Bemerkungen zur Arbeit von Herrn Ch. H. Müntz über das Plateausche Problem (Math. Annalen 94, S. 53–96).[*]

Von

Tibor Radó in Szeged (Ungarn).

Im ersten, flächentheoretischen Teile der im Titel genannten Arbeit[1]) führt Herr Müntz gewisse Abschätzungen durch (seine Formeln 13, 17**, 19**, $\widetilde{19}$), welche für den im zweiten Teile entwickelten Existenzbeweis grundlegend sind. Das Verfahren von Herrn Müntz stellt die Verallgemeinerung einer äußerst geistreichen Methode von Herrn S. Bernstein dar und läuft dementsprechend letzten Endes auf gewisse *geometrische Konvergenzsätze* hinaus. In dem von Herrn S. Bernstein ursprünglich betrachteten Falle tritt als letztes Glied der Schlußkette die bekannte Tatsache auf: werden auf einer Raumkurve drei Punkte angenommen, wird durch diese drei Punkte eine Ebene gelegt, und läßt man hierauf die drei Punkte gegen einen und denselben Punkt der Kurve konvergieren, so konvergiert die entsprechende Ebene gegen die Schmiegebene in diesem Kurvenpunkte. Analoge geometrische Konvergenzsätze bilden auch bei Herrn Müntz das Endglied der Schlußketten; es treten dabei an die Stelle der Ebenen besondere Minimalflächen, welche gewissen mehrparametrigen algebraischen Flächenfamilien angehören.

Diese geometrischen Konvergenzsätze beweist aber Herr Müntz nicht, er deutet auch die Richtung nicht an, in welcher der Beweis zu suchen wäre; ja er spricht diese Sätze gar nicht aus, er wendet dieselben stillschweigend an[2]).

---

*) Anmerkung der Redaktion. Die Redaktion der Annalen ist zwar grundsätzlich der Aufnahme von Beiträgen mit polemischer Tendenz oder Form abgeneigt; gleichwohl glaubt sie die nachfolgenden Ausführungen von Herrn Radó und die folgende Antwort von Herrn Müntz abdrucken zu sollen, da diese Erörterung in der Tat zu einer sachlichen Klärung von Fragen dienen kann, denen man vielfach nicht genügend Beachtung geschenkt zu haben scheint.

[1]) Im folgenden mit *M* zitiert.

[2]) Es handelt sich um *M*, S. 72–75, insbesondere S. 72.

Es werde nun daran erinnert, daß bereits der von Herrn S. Bernstein herangezogene einfache Konvergenzsatz über die Schmiegebene, wenn man denselben vollkommen streng beweisen will, zu ganz hübschen analytischen Betrachtungen Anlaß gibt; H. A. Schwarz und T. J. Stieltjes haben diesen Betrachtungen je eine kleine Arbeit gewidmet[3]). Sie haben gleichzeitig auf Verallgemeinerungen hingewiesen; beispielsweise kann man statt der dreiparametrigen Familie aller Ebenen die vierparametrige Familie aller Kugeln ins Auge fassen.

Will man nun diese Sätze auf allgemeinere algebraische Flächenfamilien verallgemeinern, so werden die Dinge wesentlich komplizierter. Die Tatsache, daß eine Kurve und eine Ebene eine n-punktige Berührung haben, wird bekanntlich durch das Bestehen gewisser rein analytischer Beziehungen zwischen den Bestimmungsstücken der Kurve und der Ebene ausgedrückt. Bei den in Rede stehenden Sätzen handelt es sich nun darum, das Bestehen dieser analytischen Relationen aus dem Umstande zu erschließen, daß die betrachtete Ebene durch gewisse algebraische Flächen approximiert werden kann, welche mit der Kurve je n getrennte Punkte gemein haben, wobei diese n Punkte gegen den betrachteten Kurvenpunkt konvergieren. Eine einfache Betrachtung lehrt aber, daß die Möglichkeit eines derartigen Schlusses wesentlich von der besonderen Struktur der herangezogenen Flächen abhängt, indem nämlich die fraglichen geometrischen Konvergenzsätze im allgemeinen überhaupt nicht mehr gültig bleiben.

Demnach erscheint es notwendig, die jeweilige Gültigkeit der fraglichen Sätze durch eine Diskussion der verwendeten Flächenfamilien sicherzustellen; auf eine derartige Diskussion geht Herr Müntz gar nicht ein. Ich habe nun die von Herrn Müntz herangezogenen Flächenfamilien etwas genauer betrachtet und zunächst gefunden, daß diejenigen Eigenschaften dieser Familien, die durch Herrn Müntz im Laufe seiner Darstellung in Betracht gezogen werden, weder für die Gültigkeit der geometrischen Konvergenzsätze noch für die Gültigkeit der aus denselben gezogenen Schlüsse hinreichend sind. Eine weitere einfache Betrachtung ließ dann solche Besonderheiten dieser Flächenfamilien erkennen, die an sich geeignet sein könnten, die Gültigkeit der geometrischen Konvergenzsätze in Frage zu stellen. Und so gelangte ich zur Ansicht, die ich im folgenden begründen möchte, daß durch das Stillschweigen, welches Herr Müntz über diese Sätze beobachtet hatte, eine *wesentliche Lücke* in seinem Existenzbeweise entstanden ist.

[3]) H. A. Schwarz, Abhandlungen 2, S. 296—302; T. J. Stieltjes, Oeuvres 2, S. 110—123. Von Lehrbüchern vgl. W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie 1, § 4.

1. Herr Müntz betrachtet eine einfache geschlossene Raumkurve K und setzt voraus, daß dieselbe analytisch ist, eine einfache konvexe xy-Projektion hat und keine vertikale Schmiegebene besitzt. Dann führt er, in Verallgemeinerung eines S. Bernsteinschen Verfahrens, eine gewisse fünfparametrige algebraische Flächenfamilie ein; wir wollen die Parameter mit $\varkappa, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ und die entsprechende Fläche mit $S(\varkappa, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ bezeichnen. Die Flächenfamilie weist dann die Besonderheit auf, daß für $\varkappa = 0$ die Fläche $S(\varkappa, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ in eine Vertikalebene ausartet.

Für die Zwecke von Herrn Müntz ist nun der folgende „*Satz über den Parameter* $\varkappa$" von entscheidender Bedeutung.

Satz über den Parameter $\varkappa$. *Es werde die Gesamtheit derjenigen Flächen $S(\varkappa, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, die mit der vorgelegten Raumkurve fünf getrennte Punkte gemein haben, ins Auge gefaßt und mit Σ bezeichnet. Dann bleibt für diese Flächen der absolute Betrag des Parameters $\varkappa$ oberhalb einer positiven Schranke.*

Der Deutlichkeit wegen möchte ich hier schildern, wie man diesen Satz auf gewisse *geometrische Konvergenzsätze* reduziert. Für $\varkappa = 0$ artet die Fläche $S(\varkappa, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ nach Voraussetzung in eine Vertikalebene aus; da die Kurve K eine konvexe xy-Projektion hat, so kann diese Vertikalebene keine fünf getrennten Punkte mit der Kurve gemein haben. Für keine Fläche von Σ kann also $|\varkappa|$ gleich Null sein; es wird aber darüber hinaus behauptet, daß $|\varkappa|$ auch nicht beliebig klein werden kann. Zum Beweise wird im Gegensatz zur Behauptung angenommen, daß aus Σ eine Flächenfolge $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ ausgewählt werden kann, für welche $|\varkappa|$ gegen Null geht[4]). Die Fläche S_n hat mit der Kurve K fünf getrennte Punte $P_1^{(n)}, \ldots, P_5^{(n)}$ gemein; ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß jeder dieser fünf Punkte einer Grenzlage zustrebt. Seien $P_1, P_2, \ldots, P_5$ diese Grenzpunkte. Da beim Grenzübergange die Flächenfolge S_n, wegen $\varkappa \rightarrow 0$, in eine gewisse Vertikalebene E^* ausartet, so liegen diese Punkte augenscheinlich auf E^*. Da nun die Vertikalebene E^* mit der Kurve K, infolge der konvexen xy-Projektion dieser Kurve, nicht mehr als zwei getrennte Punkte gemein haben kann, so müssen entweder alle fünf Punkte zusammenfallen, oder aber es muß zwei getrennte Punkte A und B auf der Kurve K geben, so daß gewisse mit A, gewisse mit B zusammenfallen.

Es gibt also gewiß einen Punkt auf der Kurve, wir wollen diesen Punkt mit P_0 bezeichnen, so daß beim Grenzübergange von den fünf Schnittpunkten $P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, \ldots, P_5^{(n)}$ wenigstens drei gegen P_0 konvergieren. Da aber, wegen $\varkappa \rightarrow 0$, die Flächen S_n in eine durch den Punkt P_0

[4]) Vgl. hierzu Nr. 6, a) der vorliegenden Note.

gehende Vertikalebene E^* ausarten, so müßte diese Vertikalebene mit der Kurve K im Punkte P_0 eine wenigstens dreipunktige Berührung haben. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, daß die Kurve K keine vertikale Schmiegebene besitzt, und damit ist die Annahme, daß der Parameter $\varkappa$ für die Flächen von Σ beliebig kleine Werte annehmen könnte, ad absurdum geführt[5]).

2. Den springenden Punkt dieses indirekten Beweises bildet, wie man sieht, ein recht allgemeiner *geometrischer Konvergenzsatz*; wir wollen einen besonderen Fall desselben genau formulieren.

Spezieller geometrischer Konvergenzsatz. *Auf der Kurve K wird ein fester Punkt P_0 vorgegeben. In der Nähe von P_0 werden auf K fünf getrennte Punkte angenommen, und durch diese fünf Punkte wird eine Fläche der oben erwähnten fünfparametrigen Flächenfamilie gelegt. Es wird noch vorausgesetzt: läßt man die fünf Punkte gegen den festen Punkt P_0 konvergieren, so artet die entsprechende Fläche in eine durch P_0 gehende Vertikalebene E^* aus.*

Dann wird behauptet, daß die Grenzebene E^* mit der Kurve K im Punkte P_0 eine fünfpunktige Berührung hat.

Es werde aber ausdrücklich darauf hingewiesen, daß für die Zwecke von Herrn Müntz noch *allgemeinere* Sätze erforderlich sind. Während bei diesem speziellen Satze, kurz gesagt, mit Hilfe einer fünfparametrigen Familie eine fünfpunktige Berührung zu erweisen ist, handelt es sich bei den allgemeineren Sätzen darum, mit Hilfe einer n-parametrigen Familie eine k-punktige Berührung festzustellen, wobei $n = 5, 7, 9$ und k im allgemeinen *kleiner* als n ist.

Ob der Umstand $k < n$ wesentlich ist, kann erst beim Beweise erkannt werden. Eine eingehende Besprechung dieser Sätze wäre aber auch aus folgendem Grunde notwendig. Über die Randkurve K wurde insbesondere vorausgesetzt, daß sie analytisch ist. Diese Voraussetzung ist aber nicht notwendig, wie Herr Müntz gelegentlich bemerkt; es genügt, wenn die Kurve hinreichend oft derivierbar ist. Wenn man die in Nr. 1 dieser Note geschilderte Überlegung durchgeht, so erkennt man, daß die höhere Derivierbarkeit der Kurve explizite gar nicht verwendet wird; die Regularitätseigenschaften der Kurve würden eben erst beim Beweise der geometrischen Konvergenzsätze eingreifen. Erst beim Beweise dieser Sätze würde man also über den wichtigen Punkt Aufschluß erhalten, welche Regularitätseigenschaften der Kurve K für die Schlüsse von Herrn Müntz notwendig sind.

---

[5]) Siehe *M*, S. 72 unten und S. 75 Mitte.

3. Ich will nun meine Ansicht begründen, daß die fraglichen geometrischen Konvergenzsätze einen sorgfältigen Beweis erfordern; um aber mit abstrakten Erörterungen keine Zeit zu verlieren, betrachte ich zunächst ein *Beispiel*, welches den Sachverhalt beleuchten soll.

In der xy-Ebene sei die algebraische Kurvenschar

$$(1)\qquad (y-1+\varkappa)(y-1+2\varkappa)(y-1+3\varkappa)+\varkappa\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4(x^2+y^2)=0$$

vorgelegt. Sei $0<\varkappa<\frac{1}{4}$; dann kann man, wie wir zeigen wollen, für die übrigen Parameter solche von Null verschiedene Werte einsetzen, daß die entsprechende Kurve mit dem Einheitskreise $x^2+y^2=1$ sechs getrennte Punkte gemein hat. In der Tat, setzen wir $x^2+y^2=1$ in (1), so erhalten wir für y eine Gleichung dritten Grades; wenn wir noch $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$ wählen, so lautet diese Gleichung

$$(y-1+\varkappa)(y-1+2\varkappa)(y-1+3\varkappa)+\lambda_1\varkappa=0.$$

Für $\lambda_1=0$ hat man die drei verschiedenen Wurzeln $1-\varkappa$, $1-2\varkappa$, $1-3\varkappa$; wenn λ_1 hinreichend klein, aber von Null verschieden gewählt wird, so wird man ebenfalls drei getrennte Wurzeln haben, die wenig von $1-\varkappa$, $1-2\varkappa$, $1-3\varkappa$ abweichen. Wir können und wollen also $\lambda_1\neq 0$ so wählen, daß die Gleichung drei getrennte Wurzeln η', η'', η''' hat, die zwischen 1 und $1-4\varkappa$ liegen; wegen $0<\varkappa<\frac{1}{4}$ haben wir dann

$$(2)\qquad 0<1-4\varkappa<\eta', \eta'', \eta'''<1.$$

Aus $x^2+y^2=1$ erhalten wir die Abszissen der Schnittpunkte mit dem Einheitskreise. Es gibt also sechs getrennte Schnittpunkte; zwei haben die Ordinate η', zwei die Ordinate η'' und zwei die Ordinate η'''. Da nun nur $0<\varkappa<\frac{1}{4}$ vorausgesetzt wurde, so können wir diesen Prozeß für eine gegen Null konvergierende Folge $\varkappa^{(1)}, \varkappa^{(2)}, \ldots, \varkappa^{(n)}, \ldots$ wiederholen, und erhalten eine Folge von Kurven, $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \ldots, \gamma^{(n)}, \ldots$, die mit dem Einheitskreise je sechs getrennte Schnittpunkte haben; wie aus (2) ersichtlich, konvergieren diese sechs Schnittpunkte gegen den Punkt $(0, 1)$ des Einheitskreises.

Wir gehen nun zu drei Dimensionen über und bezeichnen mit $S(\varkappa, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ diejenige Zylinderfläche mit vertikalen Erzeugenden, welche die Leitkurve (1) hat; wir können die Gleichung dieser Flächenfamilie in der Form schreiben

$$(3)\qquad y-1+\varkappa=-\frac{\varkappa\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4(x^2+y^2)}{(y-1+2\varkappa)(y-1+3\varkappa)}$$

und wollen die Gleichung der Familie *gerade in dieser Form* verwenden. Mit K bezeichnen wir den Einheitskreis der xy-Ebene; dann sind die Müntzschen Voraussetzungen über K gewiß erfüllt.

Setzen wir in (3) für $\varkappa$ den Wert Null ein, so ergibt sich $y-1=0$; für $\varkappa=0$ artet also die Fläche $S(\varkappa, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ in eine Vertikalebene aus. Bezeichnen wir mit $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ diejenigen Zylinderflächen unserer Familie, welche die oben erklärten Kurven $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \ldots, \gamma^{(n)}, \ldots$ zu Leitkurven haben, so hat S_n sechs getrennte Punkte mit dem Einheitskreise K gemein, und der zugehörige Parameterwert $\varkappa^{(n)}$ konvergiert dabei gegen Null. Alle die Momente, auf welche sich Herr Müntz beim Beweise des Satzes über den Parameter $\varkappa$ beruft, sind also vorhanden, der Satz selbst gilt aber nicht.

Aus diesem Sachverhalte ersehen wir bereits, daß für die Gültigkeit des Satzes über den Parameter $\varkappa$ gerade solche Momente entscheidend sein müssen, die Herr Müntz gar nicht in Betracht gezogen hatte.

4. Wenden wir die in Nr. 1 geschilderte indirekte Schlußweise auf unser Beispiel an, so bleiben wir erst bei den geometrischen Konvergenzsätzen stecken; diesen Punkt wollen wir nun genauer ins Auge fassen.

Sind wieder $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ die in Nr. 3 eingeführten Zylinderflächen, so hat S_n sechs, also um so mehr fünf getrennte Punkte mit dem Einheitskreise gemein. Beim Grenzübergange konvergieren diese Schnittpunkte gegen denselben Punkt $(0, 1)$ des Einheitskreises, und die Fläche artet dabei in die Vertikalebene $y-1=0$ aus. Alle Voraussetzungen des speziellen geometrischen Konvergenzsatzes sind also erfüllt, es ist aber ganz klar, daß die Grenzebene $y-1=0$ mit dem Einheitskreise keine fünfpunktige Berührung hat — der geometrische Konvergenzsatz ist also nicht erfüllt.

Dieses negative Ergebnis wird wohl niemanden überraschen. Ganz trivial sind nämlich die folgenden Feststellungen.

Feststellung I. Für den speziellen geometrischen Konvergenzsatz genügt es nicht, wenn die Flächen beim Grenzübergange irgendwie in eine Ebene ausarten. Das wesentliche ist, in welcher Weise diese Ausartung erfolgt.

Feststellung II. Insbesondere muß unbedingt verlangt werden, daß die Ausartung die *hinreichend glatte Konvergenz* gegen die Grenzebene involviert; beispielsweise muß in der Umgebung des Punktes P_0 auch die Normalenrichtung der Flächen gleichmäßig gegen die Normalenrichtung der Grenzebene konvergieren (was aber an sich natürlich nicht hinreicht).

Die Ausartung in unserem Beispiel bedeutet hingegen weiter nichts als eine *willkürliche Festsetzung;* man erkennt dies am besten, wenn man die Gleichung der Flächenfamilie *in ganzer rationaler Form* zugrunde legt, also Gleichung (1) verwendet. Setzt man in Gleichung (1) für $\varkappa$ den Wert Null ein, so ergibt sich $(y-1)^3=0$, also die *dreifach* zu zählende

Ebene $y-1=0$. Dreifach gezählt, liefert diese Ebene tatsächlich sechs zusammenfallende Schnittpunkte mit dem Einheitskreise, der spezielle geometrische Konvergenzsatz ist also eigentlich auch jetzt richtig, nur muß derselbe *richtig, nämlich algebraisch, interpretiert werden.* Dann aber drückt derselbe eine Trivialität aus und stellt keinen Widerspruch mit der differentialgeometrischen Tatsache dar, daß der Einheitskreis keine vertikale Schmiegebene besitzt.

Feststellung III. Wenn für $\varkappa=0$ die Fläche S $(\varkappa, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ in eine *mehrfach* zu zählende Vertikalebene ausartet, so artet der spezielle geometrische Konvergenzsatz *im allgemeinen* in eine Trivialität aus, und der Satz über den Parameter $\varkappa$ verliert *im allgemeinen* seine Gültigkeit.

5. Mit diesen Erfahrungen wenden wir uns nun den von Herrn Müntz verwendeten Flächen zu. Mit $\mathfrak{M}_\varkappa$ werde die Minimalfläche

$$(4)\qquad \begin{aligned} x &= \varkappa^3\left(u+\frac{u^3}{3}-u v^2\right), \\ y &= 2\varkappa^3 u v, \\ z &= \varkappa^3\left(v+\frac{v^3}{3}-u^2 v\right) \end{aligned}$$

bezeichnet, die in der durch Herrn Müntz betrachteten fünfparametrigen Familie enthalten ist[6]). Wir führen mit Herrn Müntz neue Variablen u^*, v^* durch $\varkappa u = u^*$, $\varkappa v = v^*$ ein, wodurch (4) übergeht in

$$\begin{aligned} x &= \varkappa^2 u^* + \frac{u^{*3}}{3} - u^* v^{*2}, \\ y &= 2\varkappa u^* v^*, \\ z &= \varkappa^2 v^* + \frac{v^{*3}}{3} - v^* u^{*2}. \end{aligned}$$

Setzen wir hier $\varkappa=0$, so ergibt sich $y=0$, $x \neq 0$, $z \neq 0$; dieser Sachverhalt wird durch Herrn Müntz durch die Aussage charakterisiert, daß die Fläche $\mathfrak{M}_\varkappa$ für $\varkappa=0$ in die Vertikalebene $y=0$ ausartet[7]). In analogem Sinne ist die Ausartung beim Satze über den Parameter $\varkappa$ und beim geometrischen Konvergenzsatze zu verstehen.

Mit Rücksicht auf Feststellung II wollen wir nun zusehen, wie die Ausartung der Fläche $\mathfrak{M}_\varkappa$ in die Ebene $y=0$ in der Umgebung des Punktes $(0, 0, 0)$ aussieht. Der Punkt $(0, 0, 0)$ liegt auf $\mathfrak{M}_\varkappa$ und entspricht dem Wertsystem $u=0$, $v=0$. Aus (4) erhält man, daß für $u=0$, $v=0$ die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}$ von Null verschieden ist, in der Umgebung des Punktes $(0, 0, 0)$ kann also die Fläche in der

[6]) *M,* S. 71, Formel 17*.

[7]) *M,* S. 72 unten.

Form $y =$ *analytische Funktion von* x *und* z dargestellt werden, dieser Punkt ist also, in differentialgeometrischer Beziehung, ein absolut regulärer Flächenpunkt. Außerdem wird dort die Fläche gerade durch die Grenzebene $y = 0$ berührt. Wir setzen nun in (4)

$$u = 1, \quad v = 0$$

und erhalten einen Punkt von $\mathfrak{M}_\varkappa$, der mit $P_\varkappa$ bezeichnet werden möge. Dieser Punkt $P_\varkappa$ hat die Koordinaten $(\frac{4}{3}\varkappa^3, 0, 0)$, konvergiert also für $\varkappa \to 0$ gegen $(0, 0, 0)$. Man stellt fest, daß im Punkte $P_\varkappa$ die Fläche $\mathfrak{M}_\varkappa$ eine *horizontale* Berührungsebene hat. Wird also eine beliebig kleine Umgebung des Punktes $(0, 0, 0)$ betrachtet, so liegt dort, wenn $\varkappa$ hinreichend klein ist, sowohl ein Punkt von $\mathfrak{M}_\varkappa$ mit *vertikaler*, wie auch ein Punkt mit *horizontaler* Tangentialebene, nämlich $(0, 0, 0)$ bzw. $P_\varkappa$. In der Umgebung des Punktes $(0, 0, 0)$ ist also die Konvergenz der Fläche $\mathfrak{M}_\varkappa$ gegen die Grenzebene $y = 0$ nicht glatt. *Die Ausartung im Müntzschen Sinne involviert also die glatte Konvergenz gegen die Grenzebene nicht.*

Mit Rücksicht auf Feststellung III wollen wir noch über die algebraische Gleichung der Fläche $\mathfrak{M}_\varkappa$ eine Bemerkung einschalten. Bekanntlich ist diese Fläche von der *neunten*[8]) Ordnung. Drücken wir aus der zweiten Gleichung (4) v durch u aus und gehen wir damit in die erste und dritte Gleichung ein, so erhalten wir zwei Gleichungen vierten Grades für u. Wenn wir die Resultante gleich Null setzen, so ergibt sich eine Gleichung zwischen x, y und z, die aber noch höheren als neunten Grades ist; durch einfache, aber etwas weitläufige Rechnungen erhalten wir dann, nach Abspaltung leicht erkennbarer fremder Faktoren, eine Gleichung mit dem richtigen Grade 9 und mit folgenden Eigenschaften.

A. Die Gleichung hat die Form

$$y^9 + Q(x, y, z, \varkappa) = 0, \tag{5}$$

wobei Q ein Polynom, mit rein numerischen Koeffizienten, von $x, y, z, \varkappa$ bedeutet, welches in bezug auf x, y, z vom achten Grade ist.

B. Das Polynom Q verschwindet für $\varkappa = 0$ identisch.

Mit Rücksicht darauf, daß die Fläche $\mathfrak{M}_\varkappa$ von neunter Ordnung ist, stellt also (5) *die* Gleichung der Fläche in ganzer rationaler Form dar. Setzen wir in dieser Gleichung $\varkappa = 0$, so erhalten wir nach B:

$$y^9 = 0.$$

Für $\varkappa = 0$ artet hiernach die Fläche $\mathfrak{M}_\varkappa$ in die *neunfach* zu zählende Vertikalebene $y = 0$ aus.

---

[8]) Vgl. Darboux, Théorie générale des surfaces, 1, p. 217 und p. 369.

Es liegt also eine weitgehende Analogie mit unserem Beispiele vor. Die Müntzsche Erklärung der Ausartung ist eine an sich willkürliche Festsetzung; diese Festsetzung entspricht dem algebraischen Sachverhalte nicht und involviert die glatte Konvergenz nicht. Mit Rücksicht auf die Bemerkungen in Nr. 4 dürfen wir also sagen: wenn trotzdem der Satz über den Parameter $\varkappa$ und der geometrische Konvergenzsatz in dem von Herrn Müntz benötigten Umfange bestehen bleiben, so kann man sich hiervon nur durch eine *sorgfältige Diskussion der Besonderheiten der jeweiligen Sachlage* überzeugen.

Da eine derartige Diskussion in der Arbeit von Herrn Müntz vollkommen fehlt, so scheint mir dort eine Lücke vorzuliegen.

6. Ich möchte zur Ergänzung folgendes hinzufügen.

a) Die positive untere Schranke, deren Existenz im Satze über den Parameter $\varkappa$ behauptet wird, muß noch eine für die weiteren Entwicklungen von Herrn Müntz wesentliche Eigenschaft besitzen; diese Schranke darf nämlich *nur von der Kurve K selbst* abhängen, sie muß eine dieser Kurve eigentümliche Konstante sein. Da zum Nachweis der Existenz dieser Konstante nur ein indirekter Beweis angedeutet wird, so muß man streng darauf achten, daß dabei nur solche Momente in Betracht gezogen werden, welche nur die Kenntnis der Kurve K involvieren.

Nun aber verwendet Herr Müntz im Laufe seines Beweises den Ausdruck *Oskulationsfläche* (M, S. 72, Zeile 4 von unten); darunter ist eine Fläche zu verstehen, welche der von uns mit Σ bezeichneten Gesamtheit angehört (s. den Wortlaut des Satzes über den Parameter $\varkappa$ in Nr. 1), und überdies in einer gewissen Beziehung steht zu derjenigen Minimalfläche, welche durch K begrenzt wird. An der erwähnten Stelle wird nicht angegeben, in welcher Weise diese Oskulationsflächen die Schlüsse beeinflussen sollen; es werde aber ausdrücklich darauf hingewiesen, daß diese Heranziehung der Oskulationsflächen zunächst einer früheren Bemerkung von Herrn Müntz widerspricht (M, S. 72, Zeile 10—11 von oben), und überdies geeignet ist, den wichtigen Umstand zweifelhaft zu machen, daß die fragliche untere Schranke tatsächlich nur von der Kurve K abhängt.

b) Dem Beweise des Satzes über den Parameter $\varkappa$ fügt Herr Müntz eine algebraische Bemerkung hinzu.

Da die betrachtete Familie von fünf Parametern abhängt, so wird, wenn $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_5, y_5, z_5)$ die fünf Schnittpunkte einer Fläche von Σ mit K bezeichnen, eine algebraische Gleichung für $\varkappa$ bestehen, deren Koeffizienten nur von den Koordinaten dieser fünf Schnittpunkte abhängen. Da nun, schließt Herr Müntz (vgl. M, S. 73 oben), die Existenz einer positiven unteren Schranke für $|\varkappa|$ bereits feststeht (gemeint ist der in Nr. 1 geschilderte indirekte Beweis), so wird auch diese Gleichung *notwendig* eine positive untere Schranke für $|\varkappa|$ liefern, welche Schranke mit *rein algebraischen* Mitteln bestimmbar ist.

Ohne das hiermit ausgesprochene allgemeine Prinzip näher zu betrachten, will ich nur feststellen, daß Herr Müntz über die Beschaffenheit und die Handhabung dieser rein algebraischen Mittel keine Angaben macht. Die erwähnte algebraische Bemerkung kann also meine Schlußfolgerung auf das Vorhandensein einer wesentlichen Lücke nicht beeinflussen.

c) Herr Müntz führt der Reihe nach fünf-, sieben-, neunparametrige Flächenfamilien ein, und beruft sich dabei auf seine Entwicklungen im fünfparametrigen Falle (*M*, S. 75). Diejenigen Momente, die er im fünfparametrigen Falle in Betracht zieht, reichen aber nach den Bemerkungen dieser Note an sich nicht hin, um die Gültigkeit seiner Schlüsse zu sichern. Es erscheint hiernach notwendig, diejenigen *gemeinsamen Eigenschaften* dieser Flächenfamilien aufzudecken, welche eine *gleichmäßige Behandlung* der geometrischen Konvergenzsätze ermöglichen.

Szeged, den 22. November 1925.

(Eingegangen am 27. 11. 1925.)