Über reguläre Baumkurven.

Von

Karl Menger in Amsterdam.

1. Die kurventheoretischen Grundlagen. Wir bezeichnen als *reguläre Baumkurve* oder kurz als *Baum* (in Verallgemeinerung einer Ausdrucksweise der kombinatorischen Topologie) ein kompaktes stetig durchlaufbares Kontinuum („ligne de Jordan"), welches keine einfache geschlossene Kurve (d. h. kein topologisches Bild einer Kreislinie) als Teil enthält [1]). Die Untersuchung der Bäume ist aus zwei Gründen von einem gewissen Interesse: erstens nehmen die Bäume unter den Kurven eine Stellung ein analog jener der Kurven unter den allgemeinen Kontinua [2]) und besitzen daher einige an sich bemerkenswerte Eigenschaften; zweitens können hinsichtlich der Bäume einige allgemeine kurventheoretische Fragen beantwortet werden, deren Lösung für andere Kurven eigenartige, bisher unüberwundene Schwierigkeiten entgegenstehen.

Als *Kurve* wird in der allgemeinen Kurventheorie [3]) ein Kontinuum bezeichnet, zu dessen sämtlichen Punkten beliebig kleine Umgebungen

[1]) Auf diese Klasse von Kontinua wurde wohl zuerst von Mazurkiewicz, Fund. Math. **2** (1921), S. 119 hingewiesen. — W. Scherrer, Math. Zeitschrift **24** (1925), S. 125, behandelt sie unter dem Namen „ungeschlossene stetige Kurve" und beweist insbesondere, daß jede topologische Abbildung eines Baumes auf sich selbst oder auf ein Teilkontinuum mindestens einen Fixpunkt hat. — Einige Sätze über Bäume, die sich mit denen des § 5 der vorliegenden Arbeit teilweise berühren, fand ich nach Abschluß dieser Arbeit bei R. L. Wilder, Fund. Math. **7** (1925), S. 358 ff.

[2]) Vgl. meinen Bericht über die Dimensionstheorie, (Kap. IV) Jahresber. d. deutsch. Math. Ver. 1926.

[3]) Vgl. meine Grundzüge einer Theorie der Kurven, Proc. Ac. Amsterdam **28** (1925), S. 67 und Math. Annalen **95** (1925), S. 277 (im folgenden zitiert als „Kurven") und Urysohn, Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes, II. Teil, welcher demnächst in den Verh. d. Ak. Amsterdam erscheint im Anschluß an eine Note in den C. R. **175** (1922), S. 481. — Der Kurvenbegriff, die Begriffe des End- und Verzweigungspunktes, sowie einige kurventheoretische Sätze finden sich auch in einer in den Proc. Ac. Amsterdam **29** (1926) abgedruckten Note von mir aus dem Jahre 1921.

mit diskontinuierlichen Begrenzungen existieren. Der Punkt p eines Kontinuums wird *regulär* genannt, wenn beliebig kleine Umgebungen von p mit endlichen Begrenzungen existieren. p heißt insbesondere von *höchstens n-ter Ordnung*, wenn beliebig kleine Umgebungen von p existieren, deren Begrenzungen höchstens n Punkte enthalten, während reguläre Punkte, die von keiner bestimmten endlichen Ordnung sind, von der Ordnung w oder von *wachsender Ordnung* heißen. Ein kompaktes Kontinuum, welches nur reguläre Punkte enthält, heißt *reguläre Kurve*. Die Punkte zweiter Ordnung einer regulären Kurve nennen wir *gewöhnliche Punkte*, die Punkte erster Ordnung *Endpunkte*, die Punkte von höherer als zweiter Ordnung *Verzweigungspunkte*.

Zunächst sieht man, *daß jede reguläre Baumkurve*, d. h. jedes kompakte stetig durchlaufbare Kontinuum ohne geschlossene Teilkurve, auch wirklich *eine reguläre Kurve* im eben angeführten Sinn der Kurventheorie *ist*. Man bestätigt nämlich leicht [4]), daß jedes Teilkontinuum eines Baumes stetig durchlaufbar ist, woraus sich (da bekanntlich in einem stetig durchlaufbaren Kontinuum je zwei Punkte durch einen Bogen verbunden werden können) ergibt, daß je zwei Teilkontinua eines Baumes einen leeren oder einen zusammenhängenden Durchschnitt haben [4a]). Daraus folgt vor allem, daß jeder reguläre Baum B eine *Kurve* ist. Sonst gäbe es ja einen Punkt p von B und eine Umgebung U von p, so daß die Begrenzung jeder kleineren Umgebung von p Kontinua enthält. Sei dann V eine zusammenhängende Umgebung von p innerhalb von U (eine solche existiert, weil B stetig durchlaufbar ist) und seien a und b zwei Punkte eines Teilkontinuums (a, b) der Begrenzung von V. Wir könnten dann innerhalb von V zwei Punkte a' und b' so nahe an a bzw. b wählen, daß zwei zueinander fremde Teilkontinua von $\overline{V}$, (a, a') und (b, b') existieren. Verbinden wir sodann die Punkte a' und b' durch ein Kontinuum (a', b'), das ganz im Innern von V liegt, — dann hätten die beiden Kontinua $(a, a') + (a, b) + (b, b')$ und (a', b') einen nichtzusammenhängenden Durchschnitt, was unmöglich ist, weil B ein Baum ist. B ist also eine Kurve und zwar eine stetig durchlaufbare; B zerfällt daher nach einem Satz der Kurventheorie [5]) für jedes $\varepsilon > 0$ in endlich viele Teilkontinua $< \varepsilon$, die zu je zweien dis-

---

[4]) Vgl. Mazurkiewicz, a. a. O. S. 123.

[4a]) Angenommen nämlich, zwei Teilkontinua K_1 und K_2 hätten einen nicht zusammenhängenden Durchschnitt, dann könnte man zwei Punkte p und q in verschiedenen Komponenten von $K_1 \cdot K_2$ wählen und durch zwei Teilbögen verbinden, von denen der eine in K_1, der andere in K_2 liegt. Der Durchschnitt dieser zwei Bögen wäre nicht zusammenhängend, also enthielte ihre Summe einen topologischen Kreis, was unmöglich ist.

[5]) Vgl. Kurven S. 296 ff.

kontinuierliche Durchschnitte haben. Da aber diese Durchschnitte nach dem oben Bewiesenen leer oder zusammenhängend sind, so enthalten sie höchstens je einen Punkt. Als Summe beliebig kleiner Teilkontinua mit endlichen Durchschnitten, ist also B nach einem kurventheoretischen Satz[5a]) eine *reguläre* Kurve, wie behauptet. — Da ferner in der allgemeinen Kurventheorie gezeigt wird, daß jede reguläre Kurve stetig durchlaufbar ist[5b]), so sehen wir, daß es auf dasselbe hinauskommt, ob wir die regulären Bäume definieren als *die stetig durchlaufbaren Kontinua ohne geschlossene Teilkurve* oder als *die regulären Kurven ohne geschlossene Teilkurve.*

2. Die Bedeutung der Ordnungszahl für Punkte eines Baumes geht aus folgendem Satz hervor: *Ist der Punkt p des Baumes B von der Ordnung n, so ist n die Anzahl der Teilbögen von B, die in p zusammenstoßen,* d. h. es lassen sich n und nicht mehr als n in p endende und sonst fremde Teilbögen aus B herausgreifen. *Zugleich ist n die Anzahl der Stücke, in die B nach Tilgung von p zerfällt,* oder, wie wir dies auch ausdrücken können, die Komponentenzahl von $B - p$. *In den Punkten von der Ordnung ω stoßen abzählbar viele Bögen mit gegen Null konvergierenden Durchmessern zusammen; nach Tilgung eines Punktes der Ordnung ω zerfällt der Baum in abzählbar viele Komponenten mit gegen Null konvergierenden Durchmessern*[5c]).

Sei zum Beweise p ein Punkt n-ter Ordnung eines Baumes B. Mehr als n Teilbögen, die in p enden und sonst fremd sind, kann B offenbar nicht enthalten. Wir haben zu zeigen, daß sich aus B wirklich n in p zusammenstoßende Bögen herausgreifen lassen. Dazu betrachten wir eine Umgebung U von p, deren Begrenzung genau n Punkte $q_1, q_2, \ldots, q_n$ enthält und die so klein ist, daß die Begrenzung jeder Teilumgebung von p mindestens n Punkte enthält. Wegen der letzteren Voraussetzung ist die abgeschlossene Hülle $\overline{U}$ von U offenbar ein Kontinuum und daher als

[5a]) Vgl. Kurven S. 300.

[5b]) Vgl. Kurven S. 300.

[5c]) (Zusatz bei der Korrektur.) Über die erste Hälfte dieses Satzes, welche von dem Zusammenstoßen von Bögen in Baumpunkten handelt, vgl. bereits Kurven S. 302 f. Die Aussage betrifft das Verhalten von Bäumen in der Nachbarschaft ihrer Punkte und gilt daher selbstverständlich von jedem *Baum im kleinen*, d. h. von jeder Menge, die zu jedem ihrer Punkte eine Umgebung enthält, deren abgeschlossene Hülle ein Baum ist. In der Form einer Aussage über Bäume im kleinen findet sich dieser Satz, sowie der Satz von § 4 der vorliegenden Arbeit, wie ich während der Drucklegung ersehe, auch bei P. Alexandroff (Über kombinatorische Eigenschaften allgemeiner Kurven, V. Abschnitt, in diesen Annalen), wo reguläre Kurven, die Bäume im kleinen sind, als „endlich hoch zusammenhängende stetige Kurven“ bezeichnet werden.

Teil eines Baumes stetig durchlaufbar. $\overline{U}$ enthält also je einen einfachen Bogen zwischen p und jedem der Punkte q_i. Wir haben nur noch nachzuweisen, daß diese Bögen zu je zweien bloß den Punkt p gemein haben. Hätten nun aber etwa die Bögen, welche p mit q_1 und q_2 verbinden, einen Punkt $q \neq p$ gemein, so betrachten wir das Komplement der $n-1$ Punkte $q, q_3, q_4, \ldots, q_n$. Die p enthaltende Komponente desselben wäre mit Rücksicht auf die Baumnatur von B eine Umgebung von $p < U$, was unserer Voraussetzung widersprechen würde. Ganz analog läßt sich die Behauptung für die Punkte der Ordnung w beweisen[6]). — Tilgen wir nun einen Punkt n-ter Ordnung von B, so zerfällt der Rest offenbar in mindestens n Komponenten; denn $B-p$ enthält ja, wie eben nachgewiesen, n Bögen ohne ihren einen gemeinsamen Endpunkt, und gehörten zwei von diesen Bögen zu derselben Komponente, so ließe sich sofort eine geschlossene Teilkurve von B angeben. Andererseits enthält $B-p$ auch nur n Komponenten. Denn $B-p$ ist eine in B offene Menge; die Komponenten von $B-p$ sind daher[7]) offene zusammenhängende Mengen; die abgeschlossenen Hüllen dieser Komponenten sind Kontinua; jedes dieser Kontinua enthält einen in p endenden Bogen, und da es nicht mehr als n solcher Bögen geben kann, so kann $B-p$ nicht mehr als n Komponenten enthalten.

3. Einige Charakterisierungen der Bäume. *Damit eine reguläre Kurve B ein Baum sei, ist jede einzelne der folgenden Eigenschaften notwendig und hinreichend*:

a) *Je zwei nicht fremde Teilkontinua von B haben einen zusammenhängenden Durchschnitt*;

b) *je zwei fremde Teilkontinua von B können durch einen Punkt getrennt werden*;

c) *jeder Punkt von höherer als erster Ordnung zerlegt B*;

d) *zu je zwei Punkten von B existiert ein einziger Teilbogen von B mit den beiden Punkten als Endpunkten*;

e) *jedes Teilkontinuum von B enthält mindestens zwei Endpunkte.*

Daß je zwei nicht fremde Teilkontinua eines Baumes einen zusammenhängenden Durchschnitt haben, wurde bereits erwähnt, und daß dies für eine Kurve, welche einen topologischen Kreis als Teil enthält, nicht zutrifft, ist klar. — Daß jeder Punkt von höherer als erster Ordnung einen

---

[6]) Das entsprechende Problem, ob in jedem Punkt n-ter Ordnung einer beliebigen regulären Kurve n Teilbögen zusammenstoßen (vgl. Kurven S. 302), ist für $n=2$ von Kuratowski in positivem Sinn entschieden worden, im allgemeinen aber noch unerledigt.

[7]) Vgl. Kuratowski, Fund. Math. **1**, S. 43; Hahn, Fund. Math. **2**, S. 189.

Baum zerlegt, wurde oben unter 2. bewiesen; enthält andererseits eine Kurve C einen topologischen Kreis, so liegen auf demselben höchstens abzählbar viele C zerlegende Punkte[8]), also sicher ein C nicht zerlegender Punkt, der offenbar von mindestens zweiter Ordnung ist. — Seien nun K_1 und K_2 zwei fremde Teilkontinua von B. Wir verbinden K_1 und K_2 durch einen Bogen und betrachten sodann einen K_1 und K_2 verbindenden Teilbogen dieses Bogens, welcher, abgesehen von seinen Endpunkten, zu $K_1 + K_2$ fremd ist. Tilgen wir irgendeinen Punkt p dieses Bogens, so zerfällt B, und zwar so, daß K_1 und K_2 nicht zu derselben Komponente gehören. K_1 und K_2 sind also durch den Punkt p getrennt. Enthält andererseits eine Kurve einen topologischen Kreis, so enthält sie offenbar auch zwei zueinander fremde Teilkontinua (nämlich irgend zwei zueinander fremde Teilbögen des topologischen Kreises), die nicht durch einen Punkt getrennt werden können. — Der Beweis von d) liegt auf der Hand. — Zum Beweise von e) verwenden wir den Satz von Mazurkiewicz[9]), daß jedes stetig durchlaufbare Kontinuum mindestens zwei Punkte enthält, durch die das Kontinuum nicht zerlegt wird. Auch jedes Teilkontinuum eines Baumes muß also mindestens zwei solche Punkte enthalten, besitzt folglich, da ein Baum durch jeden Punkt von höherer als erster Ordnung zerlegt wird, (in bezug auf sich selbst) zwei Endpunkte. Enthält andererseits ein Kontinuum einen topologischen Kreis, so ist das eine Teilkurve ohne Endpunkt. Damit ist unser Satz bewiesen.

4. Über die Struktur der Bäume. *Jeder Baum B setzt sich zusammen aus einer abzählbaren Menge von Verzweigungspunkten ${}^2B$, aus der Menge B^2 aller gewöhnlichen Punkte, die von der Mächtigkeit des Kontinuums und in B dicht ist, und aus einer diskontinuierlichen Menge B^1 von Endpunkten, die abzählbar oder von der Mächtigkeit des Kontinuums ist.*

Wir stützen den Beweis auf zwei Hilfssätze. H_1: Jeder Teilbogen eines Baumes B enthält höchstens abzählbar viele Verzweigungspunkte von B. Sei nämlich C ein Teilbogen von B, p ein Punkt von $C \cdot {}^2B$. Die Menge $B - p$ enthält mindestens drei Komponenten, von denen mindestens eine zu C fremd ist. Die abgeschlossene Hülle dieser Komponente enthält, als Teilkurve eines Baumes, mindestens zwei Endpunkte, also mindestens einen Endpunkt $\neq p$. Einen dieser Endpunkte ordnen wir unter dem Namen $e(p)$ dem Punkt p zu[10]). Für $p \neq q$ ist dann

[8]) Vgl. Mazurkiewicz, a. a. O. S. 119.

[9]) a. a. O.

[10]) Von hier ab verläuft der Beweis des Hilfssatzes H_1 analog dem Mazurkiewiczschen Beweis des Satzes, daß auf jedem topologischen Teilkreis eines stetig durchlaufbaren Kontinuums höchstens abzählbar viele Punkte liegen, die das Kontinuum zerlegen. (A. a. O. S. 120.)

stets $e(p) \neq e(q)$, also ist die Mächtigkeit von $C \cdot {}^2B$ nicht größer als die Mächtigkeit der Menge aller $e(p)$. Um zu zeigen, daß diese letztere Menge abzählbar ist, weisen wir nach, daß sie keinen ihrer Häufungspunkte enthält. Wir leiten zu diesem Zweck aus der Annahme, daß der Punkt $e(p)$ Häufungspunkt von den Punkten $e(p_n)$ ist, einen Widerspruch her, und zwar in folgender Weise: Jeder der Punkte $e(p_n)$ ist nur durch einen einzigen Teilbogen von B mit $e(p)$ verbunden, und jeder dieser Bögen muß den Punkt p enthalten. Also sind, wenn r den Abstand der Punkte p und $e(p)$ bezeichnet, alle Punkte $e(p_n)$ mit $e(p)$ bloß durch ein Teilkontinuum von B verbunden, dessen Durchmesser $> r$ ist. Dies aber widerspricht, da $e(p)$ Häufungspunkt der $e(p_n)$ ist, dem Zusammenhang im kleinen von B. Damit ist Hilfssatz H_1 bewiesen.

Sei nun E eine in B^1 dichte Teilmenge von B^1, p ein Punkt von höherer als erster Ordnung, oder, wie wir auch sagen, ein Punkt von ${}^1B$. Wenn M eine Komponente von $B - p$ ist, so enthält die abgeschlossene Hülle $\overline{M} = M + p$ von M, als Teilkurve des Baumes B, mindestens zwei Endpunkte, also mindestens einen Endpunkt $\neq p$, der auch Endpunkt von B sein muß, — und folglich auch mindestens einen Punkt von E, da diese Menge in B^1 dicht ist. Es enthält daher die abgeschlossene Hülle jeder Komponente von $B - p$ auch einen Bogen, welcher p mit einem Punkt von E verbindet. Berücksichtigen wir, daß $B - p$ mindestens zwei Komponenten enthält, so haben wir bewiesen Hilfssatz H_2: Ist B ein Baum, E eine im Endkern B^1 von B dichte Teilmenge von B^1, dann liegt jeder Punkt von ${}^1B$ auf mindestens einem Teilbogen von B, der zwei Punkte von E verbindet.

Da für E eine abzählbare Menge gewählt werden kann, folgt aus H_2 die Existenz abzählbar vieler Teilbögen von B, in deren Summe ${}^1B$, also a fortiori ${}^2B$ enthalten ist. Nach H_1 enthält jeder dieser Bögen höchstens abzählbar viele Verzweigungspunkte von B, also ist die Menge ${}^2B$ abzählbar.

Die Menge der gewöhnlichen Punkte eines Baumes liegt im Baum dicht und hat die Mächtigkeit des Kontinuums. Denn je zwei Baumpunkte sind ja durch einen Bogen verbunden, der eine Menge der Mächtigkeit des Kontinuums von gewöhnlichen Punkten enthalten muß, da er nur abzählbar viele Verzweigungspunkte des Baumes enthält[11]). — Daß schließlich der Endkern eines Baumes die Mächtigkeit des Kontinuums besitzen kann, geht aus dem Urysohnschen Beispiel einer Kurve hervor, die in den Punkten einer linearen perfekten, nirgends dichten Cantorschen

[11]) Reguläre Kurven, die nicht Bäume sind, enthalten bekanntlich bisweilen überhaupt keine gewöhnlichen Punkte, vgl. das in Kurven S. 302 angeführte Beispiel von Sierpiński, Comptes Rendus **160** (1915), S. 302.

Menge Endpunkte und sonst nur Punkte von zweiter und dritter Ordnung enthält und, wie man unmittelbar sieht, ein Baum ist[11a]).

5. Bäume und Bogensummen. *Jeder Baum B ist Summe eines Semikontinuums S, bestehend aus abzählbar vielen Bögen, deren jeder zwei Endpunkte des Baumes verbindet, und einer zu S fremden Menge T, die ausschließlich Endpunkte des Baumes enthält. Die Menge T kann leer angenommen werden, wenn B^1 abzählbar ist, und ist von der Mächtigkeit des Kontinuums, wenn B^1 unabzählbar ist. Ein Baum*[11b]) *ist Summe abzählbar vieler Bögen dann und nur dann, wenn er bloß abzählbar viele Endpunkte enthält; er ist Summe endlich vieler Bögen dann und nur dann, wenn er endlich viele Endpunkte enthält.*

Zum Beweise betrachten wir eine abzählbare, in B^1 dichte Teilmenge E von B^1. Wir wählen irgendeinen Punkt von B^1 und verbinden ihn mit jedem Punkt der (auf Grund des oben Bewiesenen abzählbaren) Menge $E + {}^2B$ durch je einen Bogen. Die Summe dieser abzählbar vielen Bögen bildet ein Semikontinuum S. Wir zeigen, daß $B - S < B^1$ ist, und leiten zu diesem Zweck einen Widerspruch her aus der Annahme, es existiere ein Punkt p von ${}^1B \cdot (B - S)$. In der Tat, als Punkt von ${}^1B$ müßte ein solcher Punkt auf einem Bogen C zwischen zwei Punkten e_1 und e_2 von E liegen. Als Punkte des Semikontinuums S wären aber e_1 und e_2 auch durch einen Teilbogen von S verbunden, der von C verschieden ist, da er den Punkt p nicht enthält. Das aber widerspricht der Baumnatur von B. – Wenn B^1 abzählbar ist, können wir $E = B^1$ setzen und haben eine Zerlegung von B in abzählbar viele Bögen. Ist B^1 von der Mächtigkeit des Kontinuums, so kann B offenbar nicht als Summe abzählbar vieler Bögen dargestellt werden, denn jeder Endpunkt von B müßte Endpunkt eines der abzählbar vielen Bögen sein und jeder Bogen enthält nur zwei Endpunkte[12]). Ist B^1 endlich, dann ist, wie man leicht einsieht,

---

[11a]) Diese Kurve ist in der Cartesischen Ebene die abgeschlossene Hülle der Summe aller Strecken, von denen der eine Endpunkt die Koordinaten hat $\xi = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k \cdot 2 \cdot 3^{-k}$, $\eta = 3^{-k}$ und deren anderer Endpunkt die Koordinaten hat $\xi' = \xi + \varepsilon_{k+1} \cdot 2 \cdot 3^{-k-1}$ und $\eta' = 3^{-k-1}$, wo $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\varepsilon_0 = 0$, und für $k > 0$ ε_k entweder $+1$ oder -1 ist.

[11b]) (Zusatz bei der Korrektur.) und daher natürlich auch ein *kompakter Baum im kleinen* (vgl. oben [5c])).

[12]) Das allgemeine Problem der Charakterisierung jener regulären Kurven, die Summe vom abzählbar vielen einfachen Bögen sind, ist noch ungelöst. Abzählbarkeit des Endkernes ist eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung. Abzählbarkeit der Menge aller nicht-gewöhnlichen Punkte ist, wie ich hier erwähnen möchte, für die Zerspaltbarkeit der Kurve in Bögen weder notwendig noch hinreichend.

auch ${}^2B$ endlich und B ist nach Sätzen der allgemeinen Kurventheorie[12a]) darstellbar als Summe von endlich vielen Bögen.

6. Über die Plättbarkeit der Bäume. Es gilt der Satz[13]): *Jeder reguläre Baum ist mit einem ebenen Kontinuum homöomorph.*

Wir schicken dem Beweis einige Hilfsüberlegungen voraus. Seien $b_1, b_2, \ldots, b_n$ n feste Punkte des Baumes B; (b_i, b_k) bezeichne den einzigen Teilbogen von B, der in b_i und b_k endet. Ist P ein einfaches Polygon (= ein ebenes Polygon, welches topologisches Bild einer Kreislinie ist), dann nennen wir n Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n$ von P zu den b_i hinsichtlich B *isomorph*, wenn eine zur Bogensumme $S = \sum\limits_{i,k=1}^{n} (b_i, b_k)$ homöomorphe Menge $A(S) = \sum\limits_{i,k=1}^{n} (p_i, p_k)$ existiert, die, abgesehen von den Punkten $p_i = A(b_i)$, ganz im Inneren des Bereiches (P) von P liegt. Daß zu jedem $B, b_1, b_2, \ldots, b_n$ auf jedem vorgelegten einfachen Polygon n zu den b_i hinsichtlich B isomorphe Punkte angebbar sind, wobei noch die Bögen (p_i, p_k) als Streckenzüge angenommen werden können, — das ergibt sich unmittelbar durch Induktion nach n.

Nun gilt folgender Hilfssatz: Seien $b_1, b_2, \ldots, b_n$ n feste Punkte des Baumes B; sei ferner $P, p_1, p_2, \ldots, p_n$ ein zu $B, b_1, b_2, \ldots, b_n$ isomorphes einfaches Polygon und sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann kann B als Summe endlich vieler Kontinua $< \varepsilon$, $B_1, B_2, \ldots, B_m$, dargestellt werden, die zu je zweien höchstens einen Punkt gemein haben und zu denen in P ein isologes System $P_1, P_2, \ldots, P_m$ von Polygonen $< \varepsilon$ existiert. Dabei sagen wir von einem System P_i, es sei zu den B_i *isolog*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: „Je zwei von den P_i haben höchstens einen Punkt gemein, und zwar haben P_i und P_k dann und nur dann einen Punkt, p_{ik}, gemein, wenn B_i und B_k einen Punkt, b_{ik}, gemein haben. P_i hat mit P den Punkt p_k dann und nur dann gemein, wenn B_i den Punkt b_k enthält. Abgesehen von den Punkten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ liegen alle P_i im Inneren von (P); je zwei Bereiche (P_i) und (P_k) sind zueinander fremd. Die auf P_i gelegenen Punkte p_{ik} und p_k liegen hinsichtlich B_i zu den entsprechenden Punkten b_{ik} und b_k isomorph".

Für $n < 2$ kann zu jeder Zerlegung von B ein isologes System von Polygonen $< \varepsilon$ sehr einfach konstruiert werden durch entsprechendes Aneinanderheften von zu den B_i isomorphen und nach Bedarf verkleinerten

[12a]) Vgl. Kurven S. 304.

[13]) Er wird in der Arbeit von Mazurkiewicz als wahrscheinlich bezeichnet. Herrn P. Alexandroff verdanke ich wertvolle Anregungen zur Beschäftigung mit diesem Problem.

Polygonen. Nähere Angaben sind erforderlich, wie man für $n \geqq 2$ zugleich den beiden Forderungen genügen könne, daß die Polynome einerseits $< \varepsilon$ sind und anderseits gewisse „Randbedingungen" erfüllen, nämlich durch die n vorgegebenen Punkte p_i in der beschriebenen Weise hindurchgehen. Wir deuten die Konstruktion zunächst für den Fall $n = 2$ an. Dem einfachen Bogen (b_1, b_2) von B lassen wir einen abgesehen von seinen Endpunkten in (P) verlaufenden Streckenzug (p_1, p_2) entsprechen. Die Länge von (p_1, p_2) sei $< k \cdot \varepsilon$, wo k eine ganze Zahl ist. Wir zerlegen sodann B in endlich viele Kontinua $< \varepsilon$, $B_1, B_2, \ldots, B_m$, die zu je zweien höchstens einen Punkt gemein haben und die überdies so klein bestimmt sind, daß mindestens k von ihnen, etwa die Kontinua $B_1, B_2, \ldots, B_l$ $(l \geqq k)$ mit dem Bogen (b_1, b_2) Teilkontinua gemein haben (wobei einzelne Punkte nicht als Kontinua aufgefaßt werden). Die Kette $B_1, B_2, \ldots, B_l$ von Kontinua überdeckt (b_1, b_2) vollständig und wir nehmen an, daß sie in der angeschriebenen Reihenfolge so geordnet sei, daß ein von b_1 nach b_2 sich bewegender Punkt von B der Reihe nach Punkte von $B_1, B_2, \ldots, B_l$ durchläuft. Auf (b_1, b_2) liegen $l + 1$ Punkte

$$c_0 = b_1, c_1, \quad c_2, \ldots, c_l, \quad c_{l+1} = b_2,$$

so daß jeder der $l - 1$ mittleren Punkte dieser Reihe zwei aufeinanderfolgenden Kontinua der Kette gemein ist. Diesen Punkten ordnen wir auf dem Bogen (p_1, p_2) $l + 1$ Punkte in entsprechender Reihenfolge zu:

$$d_0 = p_1, d_1, d_2, \ldots, d_l, d_{l+1} = p_2,$$

so daß (p_1, p_2) durch dieselben in Stücke $< \varepsilon$ zerfällt. Kommen unter den B_i $(i > l)$ auch Kontinua vor, die mit (b_1, b_2) genau einen Punkt gemein haben, so lassen wir jedem von ihnen ein den Bogen (p_1, p_2) nicht durchsetzendes Polygon $P_i < \varepsilon$ entsprechen, das wir an (p_1, p_2) in einem Punkt ansetzen und das wir so klein wählen, daß sein Innenbereich innerhalb von (P) liegt, und daß je zwei der angesetzten Polygone zueinander fremde Innenbereiche besitzen; gilt für den Punkt c, welcher den Durchschnitt von B_i $(i > l)$ mit (b_1, b_2) ausmacht, $c_j < c < c_{j+1}$, bzw. $c = c_j$, so heften wir das entsprechende Polygon P_i in einem Punkt d an, für den $d_j < d < d_{j+1}$, bzw. $d = d_j$ gilt; überdies heften wir alle in einem und demselben Punkt d an (p_1, p_2) anzusetzenden Polygone auf derselben Seite des Bogens (p_1, p_2) an. Ist $i \leqq l$, so liegen nun auf dem Bogen (d_{i-1}, d_i) im allgemeinen gewisse Punkte $d_1', d_2', \ldots, d_r'$, in welchen Polygone an (p_1, p_2) angeheftet wurden. Dann können wir aber den Bogen (d_{i-1}, d_i) in ein Polygon $P_i < \varepsilon$ einschließen, so daß sein Innenbereich (P_i) zu den angehefteten Polygonen fremd ist und innerhalb (P) liegt und so, daß P_i mit (p_1, p_2) die Punkte $d_{i-1}, d_1', d_2', \ldots, d_r', d_i$ und nur diese Punkte gemein hat. Und da in jedem Punkt d_j' bloß auf einer Seite des Bogens

(p_1, p_2) Polygone angeheftet worden sind, kann P_i als **einfaches** Polygon dieser Art bestimmt werden. Die Zuordnung von Polygonen zu den etwaigen übrigen B_i bietet keine Schwierigkeiten mehr. Auf jedem der bereits vorhandenen Polygone P_i können Punkte angegeben werden, die zu den Begrenzungspunkten des entsprechenden Kontinuums B_i isomorph liegen. In jedem solchen Begrenzungspunkt eines B_i ist an B_i ein System von gewissen B_j angeheftet; zu diesem System kann ein isologes System von Polygonen konstruiert und an den entsprechenden Punkt von P_i angeheftet werden. Damit ist der Hilfssatz für $n = 2$ bewiesen.

Ist $n > 2$, dann ist $S = \sum\limits_{i,k=1}^{n} (b_i, b_k)$ ein gewöhnlicher Baum, d. h. S läßt sich darstellen als Summe endlich vieler Bögen $C_1, C_2, \ldots, C_m$, die zu je zweien höchstens Endpunkte miteinander gemein haben und deren Endpunkte mit singulären Punkten von S übereinstimmen. Diesen Bögen entsprechen gewisse Teilbögen $C_1', C_2', \ldots, C_m'$ von $\sum\limits_{i,k=1}^{n} (p_i, p_k)$. Tilgt man beide Endpunkte von C_i, so zerfällt B; die abgeschlossene Hülle derjenigen Komponente, welche C_i enthält, nennen wir B_i. B ist Summe der solcherart entstehenden Kontinua $B_1, B_2, \ldots, B_m$ und endlich vieler Restkontinua $B_{m+1}, \ldots, B_p$, deren jedes mit $\sum\limits_{i=1}^{m} B_i$ bloß einen Punkt gemein hat, der entweder zu den n ausgezeichneten Punkten $b_1, b_2, \ldots, b_n$ von B gehört oder mehreren von den B_i gemein ist. Indem man nun die C_i in Polygone einschließt, deren Innenbereiche in (P) liegen und zu je zweien fremd sind, und die mit jedem B_i höchstens die zwei Endpunkte von C_i gemein haben, und indem man ferner Polygone P_i $(i > m)$, welche den B_i $(i > m)$ entsprechen, in geeigneter Weise anheftet, erhält man ein zu den Kontinua $B_1, \ldots, B_m, \ldots, B_p$ isologes System von Polygonen, von denen jedes mit den übrigen höchstens zwei Punkte gemein hat. Und auf jedes dieser Kontinua B_i und dieser Polygone P_i kann die für $n = 2$ durchgeführte Konstruktion des Hilfssatzes angewendet werden, wodurch auch die Fälle $n > 2$ erledigt sind.

Sei nun ein Baum B vorgelegt. Wir definieren durch Induktion ein Umgebungssystem von B und ein isologes System von Polygonen. Zunächst zerlegen wir B in endlich viele Kontinua $B_1, B_2, \ldots, B_n < \varepsilon < 1$, die zu je zweien höchstens einen Punkt gemein haben, und lassen ihnen ein isologes System $P_1, P_2, \ldots, P_n$ von Polygonen $< \varepsilon$ entsprechen. Wir nehmen sodann an, es seien bereits definiert die Kontinua $< \varepsilon^{n-1} B_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$ und das entsprechende System von Polygonen $< \varepsilon^{n-1} P_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$. Dann zerlegen wir jede der Mengen $B_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$ in endlich viele Kontinua $B_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} k} < \varepsilon^n$, die zu je zweien höchstens einen Punkt gemein haben und so, daß ihnen in $P_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$ ein isologes System von Polygonen $P_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} k} < \varepsilon^n$ entspricht.

Hieraus ergibt sich folgende Abbildung von B auf ein ebenes Kontinuum: Gehört der Punkt b von B bei jedem Schritt der eben definierten Zerlegung bloß einem einzigen Kontinuum an, dann ordnen wir ihm den Durchschnitt der entsprechenden Polygone zu; da dieselben ineinandergeschachtelt sind und ihre Durchmesser gegen Null konvergieren, so enthält ihr Durchschnitt genau einen Punkt. — Gehört dagegen der Punkt b von B bei einem gewissen Schritt der Zerlegung zum erstenmal mehreren Kontinua an, dann ordnen wir ihm jenen Punkt zu, welcher den entsprechenden Polygonen gemein ist. Mit Rücksicht auf die Isologie zwischen dem Kontinua- und dem Polygonensystem zeigt man nun in einfacher Weise, daß die so definierte Abbildung umkehrbar eindeutig und stetig ist. Es ist damit ein topologisches Bild des Baumes B in der Ebene angegeben.

(Eingegangen am 2. 12. 1925.)