis 5°_k, denen die Kontinuen $K_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ genügen, noch die folgende hinzufügen:

6°_k Für keine positive Zahl ε gibt es unendlich viele der Ungleichung $\delta(K_{i_1 i_2 \ldots i_k}) \geqq \varepsilon$ genügende $K_{i_1 i_2 \ldots i_k}$.

57. Wir ziehen aus 6°_k eine wichtige Folgerung.

Es sei $k, i_1, i_2, \ldots, i_k$ beliebig gegeben. Dann bezeichnen wir durch $\sum\limits^{i_1, i_2, \ldots, i_k} K_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ die Vereinigungsmenge aller $K_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ mit Ausnahme von $K_{i_1 i_2 \ldots i_k}$.

Falls x' und x'' zwei von allen Punkten $a_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}}$ verschiedene Punkte des Bogens $S_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ sind, so bezeichnen wir ferner durch $\sum\limits^{x' x''} K_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}}$ die Vereinigungsmenge aller derjenigen $K_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}}$ ($i_1, i_2, \ldots, i_k$ fest, i_{k+1} variabel), für die die entsprechenden $a_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}}$ zu dem Teilbogen $\overline{x' x''}$ von $S_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ gehören[34]). Dann folgt leicht aus 6°_k, daß die Mengen

$$(13) \qquad \varDelta_{i_1 i_2 \ldots i_k} = C_{k-1} + \sum^{i_1 i_2 \ldots i_k} K_{j_1 j_2 \ldots j_k}$$

$$(14) \qquad \mathsf{A}^{x' x''}_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \overline{x' x''} + \sum^{x' x''} K_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}}$$

$$(15)^{35)} \qquad \varDelta^{x' x''}_{i_1 i_2 \ldots i_k} = (C_{k-1} + \sum^{i_1 i_2 \ldots i_k} K_{j_1 j_2 \ldots j_k}) +$$
$$+ \overline{a_{i_1 i_2 \ldots i_k} x'} + \overline{x'' b_{i_1 i_2 \ldots i_k}} + \sum^{a_{i_1 i_2 \ldots i_k} x'} + \sum^{x'' b_{i_1 i_2 \ldots i_k}} K_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}}$$

abgeschlossen sind, daß außerdem

$$\varDelta_{i_1 i_2 \ldots i_k} + K_{i_1 i_2 \ldots i_k} = C, \quad \varDelta_{i_1 i_2 \ldots i_k} \cdot K_{i_1 i_2 \ldots i_k} = a_{i_1 i_2 \ldots i_k},$$
$$\mathsf{A}^{x' x''}_{i_1 i_2 \ldots i_k} + \varDelta^{x' x''}_{i_1 i_2 \ldots i_k} = C, \quad \mathsf{A}^{x' x''}_{i_1 i_2 \ldots i_k} \cdot \varDelta^{x' x''}_{i_1 i_2 \ldots i_k} = x' + x''$$

ist und daß, falls $\frac{1}{k}$ bzw. $\varrho(x', x'')$ genügend klein sind, $\delta(K_{i_1 i_2 \ldots i_k})$ bzw. $\delta(\mathsf{A}^{x' x''}_{i_1 i_2 \ldots i_k})$ beliebig klein wird.

Es sei $\varepsilon > 0$ und ein Punkt $b_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots}$ beliebig gegeben. Wir bestimmen k unter der Bedingung $\delta(K_{i_1 i_2 \ldots i_k}) < \varepsilon$. Dann liefert die Zerlegung

$$C = A_{i_1 i_2 \ldots i_k} + a_{i_1 i_2 \ldots i_k} + D_{i_1 i_2 \ldots i_k},$$

wobei $A_{i_1 i_2 \ldots i_k} = K_{i_1 i_2 \ldots i_k} - a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ und $D_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \varDelta_{i_1 i_2 \ldots i_k} - a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ gesetzt ist, eine ε-Aussonderung des Punktes $b_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots}$ mittels des einzigen Punktes $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$. Da ε beliebig ist, bedeutet dieses Ergebnis, daß $b_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots}$ ein Endpunkt ist.

---

[34]) Man könnte auch voraussetzen, daß $\overline{x' x''}$ ein keinen Verzweigungspunkt von C_0 enthaltender Teilbogen von C_0 ist, wobei x' und x'' von allen a_{i_1} verschieden sind. Indem man $Q^* = C_0 - (\overline{x' x''}) + x' + x''$ setzt und in $\Sigma^* K_{i_1}$ die Summierung über alle K_{i_1} mit $a_{i_1} \subset Q^*$ versteht, würde man in (14) $k = 0$ bringen und (15) durch

$$\varDelta^{x' x''} = Q^* + \Sigma^* K_{i_1}$$

ersetzen.

[35]) Wir setzen voraus, daß die Punkte $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}, x', x'', b_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ in der hier gegebenen Ordnung aufeinander folgen.

Es sei jetzt x irgendein von $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, $b_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ und allen Punkten $a_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}}$ verschiedener Punkt von $S_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ bzw. von allen Verzweigungspunkten der Kurve C_0 verschiedener Punkt dieser letzten Kurve. Wir nehmen einen den Punkt x enthaltenden Teilbogen $\overline{x' x''}$ von $S_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ bzw. C_0 und sorgen dabei nur dafür, daß x' und x'' in keinen Punkt $a_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}}$ fallen und daß $\delta(\mathsf{A}^{x' x''}_{i_1 i_2 \ldots i_k}) < \varepsilon$ ist[36]) (wobei ε eine beliebige feste positive Zahl ist).

Indem man

$$A_x = \mathsf{A}^{x' x''}_{i_1 i_2 \ldots i_k} - (x' + x'') \quad \text{und} \quad D_x = \Delta^{x' x''}_{i_1 i_2 \ldots i_k} - (x' + x'')$$

setzt, erhält man die ε-Aussonderung des Punktes x:

$$C = A_x + (x' + x'') + D_x .$$

Also ist $\operatorname{ind}_x C = 2$, falls x von allen Punkten $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, $b_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, $b_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots}$, und von allen (endlich vielen!) Verzweigungspunkten der Kurve C_0 verschieden ist. In analoger Weise würde man beweisen, daß jeder Punkt $b_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ ein Endpunkt ist.

58. An die Mengen $K_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ und $\Delta^{x' x''}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ schließen sich in natürlicher Weise folgende Mengen an. Es sei ein $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ beliebig gegeben. Wir betrachten alle diejenigen $K_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} j_k}$, die einen Durchmesser $\geqq \varepsilon$ haben und für die außerdem $a_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} j_k} = a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ ist. Auf jedem dieser (notwendig endlich vielen) $K_{i_1 i_2 \ldots j_k}$ (es seien $K_{i_1 i_2 \ldots j_k^m}$, $m \leqq r_\varepsilon$) wählen wir einen Punkt x_m unter der Bedingung, daß

$$x_m \subset S_{i_1 i_2 \ldots j_k^m}, \quad x_m \neq a_{i_1 i_2 \ldots i_k j_{k+1}} \qquad \text{(wie auch } j_{k+1} \text{ gewählt sei!)}$$

und

$$\delta(\mathsf{A}^{a_{i_1 i_2 \ldots i_k} x_m}) < \varepsilon$$

sei. (Der Bogen $\overline{a_{i_1 i_2 \ldots i_k} x_m}$ gehört selbstverständlich zu $S_{i_1 i_2 \ldots j_k^m}$).

Wir nehmen endlich einen den Punkt $x_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ enthaltenden Bogen $\overline{x' x''} \subset S_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}$, der so beschaffen ist, daß erstens x' und x'' von allen $a_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}, j_k}$ verschieden sind und zweitens der Durchmesser der Menge

$${}_{i_k}\mathsf{A}^{x' x''}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} = {}_{i_k}\sum^{x' x''} C_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}, j_k} + \overline{x' x''}$$

(wobei ${}_{i_k}\sum^{x' x''}$ auf alle diejenigen $C_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}, j_k}$ erstreckt ist, für die $a_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}, j_k}$ in $\overline{x' x''}$ enthalten, jedoch von $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ verschieden ist) kleiner als ε ist. Wir definieren jetzt

$$\mathsf{A}^{\varepsilon}_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \sum_{m=1}^{r_\varepsilon} \mathsf{A}^{a_{i_1 i_2 \ldots i_k} x_m} + {}_{i_k}\mathsf{A}^{x' x''}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} .$$

---

[36]) Falls $x \subset C_0$, sollen die Bedingungen der Fußnote [34]) erfüllt sein.

59. Die Konstruktion läßt sich auch für jeden Verzweigungspunkt v_i der Kurve C_0 ausführen, nur muß man die Punkte x_m auf den endlich vielen sich an v_i anschließenden Bögen von C_0 wählen und auf x' und x'' gänzlich verzichten. Wir erhalten dann insbesondere (falls v_i von allen a_{i_1} verschieden ist):

$$\mathsf{A}^{\varepsilon}_{v_i} = \sum_{m=1}^{r} \mathsf{A}^{v_i x_m},$$

wobei r die Anzahl der sich an v_i anschließenden in C_0 enthaltenen Bögen (d. h. $\operatorname{ind}_{v_i} C_0$) bedeutet.

60. Nun läßt sich aus den abgeschlossenen Mengen $K_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, $\mathsf{A}^{x' x''}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, $\mathsf{A}^{\varepsilon}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, $\mathsf{A}^{\varepsilon}_{v_i}$ für jedes ε eine ε-Überdeckung $\mathfrak{P}^{(\varepsilon)}$ der Kurve C konstruieren, deren sämtliche Zyklen in ein-eindeutiger Weise den in C_0 enthaltenen Kreisen entsprechen. Daraus folgt aber, daß $\varkappa(\mathfrak{P}^{\varepsilon}) = \varkappa(C_0)$ ist; da dies für beliebiges ε gilt, ist $\varkappa(C) \leqq \varkappa(C_0)$, folglich $\varkappa(C) = \varkappa(C_0)$, w. z. b. w.

Korollar 1. *Damit eine stetige Kurve k-fach zusammenhängend sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie ein irreduzibles $(k-1)$-Kreissystem und kein k-Kreissystem enthält.*

Korollar 2. *Es gibt keine unregelmäßig geschlossene stetige Kurve.*

Korollar 3. *Die einzige geschlossene stetige Kurve ist der Kreis.* (M. a. W. in derselben Weise, wie die Irreduzibilität und die Stetigkeit den einfachen Bogen charakterisiert[37]), so charakterisiert die Geschlossenheit und die Stetigkeit den (topologischen) Kreis.)

Dieses Ergebnis kann auch folgendermaßen formuliert werden:

Satz. *Damit ein kompakter metrischer Raum C einer Kreislinie homöomorph sei, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes $\varepsilon > 0$, C als Vereinigungsmenge eines Systems endlich vieler Kontinuen darstellbar sei, deren Durchmesser sämtlich $< \varepsilon$ sind und von denen jedes genau mit zwei anderen Kontinuen desselben Systems gemeinsame Punkte hat.*

Ein entsprechender Satz gilt auch für den einfachen Bogen.

Weitere Korollare des Hauptsatzes dieses Kapitels sind folgende:

Korollar 4. *Eine endlich hoch zusammenhängende stetige Kurve enthält höchstens abzählbar viele Verzweigungspunkte, die alle eine (begrenzt oder unbegrenzt[38])) endliche Ordnung haben.*

Daraus ergibt sich:

[37]) Mazurkiewicz, Fund. Math. 1.

[38]) ein Punkt v von C heißt Punkt von „unbegrenzt endlicher Ordnung“ (nach Urysohn $\operatorname{ind}_v C = \omega$, nach Menger $\text{Ordnung}_v\, C = w$), falls man für jedes $\varepsilon > 0$ v mit einer endlichen Punktmenge ε — aussondern kann, deren Kardinalzahl mit $\frac{1}{\varepsilon}$ notwendig gegen ∞ strebt.

Korollar 5. *Eine endlich hoch zusammenhängende stetige Kurve enthält kein Urysohnsches Verdichtungskontinuum*[39]).

Letzteres Ergebnis kann auch folgendermaßen formuliert werden[38]):

Korollar 6. *Jedes Teilkontinuum einer endlich hoch zusammenhängenden stetigen Kurve ist eine stetige Kurve*[39]).

Da jeder Verzweigungspunkt der Kurve C entweder unter den (endlich vielen) Verzweigungspunkten der Kurve C_0 oder unter den Punkten $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ enthalten ist, so gilt der

Korollar 7. *Für jeden Verzweigungspunkt v der Kurve C gibt es zueinander bis auf den Punkt v fremde, v als Endpunkt besitzende Bögen, und zwar ist die Anzahl dieser Bögen gleich der Verzweigungsordnung* $\operatorname{ind}_v C$ *des Punktes v, falls letztere Zahl endlich ist. Falls aber* $\operatorname{ind}_v A = \omega$ *ist, so gibt es unendlich viele zueinander bis auf v fremde Bögen* $\overline{vc_1}, \overline{vc_2}, \ldots, \overline{vc_m}, \ldots$ *(deren Durchmesser selbstverständlich gegen Null konvergieren*[40])).

61. Indem wir die Kurve C_0 in endlich viele Bögen

$$T_1, T_2, \ldots, T_{m_0}$$

zerlegen, dann alle $S_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ in eine einfache Folge

$$T_{m_0+1}, T_{m_0+2}, \ldots, T_m, \ldots$$

umordnen und dafür sorgen, daß $L_m = \sum_{i=1}^{m} T_i$ für jedes m zusammenhängend ist, können wir folgenden Satz aussprechen:

Korollar 8. *Jede endlich hoch zusammenhängende stetige Kurve C kann bis auf eine aus lauter Endpunkten von C bestehende, höchstens nulldimensionale G_δ-Menge J auf die Weise erbaut werden, daß man mit einem einzigen Bogen $S_1 = L_1$ anfängt und neue Bogen S_m in endlich — oder abzählbar — vielen Schritten der Reihe nach anheftet, so daß dadurch gewöhnlichen Bogenkomplexen homöomorphe Kurven*

$$S_1 = L_1, L_2, \ldots, L_m, \ldots, \quad L_{m+1} = L_m + S_{m+1} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

entstehen und jeder Bogen S_{m+1} bis auf seine Endpunkte zu L_m fremd ist. Dabei ist $\varkappa(C) - 1$ der Zahl derjenigen Schritte m gleich, bei denen beide Endpunkte von S_{m+1} zu L_m gehören; außerdem ist $\lim_{m \to \infty} \delta(S_m) = 0$.

62. Durch diesen Satz wird eine weitgehende Analogie unter den endlich hoch zusammenhängenden stetigen Kurven und den gewöhnlichen Bogenkomplexen zutage gebracht.

---

[39]) Dieser Satz ist zum erstenmal von Frau Rożańska bewiesen worden. (S. eine demnächst in den Amsterdamer Berichten erscheinende Arbeit.)

[40]) Durch Korollar 7 wird von dem von Menger (l. c. S. 302) gestellten Problem eine Teillösung geliefert.

Trotzdem können aber die erwähnten Kurven viele Singularitäten nicht allzu elementarer Natur besitzen. So folgt aus Beispielen von Urysohn und Menger[41]), daß jeder Punkt einer sogar einfach zusammenhängenden stetigen Kurve zu einem Häufungskontinuum gehören kann, daß die Endpunkte gleichzeitig mit den Verzweigungspunkten eine überall dichte Menge bilden können u. dgl.

Insbesondere ist folgendes zu beachten. Nennen wir für einen Augenblick *Gewicht* einer (zu einer Kurve C gehörenden) Menge M die endliche oder unendliche Kardinalzahl $\sum_{x \subset M} \operatorname{ind}_x C$ (wobei die Summation über *alle* $x \subset M$ zu verstehen ist), so ist bekanntlich für jeden mehr als einen Bogen enthaltenden Bogenkomplex das Gewicht der Menge A aller Endpunkte höchstens gleich dem Gewichte der Menge V aller Verzweigungspunkte. Dagegen folgt aus unsern Sätzen und den erwähnten Urysonschen Beispielen[41]), daß im allgemeinen Falle einer endlich hoch zusammenhängenden stetigen Kurve das Gewicht der Menge A den Wert $\mathfrak{c}$ erreichen kann, obwohl die Menge V höchstens vom Gewicht $\aleph_0$ ist.

63. Falls C eine stetige Kurve unendlich hohen Zusammenhanges ist, so enthält C ein aus beliebig vielen Kreisen bestehendes irreduzibles System. Nun ist es leicht, eine Folge

$$\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_k, \ldots$$

von Kreissystemen derart zu konstruieren, daß $\mathfrak{S}_k$ ein k-Kreissystem ist, dessen sämtliche Kreise in $\mathfrak{S}_{k+1}$ vorkommen ($k = 1, 2, \ldots$ in inf.).

Das ergibt aber das folgende Resultat:

Jede unendlich hoch zusammenhängende stetige Kurve enthält ein unendliches Kreissystem, in dem kein Nullsystem als Teilsystem vorkommt.

64. Es ist kaum zu hoffen, daß im allgemeinen Falle der unendlich hoch zusammenhängenden stetigen Kurven etwas Genaueres sich aussagen läßt: vor allem schon deshalb nicht, weil eine stetige Kurve eine *beliebig* komplizierte allgemeine Kurve enthalten kann.

Collioure (Pyrénées Orientales), Oktober 1925.

---

[41]) Urysohn, Verh. Akad. Amsterdam; Menger, l. c. S. 285.

(Eingegangen am 1. 11. 1925.)