

Über konvexe Flächen und einschließende Kugeln.

Von

N. Kritikós in Athen.

Herr T. Bonnesen hat in seiner Arbeit über das isoperimetrische Defizit ebener Figuren, Math. Annalen 91, S. 257, den Satz bewiesen:

Jedes Oval O kann in einen von zwei konzentrischen Kreisen C und c begrenzten Kreisring in der Weise einbeschrieben werden, daß es zwischen den Kreisen liegt, jedoch mit jedem Kreis zumindest zwei Punkte gemein hat und zwar so, daß es auf C ein Punktpaar gibt, welches auf O von einem Punktpaar auf c getrennt ist. Für ein vorgelegtes Oval ist der Kreisring eindeutig bestimmt.

Von diesem Satz wollen wir im folgenden einen Beweis geben, der vor demjenigen von Herrn Bonnesen den Vorzug hat, weitere Eigenschaften des Kreisrings hervortreten zu lassen und eine Verallgemeinerung auf den Raum zu gestatten. Wir führen den Beweis für den verallgemeinerten Satz im Raum; in der Ebene gelten vollständig entsprechende Schlüsse.

1. Es sei K ein konvexer Körper (das ist eine beschränkte, abgeschlossene, nicht-ebene Punktmenge, die mit zwei Punkten auch die Punkte ihrer Verbindungsstrecke enthält), F sei die Begrenzung. Ist M ein Punkt von K , so gibt es eine kleinste Kugel $C(M)$ mit M als Mittelpunkt und einem Radius $R(M)$, die K enthält, und eine größte $c(M)$ mit demselben Mittelpunkt und einem Radius $r(M)$, die in K enthalten ist und sich auf einen Punkt reduziert, wenn M auf F liegt.

Die Differenz $D(M) = R(M) - r(M)$ ist eine nicht-negative, stetige Funktion von M in K . Nach einem Satz von Weierstraß erreicht sie also darin ihr Minimum, das offenbar dann und nur dann gleich Null ist, wenn K eine Kugel ist. Wir werden zeigen, daß es nur eine Minimumstelle gibt und daß der zugehörige Kugelring durch geometrische Bedingungen festgelegt werden kann, die eine Verallgemeinerung derjenigen des zitierten Satzes sind.

2. Wir behaupten zunächst folgendes:

Ein Punkt M von F ist keine Minimumstelle.

Man lege nämlich eine Stützebene des Körpers durch M derart, daß ihre Normale MN ins Innere von K dringt. Sei N ein innerer Punkt von K , und es sei a der Radius einer Kugel mit N als Mittelpunkt, die ganz in K liegt. Für die Punkte M_1 der Strecke MN gilt

$$r(M_1) \geq \frac{a}{MN} \cdot MM_1.$$

Andererseits haben wir, unter A einen Schnittpunkt der Stützebene mit der Oberfläche von $C(M)$ verstanden,

$$R(M_1) \leq M_1 A.$$

Nun ist $R(M) - M_1 A = MA - M_1 A$ unendlich klein von der 2. Ordnung in MM_1 . Also gilt für M_1 hinreichend nahe bei M :

$$D(M_1) < R(M) = D(M), \quad \text{w. z. b. w.}$$

3. Wir beschränken uns jetzt auf Punkte M im Innern von K . Es ist klar, daß sowohl $C(M)$ als auch $c(M)$ mindestens einen Punkt mit F gemeinsam haben. Die Punkte, welche F und $C(M)$ oder $c(M)$ gemeinsam sind, wollen wir äußere bzw. innere Berührungspunkte des Kugelrings nennen. Sie besitzen folgende Eigenschaft: Die Tangentialebene an die betreffende Kugel in einem Berührungspunkt ist eine Stützebene von K .

Das ist für die äußeren Berührungspunkte evident. Für die inneren wird es so bewiesen: Sei I ein innerer Berührungspunkt, E die Tangentialebene an $c(M)$ in I . Gäbe es Punkte von K auch auf der Seite von E , die von $c(M)$ frei ist, z. B. den Punkt P , so wäre PI , als Sekante von $c(M)$, im Innern des Tangentenkegels an $c(M)$ durch P enthalten, welcher, von P bis zum Berührungskreis, ein Teil von K ist. Demnach wäre I ein innerer Punkt von K , was einen Widerspruch ergibt.

4. Aus der letzten Eigenschaft folgt u. a., daß die Projektionen a der äußeren Berührungspunkte von denjenigen i der inneren auf eine mit dem Kugelring konzentrische Kugel, vom Zentrum aus, verschieden sind. Wir behaupten jetzt folgendes:

Kann man die Punkte a von den Punkten i durch eine Ebene trennen, d. h. eine Ebene finden, die keinen dieser Punkte enthält und welche die a auf der einen, die i auf der anderen Seite läßt, so ist M keine Minimumstelle.

Beweis. Da die Trennung entweder für alle konzentrischen Kugeln zugleich oder für keine möglich ist, gilt unsere Voraussetzung auch für

$c(M)$ und $C(M)$ als Projektionskugeln (Fig. 1). Seien e und E zwei zugehörige parallele Trennungsebenen, die $c(M)$ bzw. $C(M)$ in zwei bezüglich M ähnlich gelegenen Kreisen schneiden. Die äußeren Berührungspunkte bilden eine abgeschlossene Punktmenge, also kann man zwischen sie und E eine weitere parallele Trennungsebene einschalten, die $C(M)$ in einem Kreise AB schneidet. Ebenso schalte man zwischen die inneren Berührungspunkte und e eine parallele Trennungsebene, die $c(M)$ in einem Kreise CD schneidet.

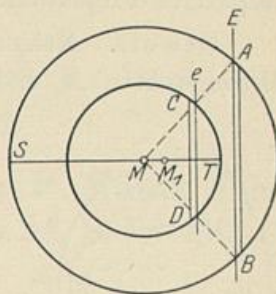


Fig. 1.

Betrachten wir noch die Normale zu diesen Ebenen durch M und nennen wir S ihren Schnittpunkt mit $C(M)$ auf der Seite der i relativ zu E , T denjenigen mit $c(M)$ auf der Seite der a relativ zu e . Die abgeschlossene Kugelkalotte ASB liegt ganz im Äußeren, die abgeschlossene Kugelkalotte CTD dagegen ganz im Innern von K . Wenn wir also auf der Strecke MT Punkte M_1 hinreichend nahe bei M nehmen, so werden die Kugeln, die M_1 als Mittelpunkt und den Radius M_1A haben, K enthalten, während die Kugeln mit demselben Mittelpunkt und dem Radius M_1C in K liegen werden. Folglich ist

$$D(M_1) \leq M_1A - M_1C.$$

Da aber bis auf höhere Potenzen des unendlich kleinen MM_1

$$R(M) = MA = M_1A + MM_1 \cos \widehat{TMA} + \dots,$$

$$r(M) = MC = M_1C + MM_1 \cos \widehat{TMC} + \dots$$

ist, haben wir

$$D(M_1) \leq MA - MC - MM_1 (\cos \widehat{TMA} - \cos \widehat{TMC}) + \dots$$

Also gilt, wegen

$$\widehat{TMA} < \widehat{TMC} < \pi,$$

für M_1 hinreichend nahe bei M

$$D(M_1) < MA - MC = D(M),$$

was unsere Behauptung beweist.

5. Aus dem Vorhergehenden folgt, daß der oder die Kugelringe, für die $D(M)$ ihr Minimum in K erreicht, solche äußeren und inneren Berührungspunkte aufweisen, daß ihre respektiven Projektionen auf eine konzentrische Kugel, vom Zentrum aus, durch keine Ebene getrennt werden können; insbesondere also gibt es mindestens zwei Berührungspunkte jeder Art.

Wir werden jetzt nach Herrn Bonnesen zeigen, daß es nur einen Kugelring geben kann mit äußeren und inneren Berührungspunkten, deren respektive Projektionen sich nicht trennen lassen.

Beweis. Nehmen wir an, es gäbe zwei solche Kugelringe mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 (Fig. 2). $C(M_1)$ und $C(M_2)$ haben dann einen Bereich gemein, der K enthält, und weil sie beide F mindestens zweimal berühren, müssen sie einander in einem Kreise PQ schneiden. Die zwei Kugelkalotten von $C(M_1)$ und $C(M_2)$, die den Bereich begrenzen, seien B_1 und B_2 genannt.

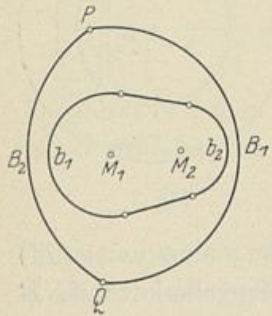


Fig. 2.

Die inneren Kugeln $c(M_1)$ und $c(M_2)$ haben ebenfalls zumindest zwei Punkte mit F gemein, also können sie nicht ineinander liegen und haben einen äußeren gemeinsamen Tangentenkegel. Zwei Kalotten b_1 und b_2 von $c(M_1)$ und $c(M_2)$ umgrenzen zusammen mit dem berührenden Mantelstück des Kegels einen konvexen Teil von K .

Nun muß F auf den Kugelkalotten B_1 und b_1 Punkte haben, deren respektive Projektionen auf $c(M_1)$, von M_1 aus, keine Trennung gestatten. Dafür ist notwendig, daß die Raumwinkel $M_1(B_1)$ und $M_1(b_1)$ einen gemeinsamen Strahl haben, daß also M_1P innerhalb $M_1(b_1)$ oder auf dessen Begrenzung liegt. Entsprechend darf M_2P nicht außerhalb des Raumwinkels $M_2(b_2)$ liegen. Das ist aber unmöglich, denn die Raumwinkel $M_1(b_1)$ und $M_2(b_2)$ haben ersichtlich keinen gemeinsamen Punkt.

Es gibt also nur einen Kugelring, bei welchem die äußeren und inneren Berührungspunkte Projektionen haben, die keine Trennung gestatten. Diese negative Bedingung kann nun leicht durch Betrachtung der konvexen Hüllen der gleichartigen Projektionen in eine äquivalente positive umgewandelt werden, und so bekommen wir schließlich den Satz:

Jede Begrenzung eines konvexen Körpers kann in einen aus zwei konzentrischen Kugeln bestehenden Kugelring in der Weise eingeschlossen werden, daß sie mit jeder der zwei Kugeln zumindest zwei oder drei Berührungspunkte hat, deren respektive Projektionen auf eine konzentrische Kugel, vom Zentrum aus, zwei Strecken oder Dreiecke mit gemeinsamem Punkt bilden. Für eine vorgelegte Begrenzung ist der Kugelring eindeutig bestimmt und besitzt die kleinste Dicke unter allen Kugelringen aus konzentrischen Kugeln, in welche die Begrenzung eingeschlossen werden kann.

(Eingegangen am 1. 11. 1925.)