

Über stetige Abbildungen kompakter Räume*).

Von

Paul Alexandroff in Moskau.

1. Ein *abstrakter Raum* oder kurz ein *Raum* entsteht, wenn eine (aus irgendwelchen Elementen bestehende) Menge E und ein Gesetz vorliegt, so daß für jede (echte oder unechte) Teilmenge M von E die *abgeschlossene Hülle* \bar{M} (die ebenfalls eine Teilmenge von E ist) eindeutig bestimmt wird, und dabei folgende Bedingungen¹⁾ erfüllt werden:

1° Jede, höchstens aus einem Elemente von E bestehende Teilmenge M ist mit ihrer abgeschlossenen Hülle identisch.

2° $\overline{(\bar{M})} = \bar{M}$ für eine beliebige Menge $M \subset E$.

3° $\overline{(M + N)} = \bar{M} + \bar{N}$.

Die Elemente von E werden auf diese Weise zu Punkten des Raumes R .

Eine Teilmenge von R heißt *abgeschlossen*, falls sie mit ihrer abgeschlossenen Hülle identisch ist. Eine zu einer abgeschlossenen Menge F komplementäre Menge $R - F$ heißt eine *offene Menge* (= ein Gebiet).

Nun ist es wesentlich, daß *derselbe* Raum R (d. h. dieselben Beziehungen $M \sim \bar{M}$) sich aufstellen lassen, indem man als Umgebungen $U(x)$ eines beliebigen Punktes $x \in R$ alle diesen Punkt enthaltenden offenen Mengen betrachtet, und dann wie gewöhnlich (z. B. bei Hausdorff) den Begriff des Häufungspunktes einführt. Die so definierten Umgebungen genügen den ersten drei Hausdorffschen Axiomen²⁾, das vierte soll aber durch das folgende, schwächere, Axiom ersetzt werden:

*) Der erste, abstrakte, Teil der vorliegenden Arbeit ist mit den neueren Untersuchungen von Fr. E. Noether aus dem Gebiete der allgemeinen Gruppentheorie nahe verwandt und zum Teile durch diese Untersuchungen angeregt.

¹⁾ Diese Bedingungen rühren von Fréchet und Fr. Riesz her. Siehe wegen der betreffenden Literatur z. B. Fréchet, *Sur les ensembles abstraits*, Ann. Ec. Norm. (3), 38 (1921), und insbesondere die daselbst zitierte, leider schwer zugängliche Arbeit von Fréchet „*Esquisse d'une théorie d'ensembles abstraits*“, Sir Asutosh Mookerjee commemoration volumes, t. 2; the Baptist Mission Press, Calcutta, 1921. Eine zusammenfassende Darstellung aller zum Fréchet'schen Ideenkreise gehörenden Resultate erscheint demnächst als Buch in der Collection Borel.

²⁾ Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, S. 213 u. ff.

Falls x und y zwei verschiedene Punkte des Raumes R sind, so gibt es eine zu y fremde $U(x)$ und eine zu x fremde $U(y)$.

2. Es seien jetzt zwei Räume R und R^* so einander zugeordnet, daß jeder Punkt x^* des Raumes R^* in eindeutiger Weise wenigstens einem Punkte x des Raumes R entspricht, m. a. W. daß eine Funktion

$$(1) \quad x^* = f(x), \quad x \in R, \quad x^* \in R^*$$

oder einfach

$$R^* = f(R)$$

entsteht. Dann soll die Bildmenge einer in R gelegenen Menge M durch M^* oder durch $f(M)$ bezeichnet werden. Falls aber M^* irgendeine in R^* gelegene Menge ist, so soll durch *M oder durch $f^{-1}(M^*)$ die Urbmenge von M^* , d. h. die Menge *aller* Punkte von R , deren Bildpunkt x^* zu M^* gehört, bezeichnet werden.

Die Abbildung (1) heißt *stetig*³⁾, falls für jede Menge $M \subset R$ die Bedingung

$$(2) \quad \overline{f(M)} \supset f(\overline{M})$$

erfüllt ist. Indem man jeden Punkt der Menge \overline{M} *Berührungspunkt* von M nennt, heißt die Bedingung (2), daß das Bild eines Berührungspunktes (irgendeiner in R gelegenen Menge) immer ein Berührungspunkt der Bildmenge ist. Letztere Bedingung sagt aber genau so viel aus wie die folgende³⁾:

Falls $x^* = f(x)$ Bildpunkt von x ist, so gibt es zu jeder $U(x^*)$ eine $U(x)$ von der Beschaffenheit, daß

$$(3) \quad f(U(x)) \subset U(x^*)$$

ist.

3. Jede Abbildung $R^* = f(R)$ bestimmt eine *Zerlegung* des Raumes R in zueinander fremde Mengen $X = f^{-1}(x^*)$, wobei x^* ein beliebiger Punkt des Bildraumes R^* ist. Falls dabei die gegebene Abbildung stetig war, so sind sämtliche Mengen X abgeschlossen.

Es liegt daher nahe, Zerlegungen

$$(4) \quad R = \sum X$$

eines Raumes R in zueinander fremde abgeschlossene Mengen X a priori zu betrachten.

Definition 1. Die Zerlegung (4) eines Raumes R in zueinander fremde abgeschlossene Mengen bestimmt folgendermaßen einen neuen Raum R^* :

³⁾ Vgl. Hausdorff, op. cit. S. 360, II. Die daselbst befindlichen Betrachtungen gelten auch für den Fall eines abstrakten (nicht topologischen) Raumes.

Punkte x^* des Raumes R^* sind Mengen X der Zerlegung (4), $x^* \sim X$.

Umgebungen $V(x^*)$ entstehen folgendermaßen: es sei x_0^* ein beliebiger Punkt des Raumes R^* . Jedem die Menge $X_0 \sim x_0^*$ enthaltenden Gebiete $G \subset R$ entspricht dann eine bestimmte $V(x_0^*)$, die aus allen denjenigen x^* besteht, deren in G enthaltene X entsprechen.

Man sieht leicht ein, daß R^* wirklich ein Raum ist (d. h. daß die $V(x^*)$ allen im § 1 aufgestellten Umgebungsaxiomen genügen).

Jede Zerlegung (4) eines Raumes induziert eine Abbildung des Raumes R auf den durch diese Zerlegung bestimmten Raum R^* : man erhält diese induzierte Abbildung, indem man einfach

$$x^* = f(x) \quad \text{für alle } x \in X$$

setzt. Im allgemeinen braucht natürlich diese Abbildung nicht stetig zu sein.

4. Definition 2. Die Zerlegung (4) des Raumes R in zueinander fremde abgeschlossene Mengen heißt *stetig*, falls zu einem beliebigen, irgendeine Menge X_0 der Zerlegung (4) enthaltenden Gebiete $G_1 \subset R$ ein Gebiet $G_0 \supset X_0$ sich derart bestimmen läßt, daß jede zu G_0 nicht fremde Menge X der Zerlegung (4) in G_1 enthalten ist.

5. Folgender Satz ist beinahe selbstverständlich.

I. Die durch eine Zerlegung (4) induzierte Abbildung $R^* = f(R)$ ist dann und nur dann stetig, falls die Zerlegung (4) stetig ist.

Es sei zuerst (4) eine stetige Zerlegung des Raumes R , R^* der durch diese Zerlegung bestimmte Raum, $R^* = f(R)$ die durch diese Zerlegung induzierte Abbildung, x_0^* ein beliebiger Punkt von R^* , $V(x_0^*)$ eine beliebige Umgebung von x_0^* , $G_1 \supset X_0$ ein dieser Umgebung vermöge der Definition 1 entsprechendes Gebiet in R , $G_0 \supset X_0$ ein diesem Gebiete vermöge der Definition 2 entsprechendes Teilgebiet, x_0 irgendein zu X_0 gehöriger Punkt, und $U(x_0)$ irgendeine in G_0 enthaltene Umgebung dieses Punktes. Dann ist jede zu $U(x_0)$ nicht fremde Menge X der Zerlegung (4) in G_1 enthalten, und also

$$f(U(x_0)) \subset V(x_0^*),$$

d. h. die Abbildung $R^* = f(R)$ stetig.

Es sei umgekehrt die durch die Zerlegung (4) induzierte Abbildung $R^* = f(R)$ stetig. Es sei weiter X_0 eine beliebige Menge X der Zerlegung (4), G_1 ein beliebiges, diese Menge enthaltendes Gebiet in R , $V(x_0^*)$ die zugehörige Umgebung des Punktes $x_0^* \sim X_0$, x_0 ein beliebiger Punkt von X_0 , $U(x_0)$ eine der Inklusion $f(U(x_0)) \subset V(x_0^*)$ genügende Umgebung dieses Punktes, G_0 das durch Vereinigung der für alle Punkte $x_0 \in X_0$ konstruierten, soeben erwähnten $U(x_0)$ gebildete Gebiet. Dann ist $f(G_0) \subset V(x_0^*)$; letztere Inklusion sagt aber nichts anderes aus, als daß jede mit G_0 gemeinsame Punkte besitzende Menge X der Zerlegung (4) in G_1 enthalten ist.

Der Satz I ist hierdurch bewiesen.

6. Falls uns zwei Räume R und R^* mit allen ihren Eigenschaften gegeben sind, so können wir entscheiden, ob der Raum R^* ein stetiges Bild

des Raumes R ist oder nicht. Daraus folgt aber durchaus nicht, daß durch eine auch noch so vollständige Kenntnis des Raumes R eine Möglichkeit gegeben ist, alle Räume, die sich stetig auf R abbilden lassen, in irgendwelchem Sinne zu konstruieren.

Wir wollen das auf diese Weise entstehende Problem für sehr allgemeine Raumkategorien lösen; zuerst aber werden wir zeigen, warum die Lösung dieses Problems in seiner vollen Allgemeinheit ziemlich aussichtslos erscheint.

Wir haben gesehen, daß jeder durch eine stetige Zerlegung eines Raumes R bestimmte Raum R^* ein stetiges Bild von R ist. Nun aber braucht gar nicht eine stetige Abbildung $R^* = f(R)$ eines sogar *kompakten topologischen Raumes* durch die Zerlegung des Raumes R in die Mengen $X = f^{-1}(x^*)$ induziert zu sein⁴⁾.

Um dies einzusehen, betrachten wir folgendes Beispiel.

Es bestehe der Raum R aus allen Ordnungszahlen der I. und II. Zahlklasse, d. h. aus allen Zahlen

$$(5) \quad 1, 2, \dots, n, \dots, \omega, \dots, \alpha, \dots \quad (\alpha < \Omega),$$

wobei Ω die erste nicht abzählbare transfinite Ordnungszahl (d. h. die erste Zahl der III. Zahlklasse) ist. Die Zahl α , als Punkt eines Raumes betrachtet, soll etwa durch $[\alpha]$ bezeichnet werden.

Der Raum R^* besteht definitionsgemäß aus allen Elementen (5) und aus dem Elemente Ω .

Die Umgebungen in R bzw. in R^* seien folgendermaßen definiert. Falls $[\alpha]$ ein beliebiger Punkt von R bzw. R^* , also $\alpha < \Omega$ bzw. $\alpha \leq \Omega$ ist, und λ eine beliebige Ordnungszahl $< \alpha$ ist (für $\alpha = 1$ ist $\lambda = 0$), so definieren wir als die λ -te Umgebung von $[\alpha]$ die Menge aller derjenigen Punkte $[\beta]$, für die die Ungleichung

$$\lambda < \beta \leq \alpha$$

gilt.

Dieser Umgebungsdefinition gemäß sind alle Punkte $[\alpha]$, für die die Zahl $\alpha - 1$ existiert, in R und in R^* isoliert.

Außerdem ist

$$R^* - [\Omega] = R.$$

Man erhält jetzt eine eindeutige und stetige Abbildung

$$(6) \quad R^* = f(R),$$

⁴⁾ Für nicht kompakte Räume ist das trivial: es genügt z. B., die geradlinige Strecke $0 \leq x < 1$ eindeutig und stetig auf die Kreislinie abzubilden.

wenn man setzt

$$\begin{cases} [\alpha^*] = f([\alpha]) = [\alpha - 1], & \text{für } \alpha = 2, 3, \dots, n, \dots \quad (n < \omega) \\ [\alpha^*] = f([\alpha]) = [\alpha], & \text{für } \omega \leq \alpha < \Omega \\ [\Omega] = f([1]). \end{cases}$$

Indem man die (aus einem einzigen Punkte bestehende) Menge $f^{-1}(x^*)$, wo x^* ein beliebiger Punkt des Raumes R^* ist, durch X bezeichnet, sieht man sofort ein, daß der durch die Zerlegung $R = \sum X$ bestimmte Raum mit R identisch, also von R^* verschieden ist.

Man sieht also, daß die Begriffe der stetigen Abbildung und der stetigen Zerlegung eines Raumes nicht in befriedigender Weise einander entsprechen, und zwar tritt diese Inkohärenz bereits im Falle, wo beide Räume R und R^* kompakt und außerdem topologisch sind, vor.

7. In unserem Beispiel kommt noch eine zweite Eigentümlichkeit vor: die abgeschlossene Menge $F = R - [1]$ wird nämlich auf die nicht abgeschlossene Menge $M^* = R^* - [\Omega]$ abgebildet. Wenn man daran denkt, daß (wie man leicht beweist) die Stetigkeit einer Abbildung darin besteht, daß die Urbmenge $*F$ jeder abgeschlossenen Menge F^* stets abgeschlossen ist⁵⁾, liegt es nahe, diejenigen stetigen Abbildungen, bei denen auch umgekehrt jeder abgeschlossenen Teilmenge F von R eine abgeschlossene Bildmenge $F^* \subset R^*$ entspricht, besonders zu berücksichtigen und sie etwa als doppelstetige Abbildungen zu bezeichnen.

8. Es besteht dann folgender

Satz II. Jede doppelstetige Abbildung

$$R^* = f(R)$$

zweier Räume läßt sich durch eine stetige Zerlegung des Raumes R induzieren.

Es seien $U(x^*)$ die in R^* a priori gegebenen Umgebungen. Indem wir durch X die (in R abgeschlossenen) Mengen $f^{-1}(x^*)$ (wobei x^* ein beliebiger Punkt von R^* ist) bezeichnen, betrachten wir die Zerlegung $R = \sum X$ und die durch diese Zerlegung vermöge des § 3 bestimmten „Umgebungen“ $V(x^*)$. Es handelt sich darum, zu zeigen, daß die Gesamtheit aller $V(x^*)$ als ein den Raum R^* definierendes Umgebungssystem betrachtet werden kann.

Dazu beweisen wir zuerst, daß jede $V(x^*)$ in R^* offen ist.

In der Tat ist, der Definition von $V(x^*)$ gemäß, $R^* - V(x^*)$ durch alle diejenigen Punkte z^* des Raumes R^* gebildet, die der Relation

$$(7) \quad f^{-1}(z^*) \cdot (R - G) \neq 0$$

⁵⁾ Hausdorff, op. cit. S. 361, III.

genügen (wobei G das der Definition von $V(x^*)$ zugrunde liegende, die Menge X enthaltende Gebiet ist).

Aus der Ungleichung (7) folgt, daß

$$R^* - V(x^*) = f(R - G).$$

Da $R - G$ abgeschlossen und unsere Abbildung doppelstetig ist, so ist auch $R^* - V(x^*)$ abgeschlossen und also $V(x^*)$ offen.

Es bleibt uns übrig zu zeigen, daß in jeder $U(x^*)$ eine $V(x^*)$ enthalten ist. Letztere Bedingung ist aber auch ohne Voraussetzung der Doppelstetigkeit der Abbildung, also auf Grund der Stetigkeit allein, erfüllt, was man folgendermaßen einsieht.

Es sei $U(x^*)$ festgewählt. Dann gibt es zu jedem Punkte $x \in X$ eine der Inklusion (3) des § 2 genügende Umgebung $U(x)$. Die Vereinigungsmenge dieser für alle Punkte $x \in X$ konstruierten $U(x)$ ist eine offene, die Menge X enthaltende Teilmenge G , und man hat die Inklusion

$$f(G) \subset U(x^*).$$

Die der Menge G entsprechende $V(x^*)$ ist aber in $f(G)$ enthalten, und daher ist a fortiori $V(x^*) \subset U(x^*)$, womit die Gleichwertigkeit der Systeme $U(x^*)$ und $V(x^*)$ bewiesen ist. Also ist der Raum R^* durch die Zerlegung $R = \sum X$ bestimmt; da aber R^* gleichzeitig ein stetiges Bild von R ist, so ist letztere Zerlegung nach dem Satze I stetig, w. z. b. w.

9. Mehr als die Sätze I und II läßt sich im allgemeinen Falle nicht aussagen: in der Tat braucht eine stetige Abbildung eines (sogar separablen metrischen) Raumes durchaus nicht doppelstetig zu sein, wie man aus folgendem elementaren Beispiele erkennt.

Es sei X_0 die Strecke ($x = 0, 0 \leq y < 1$) der gewöhnlichen Ebene, und (für jedes ganzzahlige positive n) X_n die abgeschlossene Strecke $x = \frac{1}{n}, 0 \leq y \leq 1$. Die Menge $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ (als in der gewöhnlichen Ebene gelegener Relativraum betrachtet) ist ein metrischer Raum R , und man hat eine stetige Abbildung $R^* = f(R)$, wobei R^* aus den Punkten x_n ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$x_0 = (0; 0); \quad x_n = \left(\frac{1}{n}; 0\right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

besteht. Nun ist aber diese Abbildung nicht doppelstetig, weil die (in R abgeschlossene) aus den Punkten $y_n = \left(\frac{1}{n}; 1\right)$ bestehende Menge in die in R^* nicht abgeschlossene Menge aller Punkte $x_n, n \geq 1$, übergeht^{5a)}.

10. Wir beweisen jetzt den eigentlich selbstverständlichen

^{5a)} Vgl. Fußnote 16a).

Satz III. *Ein stetiges Bild eines bikompakten bzw. kompakten abstrakten Raumes⁶⁾ ist wiederum ein bikompakter bzw. kompakter Raum.*

Es sei $R^* = f(R)$ und R bikompakt bzw. kompakt. Es sei weiter $\{G^*\}$ ein beliebiges bzw. abzählbares System von den Raum R^* überdeckenden offenen Mengen. Um den Satz III zu beweisen, brauchen wir nur zu zeigen, daß aus $\{G^*\}$ sich ein endliches, den Raum R^* noch immer überdeckendes Teilsystem wählen läßt. Letztere Behauptung folgt aber einfach daraus, daß die $*G$ den Raum R überdecken und daselbst offen sind, also lassen sich⁷⁾ endlich viele dieser Mengen, es seien

$$*G_1, *G_2, \dots, *G_s$$

derart wählen, daß $\sum_{i=1}^s *G_i = R$, und also $\sum_{i=1}^s G_i^* = R^*$ ist, w. z. b. w.

11. Folgendes Beispiel zeigt, daß stetige Abbildungen selbst der einfachsten bikompakten^{7a)} Räume nicht doppelstetig zu sein brauchen.

Es bestehe in der Tat R aus der abgeschlossenen Einheitsstrecke der reellen Zahlengeraden und dem Punkte 2 derselben Geraden; die Umgebungen seien dabei die üblichen (d. h. man betrachte R als in der gewöhnlichen Geraden enthaltenen Relativraum).

R^* soll aus denselben Punkten wie R bestehen (wodurch eine eindeutige Beziehung zwischen R^* und R von vornherein festgestellt wird). Die Umgebungen aller Punkte bleiben auch dieselben, mit einziger Ausnahme des Punktes 2; letzterer Punkt bekommt nämlich als Umgebung jede, aus dem ganzen Raume durch Weglassung endlich vieler, vom Punkt 2 verschiedener, sonst aber beliebiger Punkte, entstehende Menge. Man überzeugt sich leicht, daß der *abstrakte* (nicht topologische!) Raum R^* ein stetiges, wohl aber kein doppelstetiges Bild des Raumes R ist.

12. Dagegen bestehen folgende Sätze:

IV⁸⁾. *Falls der topologische Raum R^* stetiges Bild des bikompakten topologischen Raumes R ist, ist die betreffende stetige Abbildung auch doppelstetig.*

⁶⁾ Die Definition der bikompakten topologischen Räume ist in der Arbeit P. Alexandroff und P. Urysohn, Zur Theorie der topologischen Räume, Math. Ann. 92, gegeben. Diese Definition und der dazu gehörige Satz I (loc. cit. S. 259) läßt sich unmittelbar auf den Fall allgemeiner abstrakter Räume übertragen.

⁷⁾ Da R bikompakt bzw. kompakt ist.

^{7a)} (abstrakten (also, im allgemeinen, nicht topologischen)).

⁸⁾ Zuerst habe ich diesen Satz nur für die dem I. Abzählbarkeitsaxiome genügenden bikompakten topologischen Räume bewiesen, was für das folgende (§§ 13 bis 23) genügte. Herr N. Wedenissoff (stud. math. in Moskau) hat mich aber in liebenswürdiger Weise darauf aufmerksam gemacht, daß der Satz IV in voller Allgemeinheit unmittelbar aus dem Satz III und einem von Paul Urysohn und mir früher bewiesenen⁹⁾ Satze folgt, wodurch der Satz IV viel allgemeiner und sein Beweis viel einfacher geworden ist.

Es sei in der Tat F eine beliebige in R gelegene und daselbst abgeschlossene Menge. F ist, als Relativraum betrachtet, bikompakt, folglich ist auch F^* bikompakt, also⁹⁾ in jedem größeren topologischen Raum, insbesondere auch in R^* , abgeschlossen, w. z. b. w.

V. Jeder durch eine stetige Zerlegung eines bikompakten topologischen Raumes R bestimmte Raum R^* ist ein topologischer Raum und folglich ein doppelstetiges Bild des Raumes R .

Dieser Satz folgt sofort aus der Normalität¹⁰⁾ aller bikompakten topologischen Räume. Aus den Sätzen I bis V folgt das zusammenfassende Ergebnis:

Diejenigen topologischen Räume, die stetige Bilder eines gegebenen bikompakten topologischen Raumes R sind, entsprechen eineindeutig den stetigen Zerlegungen des Raumes R und werden durch diese Zerlegungen, also allein durch Kenntnis des Raumes R selbst, vollkommen bestimmt¹¹⁾.

Da jeder kompakte metrische Raum bekanntlich bikompakt ist¹⁰⁾, so gelten letztere Resultate insbesondere für alle kompakten metrischen Räume R , deren Untersuchung wir uns jetzt zuwenden.

VI. Ein topologischer Raum, der stetiges Bild eines kompakten metrischen Raumes ist, ist auch selbst kompakt und metrisierbar¹²⁾.

13. Es sei, um VI zu beweisen, $R^* = f(R)$, und R ein kompakter metrischer Raum. Da wir R^* als topologischen Raum voraussetzen, brauchen wir zufolge des bekannten Urysohnschen-Metrisationssatzes nur zu beweisen, daß in R^* das zweite Abzählbarkeitsaxiom gilt.

Da R dem II. Abzählbarkeitsaxiom sicher genügt¹³⁾, so gibt es für R ein abzählbares Umgebungssystem

$$(8) \quad U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$$

und zufolge des Borel-Lébesgueschen Satzes ein abzählbares System von offenen Mengen

$$(9) \quad G_1, G_2, \dots, G_n, \dots,$$

⁹⁾ „Jeder bikompakte topologische Raum ist absolut abgeschlossen.“ (P. Alexandroff und P. Urysohn, Zur Theorie der topologischen Räume, Math. Ann. 92, S. 263.)

¹⁰⁾ Siehe die unter ⁹⁾ zitierte Arbeit. Ein topologischer Raum heißt normal, falls in ihm jede zwei abgeschlossene, zueinander fremde Mengen F_1 und F_2 durch ebenfalls fremde Gebiete $G_1 \supset F_1$, $G_2 \supset F_2$ voneinander trennbar sind.

¹¹⁾ Es sei nochmals betont, daß ich die Möglichkeit, letzteres Ergebnis in seiner vollen Allgemeinheit auszusprechen, der unter ⁸⁾ zitierten Bemerkung von Herrn Wedenissoff verdanke.

¹²⁾ Dagegen zeigt das Beispiel des § 11, daß ein allgemeiner abstrakter, nicht metrisierbarer Raum stetiges Bild eines kompakten metrischen Raumes sein kann.

¹³⁾ Hausdorff, S. 274.

die so beschaffen sind, daß es zu jedem Paare $F \subset G$, wo F eine abgeschlossene und G eine offene Teilmenge des Raumes R ist, wenigstens ein der Inklusion

$$(10) \quad F \subset G_n \subset G$$

genügendes Gebiet (9) gibt¹⁴).

Wir betrachten unter den Umgebungen $V(x^*)$, die im Beweise des Satzes II (§ 8) vorkommen, nur diejenigen, die der Vorschrift des § 3 gemäß, den Mengen (9) entsprechen. Es sollen diese $V(x^*)$ bzw.

$$(11) \quad V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$$

heißen. Um zu beweisen, daß die V_n dem ursprünglichen Umgebungssystem $\{U(x^*)\}$ des Raumes R^* (vgl. § 8) gleichwertig sind, braucht man nur wörtlich die Überlegungen des entsprechenden (End-) Teiles des § 8 zu wiederholen und dabei unter $U(x)$ eine in (8) vorkommende Umgebung U_n des Punktes x zu verstehen. Da die V_n nur in abzählbarer Menge vorhanden sind, so wird damit die Geltung des II. Abzählbarkeitsaxioms im Raume R^* , und folglich der ganze Satz VI bewiesen.

14. Wir schreiten jetzt zum Beweise des folgenden Satzes:

VII. *Jeder kompakte metrisierbare topologische Raum ist stetiges Bild einer beschränkten, nirgends dichten, abgeschlossenen Menge reeller Zahlen.*

Beweis. Es sei R ein den Voraussetzungen unseres Satzes genügender Raum, in dem wir uns eine feste Metrik eingeführt denken.

Es existiert dann (zufolge des Borel-Lebesgueschen Überdeckungssatzes) für jede natürliche Zahl m ein endliches System von Gebieten:

$$(12) \quad \mathfrak{F}_m = \{U_1^m, U_2^m, \dots, U_{\lambda_m}^m\},$$

die so beschaffen sind, daß

$$(13) \quad R = \sum_{i=1}^{\lambda_m} U_i^m \quad \text{und für jedes } i \leq \lambda_m \quad \delta(U_i^m) < \frac{1}{m}$$

ist.

Wir sagen nun, daß das endliche System natürlicher Zahlen

$$(14) \quad [i_1, i_2, \dots, i_m]$$

ausgezeichnet ist, falls für jedes $k \leq m$

$$(15) \quad i_k \leq \lambda_k$$

ist und die abgeschlossene Menge

$$(16) \quad F_{i_1 i_2 \dots i_m} = \prod_{k=1}^m \overline{U_{i_k}^k}$$

nicht leer ist.

¹⁴ Die G_n sind einfach die Vereinigungsmengen je endlich vieler unter den Mengen (8).

Nun bezeichnen wir durch Φ die Menge aller Irrationalzahlen ξ , deren Kettenbruchentwicklung

$$(17) \quad \xi = i_1 + \frac{1}{i_2 + \dots + \frac{1}{i_m + \dots}}$$

die Eigenschaft hat, daß für jedes m

$$[i_1, i_2, \dots, i_m]$$

ein ausgezeichnetes System ist.

Ich behaupte:

1°. Φ ist eine beschränkte abgeschlossene Menge reeller Zahlen (da außerdem Φ nur aus Irrationalzahlen besteht, so wird aus 1° folgen, daß Φ nirgends dicht ist).

2°. R ist ein stetiges Bild von Φ .

15. Da Φ eine Menge reeller Zahlen ist, so wird die Beschränktheit und Abgeschlossenheit von Φ gleichzeitig bewiesen, sobald wir zeigen, daß Φ in sich kompakt ist. Es genügt also zu konstatieren, daß jede abzählbare Teilmenge M von Φ wenigstens einen zu Φ gehörenden Häufungspunkt hat.

Es sei M eine solche Menge und

$$(18) \quad \xi_s = i_1^s + \frac{1}{i_2^s + \dots + \frac{1}{i_m^s + \dots}} \quad (s = 1, 2, \dots \text{ in infinitum})$$

ihre sämtlichen Elemente.

Da die Anzahl der verschiedenen Werte, die i_1^s annehmen kann, die feste Schranke λ_1 zufolge (15) nicht überschreiten kann, so gibt es eine solche natürliche Zahl i_1 , daß für unendlich viele s $i_1^s = i_1$ ist, d. h. daß die Kettenbruchentwicklung (18) für unendlich viele Zahlen ξ_s mit i_1 beginnt. Da jede dieser ξ_s zu Φ gehört, so ist $[i_1]$ ein (aus einem Elemente) bestehendes ausgezeichnetes System.

Es seien jetzt die natürlichen Zahlen i_1, i_2, \dots, i_m bereits in der Weise ausgewählt, daß es unter den Zahlen ξ_s unendlich viele gibt, deren Kettenbruchentwicklung (18) die i_1, i_2, \dots, i_m als die ersten m Teilnenner der Reihe nach besitzt; die Menge der soeben ausgewählten ξ_s werden wir durch M_m bezeichnen. Da $M_m \subset M \subset \Phi$ ist, so ist i_1, i_2, \dots, i_m ein ausgezeichnetes System.

Da die Anzahl der verschiedenen Werte, die i_{m+1}^s annehmen kann, endlich ist, so gibt es ein i_{m+1} , das mit i_{m+1}^s für unendlich viele $\xi_s \in M_m$

identisch ist, so daß wir eine unendliche Menge $M_{m+1} \subset M_m$ von Irrationalzahlen ξ_s haben, deren Kettenbruchentwicklung (18) mit

$$i_1 + \frac{1}{i_2} + \dots + \frac{1}{i_m} + \frac{1}{i_{m+1}}$$

beginnt. In dieser Weise fortfahrend, definieren wir für jedes m ein i_m unter der Bedingung, daß (14) ausgezeichnet ist und daß unendlich viele ξ_s mit

$$i_1 + \frac{1}{i_2} + \dots + \frac{1}{i_m}$$

beginnen. Dann ist aber die Irrationalzahl ξ , die durch (17) definiert ist, erstens ein Element der Menge Φ , zweitens ein Häufungspunkt der Menge M , womit die Behauptung 1° bewiesen ist.

16. Es bleibt uns übrig, 2° zu beweisen.

Es sei ξ ein beliebiges, durch (17) gegebenes Element von Φ . Dann ist (14) ausgezeichnet und also (16) nicht leer. Da

$$F_{i_1 i_2 \dots i_m} \supset F_{i_1 i_2 \dots i_{m+1}}$$

ist, so ist nach dem Cantorschen Durchschnittssatze die Menge

$$(19) \quad \prod_{m=1}^{\infty} F_{i_1 i_2 \dots i_m}$$

nicht leer. Sie kann aber nicht mehr als einen Punkt enthalten, weil für jedes m

$$\delta \left(\prod_{m=1}^{\infty} F_{i_1 i_2 \dots i_m} \right) \leq \delta (F_{i_1 i_2 \dots i_m}) \leq \delta (\bar{V}_{i_m}^m) < \frac{1}{m}$$

ist. Wir bezeichnen also den Punkt (19) des Raumes R durch x und setzen

$$(20) \quad x = f(\xi)$$

(wo ξ durch (17) gegeben ist).

In dieser Weise entspricht jedem Punkte $\xi \in \Phi$ ein einziger Punkt $x \in R$.

Umgekehrt aber entspricht zufolge (20) jedem Punkte $x \in R$ wenigstens ein Punkt $\xi \in \Phi$. In der Tat ist für jedes m der (willkürlich gegebene) Punkt $x \in R$ wenigstens in einer Menge $V_{i_m}^m$ enthalten. Indem man für jedes m eine beliebige dieser Mengen wählt, erhält man eine Folge natürlicher Zahlen i_m , für die die Relationen:

$$(21) \quad x \in \prod_{m=1}^{\infty} V_{i_m}^m \subset \prod_{m=1}^{\infty} \bar{V}_{i_m}^m = \prod_{m=1}^{\infty} F_{i_1 i_2 \dots i_m}$$

gelten.

Die Menge (16) ist also nicht leer, also ist (14) ausgezeichnet und der durch (17) definierte Punkt ξ gehört zu Φ . Aus (21) folgt alsdann, daß

$$x = f(\xi)$$

ist.

Wir erhalten also die eindeutige Abbildung

$$(22) \quad R = f(\Phi),$$

und es bleibt uns nur übrig zu beweisen, daß diese Abbildung eine stetige ist. Es sei zu diesem Zwecke ε eine beliebige positive Zahl und x ein beliebiger Punkt von R . Es sei weiter ξ ein der Gleichung (20) genügender Punkt von Φ .

Wir bezeichnen durch (17) die Kettenbruchentwicklung von ξ und wollen jetzt ein derartiges $\delta > 0$ angeben, daß

$$(23) \quad \varrho(x, z) < \varepsilon$$

ist, sobald

$$(24) \quad z = f(\zeta) \quad \text{und} \quad |\xi - \zeta| < \delta.$$

Es sei $m > \frac{1}{\varepsilon}$ und $J_{i_1 i_2 \dots i_m}$ die Menge aller Irrationalzahlen, deren Kettenbruchentwicklung mit

$$i_1 + \frac{1}{i_2} + \dots + \frac{1}{i_m}$$

anfängt. ξ gehört zu $J_{i_1 i_2 \dots i_m}$ und es gibt bekanntlich ein $\delta > 0$ von der Art, daß jede Irrationalzahl ζ , die sich von ξ weniger als um δ unterscheidet, zu $J_{i_1 i_2 \dots i_m}$ gehört. Wir wählen dieses δ und betrachten einen beliebigen, den Relationen (24) genügenden Punkt $z \in R$.

Dann ist zufolge der Definition der Abbildung $R = f(\Phi)$ z in der Menge $F_{i_1 i_2 \dots i_m}$, also a fortiori in $\bar{V}_{i_m}^m$ enthalten, und folglich (da auch $x \in \bar{V}_{i_m}^m$ ist) ist

$$\varrho(x, z) \leq \delta(\bar{V}_{i_m}^m) = \delta(V_{i_m}^m) < \frac{1}{m} < \varepsilon,$$

w. z. b. w.

Wir bemerken noch, daß aus der Stetigkeit der Abbildung $R = f(\Phi)$ in unserem Falle (zufolge den bekannten Hausdorffschen Sätzen^{14a)}) die gleichmäßige Stetigkeit folgt. Man kann also für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ finden, so daß aus

$$|\xi - \zeta| < \delta, \quad \xi \in \Phi, \quad \eta \in \Phi$$

^{14a)} Hausdorff, Kap. IX.

die Ungleichung

$$\varrho(f(\xi), f(\zeta)) < \varepsilon \text{ folgt}^{15)}$$

17. Bekanntlich ist jede beschränkte abgeschlossene nirgendsdichte Menge reeller Zahlen ein stetiges Bild einer¹⁶⁾, und folglich jeder beschränkten nirgendsdichten *perfekten* linearen Menge (also z. B. der Cantorschen „Dreiteilungsmenge“), man kann also die Sätze VI und VII folgendermaßen zusammenfassen:

Die Klasse der kompakten metrischen Räume ist topologisch mit der Klasse derjenigen topologischen Räume identisch, die eindeutige und stetige Bilder der Cantorschen perfekten Menge sind.

18. Für den Fall kompakter metrischer Räume^{16a)} läßt sich der Be-

¹⁵⁾ An den Satz VII knüpft sich noch folgende Bemerkung an. Indem man durch I_s^m die Menge aller Irrationalzahlen ξ bezeichnet, deren m^{ter} Teilnenner (in der Kettenbruchentwicklung (17)) gleich s ist, sieht man leicht ein, daß die, durch den Beweis des Satzes VII gelieferte, Abbildung (22) der Bedingung

$$(25) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \delta(f(\Phi \cdot I_s^m)) = 0$$

genügt (d. h. für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein genügend großes m_ε , so daß für *beliebiges* s und $m > m_\varepsilon$

$$\delta(f(\Phi \cdot I_s^m)) < \varepsilon$$

ist). Eine der soeben ausgesprochenen Bedingung genügende Abbildung wollen wir *absolut* stetig nennen. Wir führen noch folgende Bezeichnung ein. Falls E irgendwelche, aus Irrationalzahlen bestehende, Menge ist, so soll $N_m(E)$ die Menge aller derjenigen *natürlichen* Zahlen bedeuten, die als m^{te} Teilnenner der Kettenbruchentwicklung sämtlicher Elemente der Menge E vorkommen.

Dann bildet folgender Satz eine leichte Umformung eines Urysohnschen Überdeckungssatzes. (Siehe in diesem Bande den § 12 meiner Arbeit „Simpliziale Approximationen usw.“):

Jeder höchstens n -dimensionale kompakte metrische Raum R läßt sich als absolut stetiges Bild einer aus Irrationalzahlen bestehenden beschränkten abgeschlossenen Menge Φ derart darstellen, daß, falls man durch X irgendeine, sich in einen Punkt x von R abbildende Teilmenge von Φ bezeichnet, die Menge $N_m(X)$ für jedes m höchstens aus $n+1$ verschiedenen natürlichen Zahlen besteht.

Falls umgekehrt ein kompakter metrischer Raum R vorliegt, der sich unter Geltung der soeben ausgesprochenen Bedingung als absolut stetiges Bild einer, aus Irrationalzahlen bestehenden, beschränkten abgeschlossenen Menge darstellen läßt, so ist er höchstens n -dimensional.

Den Beweis dieses Satzes überlassen wir dem Leser.

¹⁶⁾ am einfachsten folgendermaßen entstehenden perfekten Menge: Man umgibt jeden isolierten Punkt x_n der gegebenen abgeschlossenen Menge F mit einem kleinen, keinen andern Punkt der Menge F enthaltenden Intervalle A_n und setzt dahin eine, x_n enthaltende, perfekte Menge P_n . Man definiert alsdann $P_F = F + \sum P_n$ und setzt $x = f(\xi) = \xi$, falls $\xi \in P_F$ gleichzeitig ein nicht isolierter Punkt von F ist, sonst aber: $x = f(\xi) = x_n$ (falls $\xi \in P_n$ ist). Dann ist $F = f(P_F)$ ein stetiges Bild von P_F .

^{16a)} und nur für diesen Fall: vgl. § 9.

griff der stetigen Zerlegung in eine andere Form bringen, die oft bequemer ist.

Wir erinnern uns zuerst an den Hausdorffschen Begriff der topologischen Konvergenz einer Mengenfolge: eine Mengenfolge heißt *konvergent*, wenn ihr oberer und unterer abgeschlossener Limes^{16 bis)} zusammenfallen (und dann den *topologischen Limes* der Mengenfolge bilden).

Wir können jetzt den Begriff der Stetigkeit der Zerlegung

$$(26) \quad R = \sum X$$

eines kompakten metrischen Raumes in zueinander fremde abgeschlossene Mengen X folgendermaßen formulieren:

Es sei

$$(27) \quad X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$$

irgendeine konvergente Folge der Mengen X (der Zerlegung (26)), und Φ der topologische Limes von (27). Dann soll Φ nur mit einer Menge X (der Zerlegung (26)) gemeinsame Punkte haben (und also in ihr enthalten sein).

19. Um die Äquivalenz der beiden Stetigkeitsbegriffe zu beweisen, setzen wir zuerst voraus, daß (26) eine im Sinne des § 4 stetige Zerlegung ist, und es habe Φ mit der Menge X_0 gemeinsame Punkte. Wir wollen zeigen, daß Φ zu jeder, von X_0 verschiedenen Menge X der Zerlegung (26) fremd ist. Es sei in der Tat X_* eine solche Menge. Da X_0 und X_* zueinander fremd sind, so gibt es ein X_0 enthaltendes, zu X_* fremdes Gebiet G_1 .

Wir dürfen voraussetzen (Normalität!), daß auch \bar{G}_1 zu X_* fremd ist. Es habe nun G_0 die im § 4 erwähnte Bedeutung. Fast alle X_n haben mit G_0 gemeinsame Punkte, sind also in G_1 und a fortiori in \bar{G}_1 enthalten; daraus folgt aber, daß auch Φ in \bar{G}_1 enthalten, d. h. zu X_* fremd ist.

20. Jetzt setzen wir umgekehrt voraus, daß die Zerlegung (26) im Sinne von § 18 stetig ist, und es sei die Stetigkeitsbedingung des § 4 nicht erfüllt.

Dann gibt es eine bestimmte Menge X_0 der Zerlegung (26) und ein diese Menge enthaltendes Gebiet G_1 derart, daß jedes in G_1 enthaltene, die Menge X_0 enthaltende Gebiet G_n ($n > 1$) mit einer aus G_1 herausragenden Menge $X^{(n)}$ wenigstens einen Punkt x_n gemeinsam hat.

^{16 bis)} Hausdorff, S. 236. Ein Punkt x gehört zum oberen abgeschlossenen Limes der Mengenfolge

$$M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$$

falls jede $U(x)$ Punkte unendlich vieler Mengen M_n enthält; x gehört zum unteren abgeschlossenen Limes, wenn jede $U(x)$ Punkte fast aller M_n enthält.

Es sei jetzt

$$G_n = S\left(X_0, \frac{\varepsilon}{n-1}\right) \quad (n = 2, 3, \dots, \text{in inf.}),$$

wobei $\varepsilon = \rho(X_0, R - G_1)$ gesetzt ist.

Die Folge aller $X^{(n)}$ enthält eine konvergente Teilfolge

$$(26) \quad X^{(n_1)}, X^{(n_2)}, \dots, X^{(n_k)}, \dots,$$

deren topologischer Limes Φ , zufolge der Relation

$$X^{(n_k)} \cdot G_{n_k} = X^{n_k} \cdot S\left(X_0, \frac{\varepsilon}{n_k-1}\right) \supset x_{n_k} \neq 0$$

sicher mit X_0 gemeinsame Punkte hat.

Andrerseits ist aber

$$X^{(n_k)} \cdot (R - G_1) \neq 0 \quad (\text{für jedes } k),$$

also auch

$$\Phi \cdot (R - G_1) \neq 0,$$

so daß Φ unmöglich in X_0 enthalten sein kann, und folglich, im Widerspruche mit der Bedingung des § 18, wenigstens mit zwei verschiedenen Mengen X der Zerlegung (26) gemeinsame Punkte hat.

Die Äquivalenz der beiden Stetigkeitsdefinitionen ist hiermit für jede Zerlegung eines kompakten metrischen Raumes bewiesen.

Wir werden in einem Augenblicke von der zweiten Form des Stetigkeitsbegriffes Gebrauch machen.

21. Das Hauptresultat dieser Arbeit läßt sich folgendermaßen formulieren:

Jeder kompakte metrisierbare topologische Raum wird durch eine stetige Zerlegung der Cantorschen perfekten Menge induziert; auch umgekehrt induziert jede stetige Zerlegung der Cantorschen perfekten Menge (allgemeiner: eines beliebigen kompakten metrischen Raumes) stets einen kompakten metrisierbaren Raum.

Mit anderen Worten: „einen kompakten metrisierbaren Raum angeben“ heißt dasselbe wie „eine stetige Zerlegung der Cantorschen Menge bestimmen“. Dadurch wird aber der wesentlichste Teil der mengentheoretischen Topologie¹⁷⁾ wieder auf den alten Boden des elementaren

¹⁷⁾ der ja eben in der Untersuchung der kompakten und in kleinen kompakten Räumen besteht. Vgl. hierzu Paul Urysohn, Mémoire sur les multiplicités cantorienes, I, Introduction, n° 6–9 (Fund. Math. 7, S. 38–42, insbes. Fußnote ³⁾ auf der Seite 41).

Es sei noch bemerkt, daß jeder im kleinen kompakte metrisierbare Raum R aus *einem einzigen, durch R vollständig bestimmten, bikompakten Raume \tilde{R}* durch Weglassung eines einzigen Punktes topologisch entsteht. \tilde{R} ist dabei dann und nur dann metrisierbar, falls in R eine abzählbare Menge dicht ist (was ja bei dieser ganzen Fragestellung auch immer vorausgesetzt werden darf). (Siehe über alle diese Fragen meine Arbeit „Über Metrisation der im kleinen kompakten top. Räume“, Math. Ann. 92, S. 294–301).

Diskontinuums zurückgeführt, was insbesondere für Grundlagenprobleme von einer prinzipiellen Bedeutung sein dürfte.

22. Die in dieser Arbeit gewonnenen Gesichtspunkte erlauben das allgemeine Problem über die topologischen Eigenschaften stetiger Zerlegungen kompakter metrischer Räume zu stellen, oder, was dasselbe ist, das Problem über topologische Eigenschaften derjenigen (in einem kompakten metrischen Raume gelegenen) *Systeme von abgeschlossenen Mengen*, deren Vereinigungsmengen wieder abgeschlossen sind. Wie man sofort sieht, lassen sich manche klassische, sowie moderne topologische Fragen in diese allgemeine Problemstellung einordnen.

Um sich auf das einfachste Beispiel zu beschränken, nennen wir eine stetige Zerlegung

$$(29) \quad R = \sum X$$

eines kompakten metrischen Raumes n -dimensional, falls der durch diese Zerlegung induzierte Raum R^* n -dimensional ist¹⁸).

Folgende Frage scheint mir von grundlegender Bedeutung zu sein:

Was läßt sich über die Dimension eines kompakten metrischen Raumes R aussagen, für den eine n -dimensionale Zerlegung in lauter m -dimensionale abgeschlossene Mengen X vorliegt? (Die plausible Antwort wäre, daß $\dim R \leq m + n$ ist.)

23. Schon die Lösung dieses Problems für den Fall $n = 0$ ¹⁹) dürfte ein selbständiges Interesse darbieten, wie man z. B. aus folgendem Satze erkennt:

VIII. *Die Zerlegung eines kompakten metrischen Raumes in seine sämtlichen Komponenten ist eine stetige nulldimensionale Zerlegung.*

Es sei in der Tat R ein kompakter metrischer Raum, und es seien die X sämtliche Komponenten des Raumes R . Zuerst beweisen wir, daß die Zerlegung (29) stetig ist, und wenden zu diesem Zweck die zweite Form (§ 18) der Stetigkeitsdefinition an.

Es sei

$$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$$

eine konvergente Folge von Komponenten des Raumes R und Φ der topologische Limes dieser Folge. Falls die Menge Φ , die abgeschlossen und zusammenhängend ist, mit der Komponente X_0 gemeinsame Punkte hat, so ist notwendigerweise $\Phi \subset X_0$ (weil sonst $X_0 + \Phi$ eine von X_0 verschiedene,

¹⁸) So ist z. B. die Zerlegung der Kugelfläche in Parallelkreise + Nordpol + Südpol, oder die Zerlegung der Torusfläche in Parallelkreise eine stetige 1-dimensionale Zerlegung.

¹⁹) die soeben von Herrn Tamarkin in Moskau erbracht ist (Proceed. Ak. Amsterdam 28 (Nr. 10), S. 1000 u. f.), wodurch meine Vermutung sich für den Fall $n = 0$ als richtig erwiesen hat.

letztere Menge enthaltende, zusammenhängende Menge wäre, was der Eigenschaft von X_0 , eine Komponente zu sein, widerspricht).

Die Zerlegung (29) ist also stetig, folglich ist der durch die Zerlegung bestimmte Raum R^* ein stetiges Bild von R ,

$$R^* = f(R).$$

Da R^* ein kompakter Raum ist, so bleibt uns nur noch übrig zu zeigen, daß R^* kein Kontinuum enthält, d. h. daß jede, mehr als einen Punkt enthaltende, abgeschlossene Teilmenge F^* von R^* sich in zwei zueinander fremde abgeschlossene Mengen F_1^* und F_2^* zerlegen läßt.

Es sei F die Menge $f^{-1}(F^*)$ (vgl. § 2). F ist eine abgeschlossene, mehr als aus einer Komponente bestehende Teilmenge von R und zerfällt daher in zwei zueinander fremde abgeschlossene Mengen F_1 und F_2 .

Dann sind aber in unserem Falle $F_1^* = f(F_1)$ und $F_2^* = f(F_2)$ ebenfalls zueinander fremd und abgeschlossen, und da außerdem

$$F^* = F_1^* + F_2^*$$

ist, so ist unser Satz bewiesen.

Es sei hierzu noch bemerkt, daß aus dem soeben bewiesenen Satze die bekannten Brouwerschen Sätze über die Struktur der abgeschlossenen Mengen²⁰⁾ ohne weiteres folgen. Derselbe Satz steht auch zu einem Satze von Hausdorff²¹⁾ in enger Beziehung.

Blaricum bei Amsterdam, November 1925.

²⁰⁾ Nämlich die Sätze 1, 2, 3, 4 der ersten und der Satz 3 der zweiten Mitteilung „Over de structuur der perfecte puntverzamelingen (Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam 1910, S. 833–842 und 1911, S. 1416–1426, beides holländische Ausgabe).

²¹⁾ op. cit. S. 304, Satz XI.

(Eingegangen am 11. 12. 1925.)

Zusatz bei der Korrektur: Wie ich soeben ersehe, behandelt Herr R. L. Moore in seiner Arbeit: „Concerning upper semicontinuous collections of continua (Amer. Trans. 27 (1925), S. 416–428) einen Begriff, der sich mit dem obigen Begriff der stetigen Zerlegungen für den Fall *metrischer Räume* mit *Kontinuen* als Zerlegungseinheiten im wesentlichen deckt. Da sich aber Herr Moore a. a. O. auf ebene Kontinua beschränkt, so kommen seine Resultate mit den meinigen nicht weiter in Berührung.