Zum Plateauschen Problem.

Erwiderung auf die vorstehende Note des Herrn Radó.

Von

Ch. H. Müntz in Berlin-Nikolassee.

Die kurze Fassung einiger Punkte meiner zitierten Arbeit (M) hat zu Mißverständnissen Anlaß gegeben, die im folgenden behoben werden sollen.

I.

1. Herr Radó nimmt an (R 1), ich hätte stillschweigend einen von ihm formulierten „Satz über den Parameter $\varkappa$" benutzt. Diese Annahme trifft nicht zu, und der betreffende Satz ist in unserem Falle evident falsch: man braucht nur die Schnitte einer geschlossenen xy-Kurve mit den xy-Spuren der benutzten Flächen zu betrachten.

Es kommen eben nicht alle Flächen Φ_* der Familie Σ in Frage, sondern nur solche (M § 9), die im Sinne meiner Arbeit Oskulationsflächen sind oder zumindest es sein könnten, worüber die Kriterien (vgl. u. II) a. a. O. implizite gegeben worden sind.

2. Der mir des weiteren zugeschriebene „spezielle geometrische Konvergenzsatz" ist ebenfalls falsch (vgl. u. II) und ebenfalls von mir nicht benutzt worden[1]).

3. Der a. a. O. mehrfach gegebene Hinweis auf die Oskulationsflächen (u. a. S. 72, Z. 4 v. u.), als Stütze der Beweisführung gedacht, wird von Herrn Radó (R 6a) als „Widerspruch zu einer früheren Bemerkung" (S. 72, Z. 10—11) meiner Arbeit bezeichnet. Es ist mir leider nicht verständlich, worin dieser Widerspruch bestehen könnte: Es wird ibd., Z. 10—11 nur gesagt, daß die fraglichen Oskulationsflächen Φ^* einer dort angegebenen Gesamtheit (Σ) angehören, und dies ist richtig.

Übrigens hängen die Flächen R^* implizite nur von K ab; wie ihre Heranziehung zu handhaben ist, sei jetzt auseinandergesetzt.

[1]) Zur Literatur wäre noch H. A. Schwarz, Werke II, 309—311 zu nennen.

II.

1. In einem inneren Punkte O eines regulären Minimalflächenstückes Φ ist nach vollzogener Drehung zu $p = 0$ (M § 9) der Parameter ω reell und überdies, zugleich mit ω^{-1}, gleichmäßig beschränkt[2]). Entsprechend der Zweideutigkeit der Gaußschen Abbildung durch parallele Normalen ist ω ebenfalls zweideutig, ebenso allgemeiner (ohne Drehung zu $p = 0$) die Weierstraßschen Parameter

$$w = u + i\,v = \frac{-q + \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{1 + p\,i}, \qquad u = \frac{-q + \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{1 + p^2}$$

[M(14)], wobei hier $|w|$, $|w^{-1}|$, $|u|$, $|u^{-1}|$, v gleichmäßig beschränkt sind; die Punkte mit $u = 0$ bilden auf den benutzten Hilfsflächen Φ^* an sich eine vertikale Gerade (Z-Achse), für die Berührung aber kommen nur zwei getrennte endliche Stücke von Φ^* in Frage, wobei auf dem einen stets $u > 0$, auf dem andern stets $u < 0$ ist und die Wahl des Vorzeichens uns freisteht.

2. Für jede Oskulationsfläche sind die reellen Parameter $\varkappa$ und $\tau = \operatorname{tg}\psi$ in endlichvieldeutiger Weise bestimmt aus $M(\underline{16})$—$(\overline{16})$; man kann dabei nach Belieben und unabhängig voneinander über die Vorzeichen von $\cos\psi$, $\sin\psi$ und $\varkappa$ verfügen (das Vorzeichen von $\varkappa$ entscheidet übrigens über den somit wählbaren Sinn der Schraubung von Φ^* um die Z-Achse). Für $r^2 + s^2 \to \infty$ hätte man $\varkappa \to 0$ in *allen* Fällen zu gewärtigen; es genügt daher, den erwünschten Widerspruch bei einer einzigen passenden Wahl aufzuzeigen.

3. Setzt man in O an Φ eine zugehörige Φ^* etwa mit $u > 0$, so besitzt die (analytische) Schnittkurve S auf Φ mindestens sechs von O äquiangular ausgehende reelle Halbzweige, von denen höchstens nur einer die Z-Achse treffen kann, während auf allen anderen, auch beim jeweiligen (sicher existenten) Schnitt mit der Randkurve K stets $u > 0$ bleibt[3]); Φ^* selbst ist durch je fünf Punkte auf K in endlichvieldeutiger Weise bestimmt. Jede durch O gehende analytische Kurve S^* auf Φ wird dort von Φ^* mindestens von der zweiten Ordnung berührt; es gelten daher in O nicht nur die Gleichungen $M(17^*)$, sondern auch diejenigen, die daraus durch zweimalige Differentiation nach der Bogenlänge s^* von S^* entstehen.

---

[2]) In R 4 wird gerade der Punkt (0, 0, 0), mit $\omega = 0$, herangezogen, der für die zu betrachtenden Berührungen nicht in Frage kommt.

[3]) Nur so ist M, S. 71, Z. 8—5 v. u. überhaupt erst zu verstehen; sonst liefert schon $z = z_0$ geschlossene Kurvenstücke.

4. Die betrachteten Minimalflächenstriche Φ entspringen jeweiligen gefundenen Lösungen mit einer Randkurve $K(\varepsilon)$, die aus $K(1)$ durch Abflachung der Randwerte $z^*(\varepsilon) = \varepsilon z^*(1)$ entsteht (M, Sätze G—H der Einleitung); auf den heute allein gangbaren Wegen ist dabei auch für die z-Ableitungen der ersten zwei Ordnungen die Stetigkeit auch nach dem Rande hin gesichert, und es handelt sich nachträglich nur um gleichmäßige *Abschätzung* derselben; $\varkappa \to 0$ besagt, daß diese Möglichkeit für $\varepsilon \to \varepsilon_0$ besteht, wenn $O^* \to P_0^*$ ist, wobei O^* die xy-Projektion eines inneren Punktes O bedeutet.

Nach dem Vorhergehenden genügt es zu zeigen, daß wenigstens für *eine* Möglichkeit der Vorzeichenwahl eine von 0 verschiedene untere Schranke für $|\varkappa|$ entsteht, wenn man für $K(\varepsilon_0)$ neben $M(17^*)$ die daraus durch zweimalige Differentiation nach der Bogenlänge $s = s(\varepsilon)$ entstehenden Gleichungen hinzunimmt, wozu dann noch diejenigen des Durchgangs durch drei weitere Punkte von $K(\varepsilon_0)$ hinzukommen, wobei für die zugehörigen u das gleiche Vorzeichen wie bei P_0 verlangt werden darf.

Wenn nun neben P_0 für $\varkappa \to 0$ ein zweiter Grenzpunkt $Q_0 \neq P_0$ entstehen könnte, so läßt sich jetzt die Wahl des Vorzeichens von $\cos\psi$ so treffen, daß $P_0^* Q_0^*$ die Richtung der positiven x-Achse für Φ^* erhält, über der die Vorzeichen von u in der Grenze derart verfügbar sind, daß nur einmal $u > 0$, zweimal aber $u < 0$ entsteht (für $\varkappa > 0$), oder umgekehrt: denn die Substitution M S. 72, Z. 12 v. u. zeigt, daß für $\varkappa = 0$ die Grenzebene im Reellen dreifach (nicht neunfach[4])), im Positiven aber die zu betrachtende offene Halbebene sogar nur *einfach* ist; nach Q_0 wird daher höchstens nur *einer* der fünf betrachteten Schnittpunkte gehen, nach P_0 mindestens vier, von denen drei bereits als regulär zusammenfallend vorausgesetzt worden sind (vgl. o.).

Die derart in P_0 entstehenden Gleichungen ergeben (nach einer elementaren Durchrechnung) für $\varkappa \to 0$ die Bedingungen:

$$(X' + vY')(Z' + uY') \to 0 \text{ (Asymptotenlinien)};$$

$$v(X' + vY')^3 + u(z' + uy')^3 \to 0,$$

wegen der Beschränktheit auch von $|u|^{-1}$ also auf alle Fälle

$$z' + uy' = 0^{5});$$

Wenn aber hier nicht von vornherein $y' = z' = 0$ ist, so würde sich nun

---

[4]) Ebenso wie etwa für $y^9 = x$, $x = \varkappa y$, $\varkappa \to 0$, der entstehende Punkt im Reellen nur dreifach zu gelten hat.

[5]) Es darf nicht wundernehmen, daß bei einer Frage über höhere Berührung schon die ersten Ableitungen entscheiden: so hat z. B. auch ein vertikales Bogenelement eine vertikale Schmiegebene zur Folge.

ein bestimmtes Vorzeichen für u ergeben, das abzulehnen uns noch freisteht; $y' = 0$ ist also von vornherein notwendig, alle sechs Schnittpunkte sind um P_0 zu gruppieren, und die nächsterhaltene Bedingung lautet dann:

$$z'' + u y'' = 0,$$

was aus den gleichen Gründen zu $y'' = z'' = 0$[6]), d. h. zu einer vertikalen Schmiegebene führt, gegen die Voraussetzung.

Die zur Abschätzung von $|\varkappa|$ benötigten algebraischen Operationen sind damit vorgezeichnet[7]). Bei den höheren Ableitungen hat man zunächst nicht ohne weiteres die Möglichkeit höherer Differentiationen nach s, dafür aber von vornherein das Hinzutreten weiterer Punkte für $\varkappa \to 0$ zu den drei in P_0 regulär vereinigten.

5. Der kaum verallgemeinerungsfähige Charakter der obigen Überlegungen ließ die Angabe aller Details nicht als zweckmäßig erscheinen, solange die Möglichkeit gegeben war, daß Herr S. Bernstein, dessen Theorie bekanntlich die *allgemeinste* elliptische Differentialgleichung betrifft, auf meine Fragen hin (M § 11) die auch sonst in der Literatur[8]) gewünschte Ergänzung seiner Darstellung geben würde. Dies ist jetzt erfreulicherweise tatsächlich geschehen (Math. Ann. **95**, S. 585—594); danach wären in meiner eigenen Arbeit nachträglich als neu nur die Hilfssätze sowie die Ausdehnung der Lösung auf nichtanalytische Fälle zu bezeichnen.

---

[6]) In meiner Arbeit bin ich (S. 72, Z. 4 v. u.; S. 75, Z. 21) auch nicht weiter als zu $y' = y'' = 0$ gegangen.

[7]) Bei den m-ten z-Ableitungen sind hierbei auf der Randkurve beschränkte $(2m+1)$-te Ableitungen nach der Bogenlänge vorauszusetzen.

[8]) Vgl. Enzyklopädie II C 12, S. 1326.

(Eingegangen am 20. 4. 1926.)

Berichtigung

zu dem Aufsatz von L. Mandelstam und J. Tamm: „Elektrodynamik der anisotropen Medien in der speziellen Relativitätstheorie“, Math. Ann. **95**, S. 154—160.

S. 157, Z. 14, Z. 16, Z. 17 v. o. und Z. 3 v. u., ebenso S. 158, Gl. (10) und Gl. (12) ist an Stelle von δ (mit Indizes) überall s (mit den gleichen Indizes) zu setzen.

S. 158, Gl. (11) rechte obere Ecke

$$\text{lies } -\frac{1}{\varepsilon_1} \text{ statt } -\frac{1}{\varepsilon^2}.$$

S. 158, Fußnote, im Nenner der linken Seite der unteren Formel

lies s_{pppp} statt S_{pppp}.

S. 159, Z. 2 v. o. lies $s_{\alpha\beta hk}$ statt $s^{\alpha\beta hk}$.