Koeffizientenabschätzungen bei ebenen und räumlichen harmonischen Entwicklungen.

Von

G. Szegö in Königsberg.

Eine im Einheitskreise $x^2 + y^2 < 1$ reguläre harmonische Funktion $u(x, y)$ läßt sich bekanntlich daselbst in eine nach Kreisfunktionen fortschreitende Reihe

$$(\mathrm{k}) \qquad u(x,y) = k_0(x,y) + k_1(x,y) + k_2(x,y) + \ldots + k_m(x,y) + \ldots$$

entwickeln; hierbei ist $k_m(x, y)$ ein homogenes harmonisches Polynom m-ten Grades, das in Polarkoordinaten r, φ $(x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi)$ geschrieben die besonders einfache Gestalt

$$(1) \qquad r^m f_m(\varphi) = r^m (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi)$$

besitzt, wo a_m und b_m Konstanten sind.

Eine in der Einheitskugel $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ reguläre harmonische Funktion $U(x, y, z)$ läßt sich bekanntlich daselbst in eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe

$$(\mathrm{K}) \qquad \begin{aligned} U(x,y,z) = K_0(x,y,z) + K_1(x,y,z) + K_2(x,y,z) + \ldots \\ + K_m(x,y,z) + \ldots \end{aligned}$$

entwickeln; hierbei ist $K_m(x, y, z)$ ein homogenes harmonisches Polynom m-ten Grades, das in Polarkoordinaten r, θ, φ $(x = r\sin\theta\cos\varphi,$ $y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta)$ geschrieben die Gestalt

$$(1') \qquad \begin{aligned} & r^m F_m(\theta, \varphi) \\ & = r^m \left(a_m P_m(\cos\theta) + \sum_{\nu=1}^{m} (a_{m\nu}\cos\nu\varphi + b_{m\nu}\sin\nu\varphi) P_m^\nu(\cos\theta) \right) \end{aligned}$$

besitzt, wo $a_m, a_{m\nu}, b_{m\nu}$ Konstanten sind und $P_m(\xi)$ das m-te Legendresche Polynom, $P_m^\nu(\xi)$ die sogenannten *zugeordneten Funktionen* bezeichnen, d. h.

$$(2) \qquad P_m^\nu(\cos\theta) = \sin^\nu\theta\, P_m^{(\nu)}(\cos\theta).$$

In beiden Fällen kann die fragliche harmonische Funktion im Innern ihres Definitionsbereiches durch das sogenannte Poissonsche Integral dargestellt werden. Es ist für $r < 1$

$$(3)\qquad \begin{aligned} & u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\ & = \frac{1}{2\pi}\lim_{\varrho\to 1}\int_0^{2\pi} u(\varrho\cos\bar\varphi, \varrho\sin\bar\varphi)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\bar\varphi-\varphi)+r^2}\,d\bar\varphi, \end{aligned}$$

$$(3')\qquad \begin{aligned} & U(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta) \\ & = \frac{1}{4\pi}\lim_{\varrho\to 1}\iint_E U(\varrho\sin\bar\theta\cos\bar\varphi,\ \varrho\sin\bar\theta\sin\bar\varphi,\ \varrho\cos\bar\theta)\cdot \\ & \cdot\frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\sigma, \end{aligned}$$

wobei γ die sphärische Distanz der Punkte mit den Polarkoordinaten $(1, \bar\theta, \bar\varphi)$ bzw. $(1, \theta, \varphi)$ bezeichnet und $d\sigma = \sin\bar\theta\, d\bar\theta\, d\bar\varphi$ das Flächenelement der Einheitskugel E ist. Mit Beachtung der Entwicklungen

$$(4)\qquad \mathfrak{k}(r,\varphi) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2} = 1 + 2r\cos\varphi + 2r^2\cos 2\varphi + \ldots,$$

$$(4')\qquad \begin{aligned} & \mathfrak{K}(r,\gamma) = \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{\frac{3}{2}}} \\ & = P_0(\cos\gamma) + 3r\,P_1(\cos\gamma) + 5r^2\,P_2(\cos\gamma) + \ldots \end{aligned}$$

erhält man also für das allgemeine Glied von (k) bzw. (K):

$$(5)\qquad k_m(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r^m\frac{\varepsilon_m}{2\pi}\lim_{\varrho\to 1}\int_0^{2\pi} u(\varrho\cos\bar\varphi, \varrho\sin\bar\varphi)\cos m(\bar\varphi-\varphi)\,d\bar\varphi$$

$$(\varepsilon_0 = 1,\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = 2),$$

$$(5')\qquad \begin{aligned} & K_m(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta) \\ & = r^m\frac{2m+1}{4\pi}\lim_{\varrho\to 1}\iint_E U(\varrho\sin\bar\theta\cos\bar\varphi, \varrho\sin\bar\theta\sin\bar\varphi, \varrho\cos\bar\theta)\,P_m(\cos\gamma)\,d\sigma \end{aligned}$$

$$(\cos\gamma = \cos\bar\theta\cos\theta + \sin\bar\theta\sin\theta\cos(\bar\varphi-\varphi)).$$

Die Analogie dieser beiden Entwicklungen springt sofort in die Augen. Sie weiter zu verfolgen, bildet das Ziel der vorliegenden Arbeit. Hinsichtlich der Entwicklung (k) sind wegen ihrer Beziehung zur Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen zahlreiche Eigenschaften bekannt. Besonders eingehend sind sie bei einer im Einheitskreise regulären *positiven* harmonischen Funktion $u(x, y)$ untersucht worden[1]). Demgegenüber scheinen ähnliche Fragen bezüglich der zu einer räumlichen harmonischen Funktion $U(x, y, z)$ gehörenden Entwicklung (K) bisher nur geringe Beachtung gefunden zu haben[2]).

Wir wollen uns hier in erster Linie mit denjenigen Fragen beschäftigen, welche sich auf den Zusammenhang zwischen dem Wertevorrat der gegebenen Funktion und den Eigenschaften der einzelnen Glieder ihrer Entwicklung (k) bzw. (K) beziehen.

In dieser Richtung ist eine Bemerkung von G. Pick zu erwähnen[3]), die einer bekannten Eigenschaft von ebenen harmonischen Funktionen gegenüberzustellen ist. Diese Eigenschaft spielt in der Carathéodoryschen Theorie der positiven harmonischen Funktionen zweier Veränderlichen[4]) eine Rolle und kann folgendermaßen formuliert werden:

I. *Es sei* $u(x, y)$ *regulär harmonisch und positiv für* $x^2 + y^2 < 1$; *in ihrer Entwicklung* (k) *nach Kreisfunktionen sei ferner*

$$k_0(x, y) = 1.$$

Dann ist für $x^2 + y^2 \leqq 1$

$$|k_1(x, y)| \leqq 2. \tag{6}$$

Für die Funktion

$$u(x, y) = \mathfrak{k}(r, \varphi - \varphi_0) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi - \varphi_0) + r^2}$$

tritt hier bei $r = 1$, $\varphi \equiv \varphi_0 \pmod{\pi}$ das Gleichheitszeichen ein, so daß die Konstante 2 durch keine kleinere ersetzt werden kann.

Nun kann die erwähnte Picksche Bemerkung wie folgt ausgesprochen werden:

---

[1]) Vgl. insbesondere C. Carathéodory, Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen [Mathematische Annalen **64** (1907), S. 95–115]; O. Toeplitz, Über die Fouriersche Entwicklung positiver Funktionen [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **32** (1911), S. 191–192]; C. Carathéodory, Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **32** (1911), S. 193–217].

[2]) Eine Ausnahme dürfte die Untersuchung der Entwicklung (K) auf der Kugeloberfläche, d. h. die Theorie der Laplaceschen Reihe bilden, welche — entsprechend der Theorie der Fourierschen Reihe — bereits eine große Literatur besitzt. Vgl. die Zusammenstellung bei L. Fejér, Über die Summabilität der Laplaceschen Reihe durch arithmetische Mittel [Mathematische Zeitschrift **24** (1925), S. 267–284], Fußnote [1]) u. [2]).

[3]) G. Pick, Ein Abschätzungssatz für positive Newtonsche Potentiale [Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **23** (1915), S. 329–332]; Über positive harmonische Funktionen [Mathematische Zeitschrift **1** (1918), S. 44–51].

[4]) Vgl. die zweite, unter [1]) zitierte Abhandlung von C. Carathéodory.

II. *Es sei $U(x, y, z)$ regulär harmonisch und positiv für $x^2 + y^2 + z^2 < 1$; in ihrer Entwicklung* (K) *nach Kugelfunktionen sei ferner*

$$K_0(x, y, z) = 1.$$

Dann ist für $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$

$$(6') \qquad |K_1(x, y, z)| \leqq 3.$$

Für die Funktion

$$U(x, y, z) = \mathfrak{K}(r; \gamma) = \frac{1 - r^2}{(1 - 2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

wo $\cos\gamma = \cos\theta \cos\theta_0 + \sin\theta \sin\theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$ ist, tritt hier bei $r = 1$, $\gamma = 0$ oder π das Gleichheitszeichen ein, so daß die Konstante 3 durch keine kleinere ersetzt werden kann.

Diese Aufgaben bilden bloß Spezialfälle von gewissen allgemeineren, bei denen eine vorgeschriebene lineare Kombination der m ersten Glieder der fraglichen Entwicklung für die Gesamtheit der in dem Einheitskreis bzw. in der Einheitskugel regulären positiven harmonischen Funktionen, deren Entwicklung mit 1 beginnt[5]), abgeschätzt wird. In den §§ 1, 2 der vorliegenden Arbeit wird diese Aufgabe allgemein behandelt. Die Gültigkeit des Gleichheitszeichens erfordert eine etwas genauere Untersuchung. Es tritt nur bei gewissen sehr speziellen Funktionen ein, die man aus den Funktionen (4) bzw. (4') auf einfache Weise aufbauen kann.

Der auf ebene harmonische Funktionen bezügliche Teil dieses Ergebnisses ist durch einen früheren Satz von Herrn I. Schur bekannt[6]). Seine Methode beruht auf gewissen Sätzen der von ihm stammenden Theorie beschränkter Potenzreihen[7]), scheint also einer Übertragung auf den Raum kaum fähig zu sein. Außerdem wären aber noch andere Wege zu diesem Satze denkbar. Man könnte z. B. die Carathéodorysche Theorie heranziehen[8]) oder sich auf einen Satz von F. Riesz[9]) über die Darstellbarkeit einer

---

[5]) Diese Bedingung kann auch so aufgefaßt werden, daß der Mittelwert unserer Funktion auf den Kreislinien bzw. Kugelflächen um den Nullpunkt gleich 1 ist, oder auch so, daß die Funktion im Nullpunkt gleich 1 ist.

[6]) I. Schur, Über die Koeffizientensummen einer Potenzreihe mit positivem reellen Teil [Archiv der Mathematik und Physik (3) 27 (1918), S. 126–135], s. insb. Satz III.

[7]) I. Schur, Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind [Journal für Mathematik **147** (1917), S. 205–232; **148** (1918), S. 122–145].

[8]) Vgl. eine Andeutung bei I. Schur, a. a. O. [6]), S. 134.

[9]) F. Riesz, Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales [Annales de l'École Normale Supérieure (3) 28 (1911), S. 33–62], vgl. S. 58–61. — Ein anderer Beweis findet sich bei G. Herglotz, Über Potenzreihen mit positivem reellen Teil im Einheitskreis [Leipziger Berichte **63** (1911), S. 501–511], § 3.

positiven harmonischen Funktion als Stieltjes-Integral stützen. Keines von diesen beiden Hilfsmitteln ist bisher auf den Raum übertragen worden. Wir haben uns also genötigt gesehen, für den ebenen Fall in § 1 einen neuen einfachen Beweis auszuarbeiten, den man in dem räumlichen Falle ohne größere Änderungen wiederholen kann (§ 2).

In § 3 werden diese allgemeinen Resultate auf den oben formulierten Pickschen Satz II angewendet.

Als ein weiterer Spezialfall wird in § 4 ein Satz des Herrn I. Schur[10]) über die Abschnitte von positiven harmonischen Funktionen zweier Veränderlichen auf drei Veränderliche übertragen. Man betrachte wieder die Entwicklung einer im Einheitskreise bzw. in der Einheitskugel regulären und positiven harmonischen Funktion nach Kreis- bzw. Kugelfunktionen. Bekanntlich sind dann die Abschnitte dieser Entwicklungen nicht notwendig sämtlich positiv. Sie können sogar im Einheitskreise bzw. in der Einheitskugel nach unten unbeschränkt sein[11]). Wir wollen uns die fragliche Entwicklung so normiert denken, daß das Anfangsglied $k_0(x, y)$ bzw. $K_0(x, y, z)$ gleich 1 ist. Der m-te Abschnitt besitzt dann in dem Einheitskreise bzw. in der Einheitskugel ein wohlbestimmtes Minimum. Wir bezeichnen mit μ_m die untere Grenze dieser Minima für die Gesamtheit aller harmonischen Funktionen der betrachteten Art; dann gilt nach I. Schur in dem ebenen Falle

$$(7) \qquad \lim_{m \to \infty} \frac{\mu_m}{2m} = \operatorname{Min} \frac{\sin x}{x} \qquad (x \text{ reell}).$$

Im räumlichen Falle ist nun, wie in § 4 gezeigt wird,

$$(7') \qquad \lim_{m \to \infty} \frac{\mu_m}{2m^2} = \operatorname{Min} \frac{J_1(x)}{x} \qquad (x \text{ reell}),$$

wo $J_1(x)$ die erste Besselsche Funktion bezeichnet.

§ 5 beschäftigt sich mit dem ebenfalls hierher gehörigen räumlichen Gegenstücke zu einer interessanten Bemerkung der Herren W. Rogosinski und L. Fejér[12]), die folgendermaßen zu formulieren ist. Während die Abschnitte einer in dem Einheitskreise regulären positiven harmonischen

[10]) Vgl. a. a. O. [6]), S. 128.

[11]) Dies ist z. B. der Fall bei den Funktionen (4) und (4′). Vgl. übrigens auch § 4.

[12]) W. Rogosinski, Über Bildschranken bei Potenzreihen und ihren Abschnitten [Mathematische Zeitschrift **17** (1923), S. 260—276], vgl. § 3. — L. Fejér, Über die Positivität von Summen, die nach trigonometrischen oder Legendreschen Funktionen fortschreiten (Erste Mitteilung) [Acta litterarum ac scientiarum regiae universitatis hungaricae Francisco-Josephinae, secto scientiarum mathematicarum **2** (1925), S. 75—86], vgl. Theorem IV. — Fejér betrachtet hier auch harmonische Funktionen und nicht nur Potenzreihen wie Rogosinski.

Funktion, wie oben erwähnt, nicht notwendig in dem ganzen Einheitskreise positiv sind, gilt dies stets (für alle Abschnitte) in dem kleineren Kreise

$$x^2+y^2<\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Hierbei kann die Zahl $\frac{1}{2}$ durch keine größere ersetzt werden. Bei räumlichen harmonischen Funktionen, die in der Einheitskugel regulär und positiv sind, gilt nun Analoges in der Kugel

$$x^2+y^2+z^2<\left(\frac{1}{3}\right)^2.$$

Auch hier kann die Zahl $\frac{1}{3}$ durch keine kleinere ersetzt werden.

Während bisher nur *unendliche* harmonische Entwicklungen betrachtet worden sind, beschäftigt sich der zweite Teil der vorliegenden Arbeit mit *abbrechenden* harmonischen Entwicklungen, d. h. mit harmonischen Polynomen eines gegebenen Grades n. Für diese Unterklasse der harmonischen Entwicklungen lassen sich manche Abschätzungssätze verschärfen. So kann ein älterer Satz von Herrn L. Fejér über nichtnegative trigonometrische Polynome[13]) als eine Verschärfung des Satzes I aufgefaßt werden, wenn man sich auf die Gesamtheit der ebenen harmonischen Polynome n-ten Grades beschränkt. An Stelle der Schranke 2 von Satz I tritt dann $2\cos\frac{\pi}{n+2}$. In § 6 wird für diesen Satz ein neuer, auf der Benutzung von Einheitswurzeln beruhender Beweis mitgeteilt. § 7 bringt eine in ähnlichem Sinne aufzufassende Verschärfung des Pickschen Satzes II, die also das Analogon des in § 6 behandelten Fejérschen Satzes darstellt. An Stelle der Schranke 3 von Satz II tritt dann eine Zahl von der Form $3\varrho_n$, wobei $\varrho_n<1$ auf einfache Weise mit Hilfe der Nullstellen der Legendreschen und verwandten Polynome charakterisierbar ist.

§ 8 überträgt einen anderen Satz von L. Fejér über nichtnegative trigonometrische Polynome[14]), den man ebenfalls als eine Aussage über ebene harmonische Polynome auffassen kann, auf den räumlichen Fall. Man betrachte nämlich die Gesamtheit aller harmonischen Polynome n-ten Grades $u(x,y)$ bzw. $U(x,y,z)$, die im Einheitskreise bzw. in der Einheitskugel nichtnegativ sind und im Anfangspunkt den Wert 1 haben[15]). Dann ist nach L. Fejér

$$u(x,y)\leqq n+1 \quad \text{für} \quad x^2+y^2\leqq 1. \tag{8}$$

[13]) L. Fejér, Über nichtnegative trigonometrische Polynome [Journal für Mathematik **146** (1915), S. 53–82], S. 79. Hier findet sich der Satz allerdings nur für Kosinuspolynome.

[14]) A. a. O. [13]), S. 65–67. Vgl. auch L. Fejér, Sur les polynomes harmoniques; Sur les polynomes trigonométriques [Comptes Rendus **157** (1913), S. 506–509, 571–574].

[15]) Vgl. die Bemerkung unter [5]).

Das in § 7 bewiesene analoge Resultat lautet:

$$(8') \quad U(x,y,z) \leqq \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 - \frac{1-(-1)^n}{8} \quad \text{für} \quad x^2+y^2+z^2 \leqq 1.$$

Der Beweis der Behauptungen von §§ 7, 8 kann auf gewisse, längst gelöste Aufgaben über Polynome einer Veränderlichen zurückgeführt werden, die auf diese Weise eine neue Deutung erfahren.

Inhalt.

I. Teil. Unendliche harmonische Entwicklungen.

§ 1.

Koeffizientenabschätzungen bei ebenen harmonischen Funktionen.

1. Es sei $u(x, y)$ eine im Einheitskreise $x^2+y^2<1$ reguläre und positive harmonische Funktion, deren Entwicklung nach Kreisfunktionen

$$(\mathrm{k}) \quad u(x, y) = k_0(x, y) + k_1(x, y) + k_2(x, y) + \ldots + k_m(x, y) + \ldots$$

mit $k_0(x, y) = 1$ beginnt; d. h.

$$(9) \qquad u(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi)\, d\varphi = 1 \qquad (\varrho < 1).$$

Es seien ferner $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ $(m \geqq 1)$ gegebene reelle Konstanten, die nicht sämtlich verschwinden. Wir fragen nach dem Minimum und Maximum des harmonischen Polynoms

$$(10) \qquad \lambda_0 k_0(x, y) + \lambda_1 k_1(x, y) + \ldots + \lambda_m k_m(x, y),$$

während $u(x, y)$ die Gesamtheit aller harmonischen Funktionen der erwähnten Art durchläuft und (x, y) im Einheitskreise $x^2 + y^2 \leqq 1$ beliebig beweglich ist.

Diese Aufgabe ist auf Grund der Integralformel (5) bekanntlich leicht zu lösen. Die Extrema eines festen Polynoms werden im Einheitskreise am Rande erreicht. Man kann sich also auf derartige Werte beschränken. Es gilt nun

$$\sum_{\nu=0}^{m} \lambda_\nu k_\nu (\cos\varphi, \sin\varphi)$$

$$(11) \qquad = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varrho \to 1} \int_0^{2\pi} u(\varrho \cos\overline{\varphi}, \varrho \sin\overline{\varphi}) [\lambda_0 + 2\lambda_1 \cos(\overline{\varphi} - \varphi) + \ldots + 2\lambda_m \cos m(\overline{\varphi} - \varphi)] \, d\overline{\varphi}.$$

Setzt man also

$$(12) \qquad t(\varrho, \varphi) = \lambda_0 + 2\lambda_1 \varrho \cos\varphi + \ldots + 2\lambda_m \varrho^m \cos m\varphi$$

und bezeichnen μ, M das Minimum bzw. Maximum des trigonometrischen Polynoms $t(1, \varphi)$, dann folgt aus (11) wegen (9)

$$(13) \qquad \mu \leqq \sum_{\nu=0}^{m} \lambda_\nu k_\nu (\cos\varphi, \sin\varphi) \leqq \mathsf{M}.$$

Wir behaupten, daß μ und M das gesuchte Minimum bzw. Maximum sind. Es seien nämlich $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ die mod 2π inkongruenten Nullstellen des trigonometrischen Polynoms $t(1, \varphi) - \mu$; dann tritt in der unteren Abschätzung (13) gewiß das Zeichen = ein, wenn $\varphi = \varphi_0$ und

$$(14) \qquad u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \sum_{h=1}^{l} g_h \mathfrak{k}(r, \varphi - \varphi_0 - \varphi_h)$$

gesetzt wird, wobei die g_h nichtnegative Konstanten mit der Summe 1 bezeichnen und φ_0 beliebig ist. In der Tat ist wegen (4)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{k}(\varrho, \overline{\varphi} - \varphi_0 - \varphi_h) t(1, \overline{\varphi} - \varphi_0) \, d\overline{\varphi} = t(\varrho, \varphi_h),$$

so daß nach (11)

$$\sum_{\nu=0}^{m} \lambda_\nu k_\nu (\cos\varphi_0, \sin\varphi_0) = \lim_{\varrho \to 1} \sum_{h=1}^{l} g_h t(\varrho, \varphi_h) = \sum_{h=1}^{l} g_h t(1, \varphi_h) = \mu.$$

Ähnlich wird gezeigt, daß auch bei der oberen Abschätzung (13) das Gleichheitszeichen eintreten kann.

2. Etwas tiefer liegt die Tatsache, daß der eben angegebene Fall der einzige ist, in dem in der unteren Abschätzung (13) das Gleichheitszeichen eintreten kann[16]). (Ähnlich bei der oberen Abschätzung.)

[16]) Vgl. die Andeutungen bei G. Pick, a. a. O. [3]), S. 331–332.

Es sei nämlich $u(x, y)$ eine solche Funktion, daß für ein gewisses φ_0

$$(15) \qquad \sum_{\nu=0}^{m} \lambda_\nu k_\nu(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0) = \mu$$

ausfällt. Es muß dann

$$\lim_{\varrho \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\varrho\cos\overline{\varphi}, \varrho\sin\overline{\varphi})\, t(1, \overline{\varphi} - \varphi_0)\, d\varphi$$

$$= \lim_{\varrho \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\varrho\cos(\overline{\varphi} + \varphi_0), \varrho\sin(\overline{\varphi} + \varphi_0))\, t(1, \overline{\varphi})\, d\overline{\varphi} = \mu,$$

d. h.

$$(16) \quad \lim_{\varrho \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\varrho\cos(\overline{\varphi} + \varphi_0), \varrho\sin(\overline{\varphi} + \varphi_0))\,[t(1, \overline{\varphi}) - \mu]\, d\overline{\varphi} = 0$$

sein.

Wir wollen zunächst der Einfachheit halber $\varphi_0 = 0$ setzen. Es seien, wie oben, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ die mod 2π inkongruenten Nullstellen von $t(1, \varphi) - \mu$. Wir zeigen zuerst, daß, unter I ein beliebiges abgeschlossenes Intervall verstanden, das keine diesen Nullstellen mod 2π kongruenten Stellen enthält,

$$(17) \qquad \lim_{\varrho \to 1} \int_I u(\varrho\cos\overline{\varphi}, \varrho\sin\overline{\varphi})\, d\overline{\varphi} = 0$$

gilt.

Der Integrand in (16) ist nichtnegativ, so daß aus (16) für $\varphi_0 = 0$

$$\lim_{\varrho \to 1} \int_I u(\varrho\cos\overline{\varphi}, \varrho\sin\overline{\varphi})\,[t(1, \overline{\varphi}) - \mu]\, d\overline{\varphi} = 0$$

hervorgeht. Für genügend kleine Werte von $1 - \varrho$ ist aber auf I

$$t(1, \overline{\varphi}) - \mu > \alpha,$$

wo α eine feste (von I abhängige) positive Zahl bezeichnet. Hieraus folgt die Behauptung.

3. Es seien nun $I_1, I_2, \ldots, I_l$ beliebige abgeschlossene Intervalle, welche keine gemeinsamen oder mod 2π kongruenten Punkte haben und bzw. $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ enthalten. Wir zeigen, daß für $h = 1, 2, \ldots, l$

$$(18) \qquad \lim_{\varrho \to 1} \int_{I_h} u(\varrho\cos\overline{\varphi}, \varrho\sin\overline{\varphi})\, d\overline{\varphi} = 2\pi g_h$$

ist, wo die g_h selbstverständlich $\geqq 0$ sind und die Summe 1 haben. (Sie sind wegen (16) unabhängig von der speziellen Wahl der Intervalle I_h.)

Es sei $t(\varphi)$ ein beliebiges trigonometrisches Polynom. Dann ist

$$\lim_{\varrho \to 1} \int_0^{2\pi} u(\varrho\cos\overline{\varphi}, \varrho\sin\overline{\varphi})\, t(\overline{\varphi})\, d\overline{\varphi}$$

vorhanden. Hieraus folgt mit Beachtung von (17) auch die Existenz von

$$(19) \qquad \lim_{\varrho \to 1} \sum_{h=1}^{l} \int_{I_h} u(\varrho\cos\overline{\varphi}, \varrho\sin\overline{\varphi})\, t(\overline{\varphi})\, d\overline{\varphi}.$$

Wir behaupten ferner die Existenz von

$$(20) \qquad \lim_{\varrho \to 1} \sum_{h=1}^{l} t(\varphi_h) \int_{I_h} u(\varrho\cos\overline{\varphi}, \varrho\sin\overline{\varphi})\, d\overline{\varphi}.$$

Es sei nämlich $\varepsilon > 0$ und $\overline{I}_h$ ein φ_h enthaltendes Teilintervall von I_h, auf dem

$$|t(\varphi) - t(\varphi_h)| < \varepsilon.$$

Die Differenz der beiden Summen in (19) und (20) ist dann absolut genommen kleiner als

$$\varepsilon \sum_{h=1}^{l} \int_{\overline{I}_h} u(\varrho\cos\overline{\varphi}, \varrho\sin\overline{\varphi})\, d\overline{\varphi} + 2G \sum_{h=1}^{l} \int_{I_h - \overline{I}_h} u(\varrho\cos\overline{\varphi}, \varrho\sin\overline{\varphi})\, d\overline{\varphi},$$

wobei $G = \operatorname{Max} |t(\varphi)|$ ist. Das zweite Glied strebt für $\varrho \to 1$ gegen 0, das erste ist

$$< \varepsilon \int_0^{2\pi} u(\varrho\cos\overline{\varphi}, \varrho\sin\overline{\varphi})\, d\overline{\varphi} = 2\pi\varepsilon.$$

Setzt man nun in (20) der Reihe nach

$$t(\varphi) = e^{i(k-1)\varphi} \qquad (k = 1, 2, \ldots, l),$$ [17])

so ergibt sich die Existenz von

$$\lim_{\varrho \to 1} \sum_{h=1}^{l} e^{i(k-1)\varphi_h} \int_{I_h} u(\varrho\cos\overline{\varphi}, \varrho\sin\overline{\varphi})\, d\overline{\varphi} \qquad (k = 1, 2, \ldots, l);$$

da die Determinante

$$[e^{i(k-1)\varphi_h}]_{(h, k = 1, 2, \ldots, l)}$$

von Null verschieden ist, folgen hieraus die behaupteten Gleichungen (18).

4. Wir schließen aus (17) und (18) auf eine aus der Theorie der singulären Integrale geläufige Weise, daß unter $f(\varphi)$ eine beliebige, für alle Werte von φ stetige, nach 2π periodische Funktion verstanden,

$$\lim_{\varrho \to 1} \int_0^{2\pi} u(\varrho\cos\overline{\varphi}, \varrho\sin\overline{\varphi})\, f(\overline{\varphi})\, d\overline{\varphi} = 2\pi \sum_{h=1}^{l} g_h f(\varphi_h)$$

---

[17]) Die Benutzung von imaginären Größen ist offenbar unwesentlich; sie kann ohne weiteres vermieden werden, indem man etwa $t(\varphi) = \cos(k-1)(\varphi - \varphi')$ setzt, wo φ' so gewählt werden muß, daß die Zahlen $\cos(\varphi_h - \varphi')$ $(h = 1, 2, \ldots, l)$ sämtlich voneinander verschieden ausfallen.

gilt. Insbesondere hat man für $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\lim_{\varrho \to 1} \int_0^{2\pi} u(\varrho \cos \overline{\varphi},\ \varrho \sin \overline{\varphi}) \cos n(\overline{\varphi} - \varphi)\, d\overline{\varphi} = 2\pi \sum_{h=1}^{l} g_h \cos n(\varphi_h - \varphi).$$

Dies heißt aber, daß die Entwicklung der Funktion $u(x, y)$ mit der von

$$\sum_{h=1}^{l} g_h \mathfrak{k}(r, \varphi - \varphi_h)$$

übereinstimmt, woraus (14) (mit $\varphi_0 = 0$) folgt.

Im Falle eines beliebigen φ_0 muß

$$u(r \cos(\varphi + \varphi_0), r \sin(\varphi + \varphi_0)) = \sum_{h=1}^{l} g_h \mathfrak{k}(r, \varphi - \varphi_h)$$

sein, was die Behauptung war.

§ 2.

Koeffizientenabschätzungen bei räumlichen harmonischen Funktionen.

1. Ein Teil der vorangehenden Betrachtungen kann fast ohne Änderung auf den räumlichen Fall übertragen werden.

Es sei $U(x, y, z)$ eine in der Einheitskugel $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ reguläre und positive harmonische Funktion, deren Entwicklung nach Kugelfunktionen

$$\text{(K)} \qquad U(x, y, z) = K_0(x, y, z) + K_1(x, y, z) + K_2(x, y, z) + \ldots + K_m(x, y, z) + \ldots$$

mit $K_0(x, y, z) = 1$ beginnt; d. h.

$$\text{(9')} \quad U(0, 0, 0) = \frac{1}{4\pi} \iint_E U(\varrho \sin \overline{\theta} \cos \overline{\varphi}, \varrho \sin \overline{\theta} \sin \overline{\varphi}, \varrho \cos \overline{\theta})\, d\sigma = 1 \qquad (\varrho < 1),$$

wo $d\sigma$ das Flächenelement der Einheitskugel E bezeichnet. Es seien ferner $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ $(m \geqq 1)$ gegebene reelle Konstanten, die nicht sämtlich verschwinden. Wir fragen nach dem Minimum und Maximum des harmonischen Polynoms

$$\text{(10')} \qquad \lambda_0 K_0(x, y, z) + \lambda_1 K_1(x, y, z) + \ldots + \lambda_m K_m(x, y, z),$$

während $U(x, y, z)$ die Gesamtheit der harmonischen Funktionen der erwähnten Art durchläuft und (x, y, z) in der Einheitskugel $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$ beliebig beweglich ist.

Die Extrema eines festen Polynoms werden in der Einheitskugel am Rande erreicht. Man kann sich also auf derartige Werte beschränken. Es gilt

$$(11') \qquad \sum_{\nu=0}^{m} \lambda_\nu K_\nu(\sin\theta\cos\varphi,\, \sin\theta\sin\varphi,\, \cos\theta)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \lim_{\varrho\to 1} \iint_E U(\varrho\sin\bar\theta\cos\bar\varphi,\, \varrho\sin\bar\theta\sin\bar\varphi,\, \varrho\cos\bar\theta) \sum_{\nu=0}^{m} (2\nu+1)\lambda_\nu P_\nu(\cos\gamma)\, d\sigma,$$

wobei γ die sphärische Distanz der Punkte mit den Polarkoordinaten $(1, \bar\theta, \bar\varphi)$ bzw. $(1, \theta, \varphi)$ bedeutet:

$$\cos\gamma = \cos\bar\theta\cos\theta + \sin\bar\theta\sin\theta\cos(\bar\varphi - \varphi).$$

Setzt man

$$(12') \qquad T(\varrho, \eta) = \sum_{\nu=0}^{m} (2\nu+1)\lambda_\nu \varrho^\nu P_\nu(\cos\eta)$$

und bezeichnen μ, M das Minimum bzw. Maximum von $T(1, \eta)$, so folgt aus (11′) wegen (9′)

$$(13') \qquad \mu \leqq \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu K_\nu(\sin\theta\cos\varphi,\, \sin\theta\sin\varphi,\, \cos\theta) \leqq \mathsf{M}.$$

Die Zahlen μ und M liefern auch hier die Lösung der vorliegenden Aufgabe. Es seien nämlich $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_l$ die im Intervall $0 \leqq \eta \leqq \pi$ befindlichen Nullstellen von $T(1, \eta) - \mu$. Ist $(1, \theta_0, \varphi_0)$ ein beliebiger Punkt der Einheitskugel, so tritt in der unteren Abschätzung (13′) gewiß das Zeichen $=$ ein, wenn $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$ und

$$(14') \qquad U(r\sin\theta\cos\varphi,\, r\sin\theta\sin\varphi,\, r\cos\theta) = \sum_{h=1}^{l} g_h \mathfrak{K}(r, \gamma_h)$$

gesetzt wird. Hier sind die g_h beliebige nichtnegative Konstanten mit der Summe 1; γ_h bezeichnet die sphärische Distanz des variablen Punktes $(1, \theta, \varphi)$ von einem beliebigen Punkte $(1, \theta_h, \varphi_h)$ desjenigen Kreises C_h auf der Einheitskugel, dessen Punkte von $(1, \theta_0, \varphi_0)$ die konstante sphärische Distanz η_h haben. Dies wird ähnlich wie in § 1 durch Beachtung der Gleichung

$$\frac{1}{4\pi} \iint_E \mathfrak{K}(\varrho, \bar\gamma_h)\, T(1, \bar\gamma_0)\, d\sigma = T(\varrho, \eta_h)$$

gezeigt, wobei $\bar\gamma_h$ die sphärische Distanz der Punkte $(1, \bar\theta, \bar\varphi)$, $(1, \theta_h, \varphi_h)$ und $\bar\gamma_0$ die von $(1, \bar\theta, \bar\varphi)$, $(1, \theta_0, \varphi_0)$ bedeutet.

Die Kreise C_h können sich auch auf Punkte reduzieren, nämlich dann und nur dann, wenn $\eta_h = 0$ oder π ist; es handelt sich dann um den Punkt $(1, \theta_0, \varphi_0)$ selbst bzw. um seinen Gegenpol.

2. In dem Falle, wo die Zahlen η_h nicht sämtlich gleich 0 oder π sind, gibt es außer (14′) offenbar noch andere Funktionen $U(x, y, z)$ der gleichen Eigenschaft. In der Tat, es sei f_h eine beliebige, auf C_h definierte monotone Funktion. Dann tritt in der unteren Abschätzung (13′)

das Gleichheitszeichen, wie leicht ersichtlich, auch für die harmonische Funktion

$$(14'') \qquad \sum_{h=1}^{l} \int_{C_h} \mathfrak{K}(r, \gamma_h)\, df_h = \sum_{h=1}^{l} \int_{C_h} \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma_h + r^2)^{\frac{3}{2}}}\, df_h$$

ein; hierbei seien die einzelnen Integrale im Stieltjesschen Sinne gemeint und es sei

$$\sum_{h=1}^{l} \int_{C_h} df_h = 1\,.$$

(Für den Fall $\eta_h = 0$ oder π sei unter C_h der Punkt $(1, \theta_0, \varphi_0)$ bzw. sein Gegenpol verstanden; das h-te Integral ist dann durch ein einziges Glied von der Form des h-ten Gliedes in $(14')$ zu ersetzen, an Stelle von $\int_{C_h} df_h$ in der letzten Summe tritt dann einfach g_h.)

3. Wir kommen nun auf die Aufgabe zu zeigen, daß die eben erwähnten Funktionen $(14'')$ die einzigen sind, für welche in der unteren Abschätzung $(13')$ das Gleichheitszeichen gilt. (Ähnlich bei der oberen Abschätzung.)

Es sei hier z. B. für $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$ das Zeichen $=$ erreicht. Dann gilt

$$(16') \quad \lim_{\varrho \to 1} \frac{1}{4\pi} \iint_E U(\varrho \sin\bar\theta \cos\bar\varphi,\ \varrho \sin\bar\theta \sin\bar\varphi,\ \varrho\cos\bar\theta)\,[T(1, \bar\gamma_0) - \mu]\, d\sigma = 0,$$

wobei $\bar\gamma_0$ die obige Bedeutung hat.

Wir wollen zunächst annehmen, daß $T(1, \eta) - \mu$ nur die beiden Nullstellen 0 und π hat. Dann gelten die Überlegungen von § 1 fast ohne Änderung.

Es sei I ein beliebiger (zusammenhängender und Jordanschen Inhalt besitzender) Bereich auf der Einheitskugel, der den Punkt $(1, \theta_0, \varphi_0)$ und seinen Gegenpol nicht enthält. Man zeigt wie in § 1, 2, daß

$$(17') \qquad \lim_{\varrho \to 1} \iint_I U(\varrho \sin\bar\theta \cos\bar\varphi,\ \varrho \sin\bar\theta \sin\bar\varphi,\ \varrho\cos\bar\theta)\, d\sigma = 0\,.$$

Es seien ferner I_1 und I_2 zwei Kalotten um $(1, \theta_0, \varphi_0)$ bzw. um seinen Gegenpol. Es ist wegen $(9')$, $(17')$

$$\lim_{\varrho \to 1} \Big(\iint_{I_1} + \iint_{I_2}\Big) U(\varrho \sin\bar\theta \cos\bar\varphi,\ \varrho \sin\bar\theta \sin\bar\varphi,\ \varrho\cos\bar\theta)\, d\sigma = 4\pi\,.$$

Ferner existiert (vgl. § 1, 3)

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varrho \to 1} \iint_E U(\varrho \sin\bar\theta \cos\bar\varphi,\ \varrho \sin\bar\theta \sin\bar\varphi,\ \varrho\cos\bar\theta) \cos\bar\gamma_0\, d\sigma \\
&= \lim_{\varrho \to 1} \Big(\iint_{I_1} + \iint_{I_2}\Big) U(\varrho \sin\bar\theta \cos\bar\varphi,\ \varrho \sin\bar\theta \sin\bar\varphi,\ \varrho\cos\bar\theta) \cos\bar\gamma_0\, d\sigma \\
&= \lim_{\varrho \to 1} \Big(\iint_{I_1} - \iint_{I_2}\Big) U(\varrho \sin\bar\theta \cos\bar\varphi,\ \varrho \sin\bar\theta \sin\bar\varphi,\ \varrho\cos\bar\theta)\, d\sigma;
\end{aligned}$$

folglich existieren auch die Grenzwerte

$$\lim_{\varrho \to 1} \iint_{I_h} U(\varrho \sin\bar\theta \cos\bar\varphi,\ \varrho \sin\bar\theta \sin\bar\varphi,\ \varrho\cos\bar\theta)\, d\sigma = 4\pi g_h \geqq 0,$$
$$(h = 1, 2).$$

Hieraus folgt (vgl. § 1, 4) für eine beliebige, auf der Einheitskugel stetige Funktion $F(\theta, \varphi)$

$$\lim_{\varrho \to 1} \iint_{E} U(\varrho \sin\bar\theta \cos\bar\varphi,\ \varrho \sin\bar\theta \sin\bar\varphi,\ \varrho\cos\bar\theta)\, F(\bar\theta, \bar\varphi)\, d\sigma$$
$$= 4\pi [g_1 F(\theta_0, \varphi_0) + g_2 F(\pi - \theta_0, -\varphi_0)].$$

Setzt man insbesondere

$$F(\bar\theta, \bar\varphi) = P_n(\cos\bar\theta\cos\theta + \sin\bar\theta\sin\theta\cos(\bar\varphi - \varphi)) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

so ergibt sich

$$U(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta) = g_1\, \mathfrak{K}(r, \gamma_0) + g_2\, \mathfrak{K}(r, \pi - \gamma_0),$$

wobei γ_0 die sphärische Distanz der Punkte $(1, \theta, \varphi)$, $(1, \theta_0, \varphi_0)$ ist.

Diese Betrachtung vereinfacht sich auf offensichtliche Weise, wenn $T(1, \eta) - \mu$ im Intervall $(0, \pi)$ nur einmal (für $\eta = 0$ oder $\eta = \pi$) verschwindet.

4. Im allgemeinen Falle ist es zweckmäßig, zunächst eine Transformation der Einheitskugel derart vorzunehmen, daß $(1, \theta_0, \varphi_0)$ in den Nordpol übergeht. Die Funktion $U(x, y, z)$ verwandelt sich dann wieder in eine positive harmonische Funktion mit dem Wert 1 im Anfangspunkt, die die Gleichung (16′) erfüllt; hier ist jetzt einfach $\bar\gamma_0 = \bar\theta$ zu setzen. Man zeigt dann, wie oben, die Gleichung (17′), wobei I keine Punkte (auch am Rande keine) mit der Poldistanz η_h $(h = 1, 2, \ldots, l)$ enthält.

Es sei jetzt I_h der streifenartige Bereich, begrenzt von den beiden Breitenkreisen, deren Punkte die konstante Poldistanz $\eta_h - \delta$ bzw. $\eta_h + \delta$ haben; hierbei sei $\delta > 0$ so klein, daß die Bereiche I_h keine gemeinsamen Punkte aufweisen[18]). Dann existiert

$$(19') \quad \lim_{\varrho \to 1} \sum_{h=1}^{l} \iint_{I_h} U(\varrho\sin\bar\theta\cos\bar\varphi,\ \varrho\sin\bar\theta\sin\bar\varphi,\ \varrho\cos\bar\theta)\, P(\cos\bar\gamma)\, d\sigma,$$

wo $P(\xi)$ ein beliebiges Polynom ist und $\bar\gamma$ die sphärische Distanz von $(1, \bar\theta, \bar\varphi)$ von einem beliebigen Punkte $(1, \theta, \varphi)$ bezeichnet. Setzt man hier an Stelle von $P(\cos\bar\gamma)$ der Reihe nach

$$P_0(\cos\bar\theta),\ P_1(\cos\bar\theta), \ldots, P_{l-1}(\cos\bar\theta)$$

[18]) Für $\eta_h = 0$ oder π fehlt die eine Hälfte von I_h; es ist dann eine Kalotte.

ein, so ergibt sich, wie in § 1, 3, daß auch

$$(18') \quad \lim_{\varrho \to 1} \iint_{I_h} U(\varrho \sin\bar\theta \cos\bar\varphi,\ \varrho \sin\bar\theta \sin\bar\varphi,\ \varrho\cos\bar\theta)\, d\sigma = 4\pi g_h = 4\pi g_h^{(0)}$$

existiert;

$$g_h \geqq 0, \quad \sum_{h=1}^{l} g_h = 1.$$

Aus (19′) folgt ferner, indem man $P(\xi) = P_n(\xi)$ setzt und das Additionstheorem der Kugelfunktionen beachtet, die Existenz von

$$\lim_{\varrho \to 1} \sum_{h=1}^{l} \iint_{I_h} U(\varrho \sin\bar\theta \cos\bar\varphi,\ \varrho \sin\bar\theta \sin\bar\varphi,\ \varrho\cos\bar\theta)\, P_n^{\nu}(\cos\bar\theta)\, e^{i\nu\bar\varphi}\, d\sigma,$$

oder von

$$\lim_{\varrho \to 1} \sum_{h=1}^{l} P_n^{\nu}(\cos\eta_h) \iint_{I_h} U(\varrho \sin\bar\theta \cos\bar\varphi,\ \varrho \sin\bar\theta \sin\bar\varphi,\ \varrho\cos\bar\theta)\, e^{i\nu\bar\varphi}\, d\sigma;$$

hierbei ist ν positiv ganz, $n \geqq \nu$. Wegen (2) treten hier tatsächlich nur diejenigen Glieder auf, welche den Nullstellen $\eta_h \neq 0, \pi$ entsprechen. Wenn ihre Anzahl l' ist, so führt das letzte Ergebnis für $n = \nu, \nu + 1, \ldots, \nu + l' - 1$ auf die Existenz von

$$(21) \quad \lim_{\varrho \to 1} \iint_{I_h} U(\varrho \sin\bar\theta \cos\bar\varphi,\ \varrho \sin\bar\theta \sin\bar\varphi,\ \varrho\cos\bar\theta)\, e^{i\nu\bar\varphi}\, d\sigma = 4\pi g_h^{(\nu)}$$
$$(\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Es sei nun h so beschaffen, daß $g_h^{(0)} > 0$. Der Punkt

$$(22) \quad \frac{1}{g_h^{(0)}} \Re\, g_h^{(\nu)}, \quad \frac{1}{g_h^{(0)}} \Im\, g_h^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N)$$

des $2N$-dimensionalen Raumes fällt wegen (18′) in die kleinste konvexe Hülle der Kurve

$$\xi_\nu = \cos\nu\bar\varphi, \quad \eta_\nu = \sin\nu\bar\varphi \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N),$$

wobei $\bar\varphi$ das Intervall $[0, 2\pi]$ durchläuft, und dies für alle N. Ähnliches gilt für den Punkt des $(2N+1)$-dimensionalen Raumes, den man erhält, wenn zu den Koordinaten (22) noch $\frac{1}{g_h^{(0)}} \Re\, g_h^{(N+1)}$ hinzutritt, $N = 1, 2, 3, \ldots$. Nach einem allgemeinen Satz von F. Riesz[19]) gibt es also eine monotone Funktion $f_h(\bar\varphi)$, die man sich auf dem Kreise C_h [20]) gegeben denken kann, derart, daß

$$\int_{C_h} e^{i\nu\bar\varphi}\, df_h = g_h^{(\nu)} \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

[19]) F. Riesz, a. a. O. [9]), S. 56.

[20]) C_h ist der Breitenkreis, dessen Punkte die konstante Poldistanz η_h haben; er liegt offenbar in I_h.

ist. D. h. unter $\bar{\gamma}$ dasselbe wie in (19′) verstanden,

$$\int_{C_h} P_n(\cos\bar{\gamma})\, df_h = \frac{1}{4\pi} \lim_{\varrho\to 1} \iint_{I_h} U(\varrho\sin\bar{\theta}\cos\bar{\varphi},\ \varrho\sin\bar{\theta}\sin\bar{\varphi},\ \varrho\cos\bar{\theta})\, P_n(\cos\bar{\gamma})\, d\sigma.$$

Hieraus schließen wir weiter

$$\frac{1}{4\pi} \lim_{\varrho\to 1} \iint_{E} U(\varrho\sin\bar{\theta}\cos\bar{\varphi},\ \varrho\sin\bar{\theta}\sin\bar{\varphi},\ \varrho\cos\bar{\theta})\, P_n(\cos\bar{\gamma})\, d\sigma$$
$$= \sum_{h=1}^{l} \int_{C_h} P_n(\cos\bar{\gamma})\, df_h,$$

d. h. die Behauptung.

§ 3.

Über einen Satz von G. Pick.

1. Bevor wir auf den wichtigsten Spezialfall von § 2, nämlich auf den in der Einleitung erwähnten Pickschen Satz und auf eine naheliegende Erweiterung desselben kommen, empfiehlt es sich das Analoge in der Ebene vorauszuschicken.

Aus der Carathéodoryschen Theorie ist der folgende, I verallgemeinernde Satz bekannt.

I′. *Es sei* $u(x, y)$ *regulär harmonisch und positiv für* $x^2 + y^2 < 1$; *in ihrer Entwicklung* (k) *nach Kreisfunktionen sei ferner*

$$k_0(x, y) = 1.$$

Dann ist für $x^2 + y^2 \leqq 1$

$$(23)\qquad |k_m(x, y)| \leqq 2 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Schreibt man diese Ungleichung in der Form

$$-2 \leqq k_m(x, y) \leqq 2,$$

so kann sie (für $x^2 + y^2 = 1$) als ein Spezialfall von (13) aufgefaßt werden. Es ist hier

$$t(\varrho, \varphi) = 2\varrho^m \cos m\varphi, \quad \mu = -2, \quad \mathsf{M} = 2.$$

Das Gleichheitszeichen tritt nur für die Funktionen

$$\sum_{h=1}^{m} g_h\, \mathfrak{k}\left(r, \varphi - \varphi_0 + \frac{2\pi h}{m}\right)$$

ein, wo $g_h \geqq 0$, $\sum_{h=1}^{m} g_h = 1$ ist.

2. Das räumliche Analogon von I′, das den Pickschen Satz II als Spezialfall enthält, lautet folgendermaßen:

II′. *Es sei* $U(x, y, z)$ *regulär harmonisch und positiv für* $x^2+y^2+z^2<1$; *in ihrer Entwicklung* (K) *nach Kugelfunktionen sei ferner*

$$K_0(x, y, z) = 1.$$

Dann ist für $x^2+y^2+z^2 \leqq 1$

$$(23') \qquad |K_m(x, y, z)| \leqq 2m+1 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Schreibt man diese Ungleichung in der Form

$$-(2m+1) \leqq K_m(x, y, z) \leqq 2m+1,$$

so kann sie (für $x^2+y^2+z^2=1$) als ein Spezialfall von (13′) aufgefaßt werden. Es ist hier

$$T(\varrho, \eta) = (2m+1)\varrho^m P_m(\cos\eta), \quad \mathsf{M} = 2m+1.$$

Bei ungeradem m ist ferner $\mu = -(2m+1)$, bei geradem m ist $\mu = -\alpha_m(2m+1)$, wobei α_m eine gewisse Zahl mit $0 < \alpha_m < 1$ bezeichnet. Im letzten Falle kann (23′) zu

$$(23'') \qquad -\alpha_m(2m+1) \leqq K_m(x, y, z) \leqq 2m+1 \qquad (x^2+y^2+z^2 \leqq 1)$$

verschärft werden [21]). Das Gleichheitszeichen tritt in (23′) bei geradem m und bei $x = \sin\theta_0\cos\varphi_0$, $y = \sin\theta_0\sin\varphi_0$, $z = \cos\theta_0$ nur für

$$U(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi) = g_1\,\mathfrak{K}(r, \gamma) + g_2\,\mathfrak{K}(r, \pi-\gamma)$$

ein, wo $g_1 \geqq 0$, $g_2 \geqq 0$, $g_1+g_2 = 1$ und γ die sphärische Distanz der Punkte mit den Polarkoordinaten $(1, \theta, \varphi)$ bzw. $(1, \theta_0, \varphi_0)$ ist. Bei ungeradem m tritt die Gleichheit nur für $\mathfrak{K}(r, \gamma)$ oder für $\mathfrak{K}(r, \pi-\gamma)$ ein.

§ 4.

Über die Abschnitte der Entwicklung einer in der Einheitskugel positiven harmonischen Funktion.

1. Die Existenz einer in der Einheitskugel regulären positiven harmonischen Funktion, deren Abschnitte in der Einheitskugel nach unten unbeschränkt sind, folgt unmittelbar aus der bekannten Tatsache, daß es auf der Einheitskugel stetige Funktionen gibt, deren Laplacesche Reihe in einem Punkte der Einheitskugel zwischen $-\infty$ und ∞ oszilliert. Ein besonders einfaches Beispiel für dieses Phänomen stammt von F. Lukács [22]).

---

[21]) Man zeigt leicht, daß wenn m die geraden Zahlen durchlaufend über alle Grenzen wächst,

$$\lim \alpha_m = \operatorname{Min} J_0(x) \qquad (x \text{ reell})$$
$$= -0{,}4028\ldots.$$

[22]) F. Lukács, Über die Laplacesche Reihe [Mathematische Zeitschrift 14 (1922), S. 250–262], Fußnote [16]); vgl. auch L. Fejér, a. a. O. [24]), Fußnote [3]). Diese Beispiele

(Fortsetzung der Fußnote 22 auf nächster Seite.)

Betrachten wir nun den m-ten Abschnitt der Entwicklungen sämtlicher in der Einheitskugel regulären positiven harmonischen Funktionen, die im Nullpunkte gleich 1 sind. Jeder solche Abschnitt besitzt ein wohlbestimmtes Minimum in der Einheitskugel und die untere Grenze (Minimum) μ_m dieser Minima ist nach § 1 gleich

$$\operatorname{Min} \sum_{\nu=0}^{m} (2\nu+1) P_\nu(\xi),$$

wobei ξ das Intervall $[-1, 1]$ durchläuft[23]).

Es gilt nun, wie wir beweisen wollen, *die folgende Grenzwertgleichung*:

$$(24) \qquad \lim_{m\to\infty} \frac{\mu_m}{2m^2} = \operatorname{Min} \frac{J_1(x)}{x} \qquad (x > 0),$$

wo $J_1(x)$ die Besselsche Funktion erster Ordnung bezeichnet.

2. Es ist bekanntlich

$$\lim_{m\to\infty} P_m\left(\cos\frac{\theta}{m}\right) = J_0(\theta),$$

und zwar gleichmäßig in jedem endlichen Intervalle $0 \leqq \theta \leqq \theta_0$. Wenn also $\varepsilon > 0$ vorgeschrieben wird, dann kann ein $\nu_0(\varepsilon)$ so gefunden werden, daß für $\nu > \nu_0(\varepsilon)$

$$\left| P_\nu\left(\cos\frac{\theta}{\nu}\right) - J_0(\theta) \right| < \varepsilon$$

gilt; $0 \leqq \theta \leqq \theta_0$. Es sei nun $m > \nu_0(\varepsilon)$ und $\nu_0(\varepsilon) \leqq \nu \leqq m$; man hat

$$P_\nu\left(\cos\frac{\theta}{m}\right) = P_\nu\left(\cos\frac{\nu}{m}\frac{\theta}{\nu}\right),$$

d. h.

$$\left| P_\nu\left(\cos\frac{\theta}{m}\right) - J_0\left(\frac{\nu}{m}\theta\right) \right| < \varepsilon.$$

Hieraus schließt man, daß der Grenzwert

$$(25) \qquad \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2m^2} \sum_{\nu=0}^{m} (2\nu+1) P_\nu\left(\cos\frac{\theta}{m}\right) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{m} \frac{\nu+\frac{1}{2}}{m} J_0\left(\frac{\nu}{m}\theta\right)$$

$$= \int_0^1 x J_0(\theta x)\, dx = \frac{J_1(\theta)}{\theta}$$

existiert, und zwar gleichmäßig im Intervall $0 \leqq \theta \leqq \theta_0$.

---

müssen eigentlich noch etwas modifiziert werden, damit die Oszillation der Partialsummen zwischen $-\infty$ und $+\infty$ erfolge. Man nehme etwa die Funktion

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \nu^{\frac{1}{4}} \left(P_{\nu^3}(\cos\theta) - P_{\nu^3+2}(\cos\theta)\right).$$

[23]) Das Minimum μ_m von $\sum_{\nu=0}^{m} (2\nu+1) P_\nu(\xi)$ im Intervall $-1 \leqq \xi \leqq 1$ wird wahrscheinlich nur einmal erreicht, und zwar wohl an der größten relativen Minimumstelle. Im Besitze dieses Theorems und auf Grund der Ergebnisse von § 2 wäre es nicht schwer, sämtliche Funktionen zu bestimmen, bei denen μ_m erreicht wird.

3. Anderseits gilt nach Stieltjes

$$(26) \qquad |P_m(\cos\theta)| < \frac{A}{\sqrt{m \sin\theta}} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots;\ 0 < \theta < \pi),$$

wobei A eine absolute Konstante ist[24]). Man hat also bei festem $\theta_0 > 0$ für $\frac{\theta_0}{m} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$, $\nu \geqq 1$,

$$|P_\nu(\cos\theta)| < \frac{A}{\sqrt{\nu \sin\frac{\theta_0}{m}}} < \frac{A}{\sqrt{\frac{2}{\pi}\,\nu\,\frac{\theta_0}{m}}} = \frac{B}{\sqrt{\theta_0}}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{\nu}{m}}},$$

wo B ebenfalls eine absolute Konstante ist. Folglich haben wir für die genannten Werte von θ

$$\left|\sum_{\nu=0}^{m}(2\nu+1)\,P_\nu(\cos\theta)\right| < 1 + \frac{B}{\sqrt{\theta_0}}\sum_{\nu=1}^{m}\sqrt{\frac{m}{\nu}}\,(2\nu+1) < 1 + \frac{C}{\sqrt{\theta_0}}\,m^2,$$

wo C eine absolute Konstante ist. Es ist somit

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{1}{2m^2} \max_{\frac{\theta_0}{m} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}} \left|\sum_{\nu=0}^{m}(2\nu+1)\,P_\nu(\cos\theta)\right| \leqq \frac{1}{2}\,\frac{C}{\sqrt{\theta_0}},$$

d. h. beliebig klein, wenn θ_0 groß genug ist.

Beachtet man schließlich, daß

$$\sum_{\nu=0}^{m}(2\nu+1)\,P_\nu(\xi) = (m+1)\,\frac{P_m(\xi) - P_{m+1}(\xi)}{1-\xi}$$

im Intervall $[-1, 0]$ dem Betrage nach kleiner als $2(m+1)$ ist, so folgt, daß

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{1}{2m^2} \max_{\frac{\theta_0}{m} \leqq \theta \leqq \pi} \left|\sum_{\nu=0}^{m}(2\nu+1)\,P_\nu(\cos\theta)\right|$$

für $\theta_0 \to \infty$ gegen 0 geht. Da $\frac{J_1(\theta)}{\theta}$ für $\theta > 0$ auch negative Werte annimmt, folgt hieraus die Behauptung[25]).

---

[24]) Einen besonders einfachen Beweis für diesen Satz gab neuerdings L. Fejér, Abschätzungen für die Legendreschen und verwandte Polynome [Mathematische Zeitschrift **24** (1925), S. 285–298].

[25]) Anstatt der Stieltjesschen Ungleichung (26) könnte auch die folgende benutzt werden:

$$\sqrt{1-\xi}\,\left|\sum_{\nu=0}^{m}(2\nu+1)\,P_\nu(\xi)\right| < \sqrt{2}\,(m+1) \qquad (-1 \leqq \xi \leqq 1;\ m = 0, 1, 2, \ldots),$$

die man wegen (39), (41) aus einem allgemeinen Satze der Abhandlung: G. Szegö, Über Orthogonalsysteme von Polynomen [Mathematische Zeitschrift **4** (1919), S. 139 bis 151] schließen kann.

§ 5.

Noch ein Satz über Abschnitte.

Es sei $U(x, y, z)$ eine in der Einheitskugel $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ reguläre harmonische Funktion; ferner sei daselbst

$$m < U(x, y, z) < M.$$

Entwickelt man $U(x, y, z)$ in eine Reihe (K) nach Kugelfunktionen, so liegen sämtliche Abschnitte derselben zwischen m und M, wenn der Punkt (x, y, z) innerhalb der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 < \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

gelegen ist.

Es genügt, folgenden Spezialfall zu beweisen: Wenn $U(x, y, z)$ für $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ regulär, harmonisch und positiv ist, dann sind auch die Abschnitte der Entwicklung (K) positiv, vorausgesetzt, daß (x, y, z) innerhalb der vorhin erwähnten Kugel bleibt.

Nach den Ergebnissen von § 2 genügt es also zu zeigen, daß sämtliche Abschnitte der Entwicklung

$$\mathfrak{K}(\varrho, \eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (2\nu + 1) \varrho^\nu P_\nu(\cos\eta)$$

für $\varrho = \frac{1}{3}$ durchweg nichtnegativ ausfallen. Dies ist aber die unmittelbare Folge eines Fejérschen Satzes, nach dem die Summen

$$\Pi_m(\cos\eta) = P_0(\cos\eta) + P_1(\cos\eta) + \ldots + P_m(\cos\eta)$$

für $0 \leqq \eta \leqq \pi$ nichtnegativ sind [26]. In der Tat gilt

$$\sum_{\nu=0}^{m} (2\nu + 1) \varrho^\nu P_\nu(\cos\eta)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m-1} ((2\nu + 1)\varrho^\nu - (2\nu + 3)\varrho^{\nu+1}) \Pi_\nu(\cos\eta) + (2m + 1)\varrho^m \Pi_m(\cos\eta).$$

Die Faktoren neben $\Pi_\nu(\cos\eta)$ sind für $\varrho = \frac{1}{3}$ sämtlich $\geqq 0$, weil ja

$$\frac{2\nu + 1}{2\nu + 3} \geqq \frac{1}{3} = \varrho.$$

Die Betrachtung des ersten Abschnittes der Funktion $\mathfrak{K}(\varrho, \eta)$ lehrt, daß $\frac{1}{3}$ durch keine kleinere Zahl ersetzt werden kann.

---

[26]) L. Fejér, Über die Laplacesche Reihe [Mathematische Annalen 67 (1909), S. 76–109], S. 83–84.

II. Teil. Abbrechende harmonische Entwicklungen.

§ 6.

Verschärfung des Satzes I.

In der Einleitung ist der folgende Fejérsche Satz erwähnt worden, den man als eine Verschärfung von Satz I auffassen kann.

Es sei

$$\varphi(\theta) = 1 + \lambda_1 \cos\theta + \mu_1 \sin\theta + \ldots + \lambda_n \cos n\theta + \mu_n \sin n\theta$$

ein nichtnegatives trigonometrisches Polynom n-ter Ordnung. Dann ist

$$\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2} \leqq 2\cos\frac{\pi}{n+2}. \tag{27}$$

Die Zahl $2\cos\frac{\pi}{n+2}$ kann hier durch keine kleinere ersetzt werden.

Herr Fejér gelangte auf diese Ungleichung durch die a. a. O.[13]) benutzte (zuerst von F. Riesz bewiesene) Parameterdarstellung der nichtnegativen trigonometrischen Polynome. Während es ihm schon früher[27]) gelungen ist, die sonstigen, a. a. O.[13]) bewiesenen Abschätzungssätze auch elementar (d. h. ohne die erwähnte Parameterstellung) zu begründen, war ein derartiger Beweis für den oben formulierten Satz bisher nicht bekannt. Dies soll im folgenden nachgeholt werden.

1. Für $n=1$ ist die Behauptung klar. Für $n \geqq 2$ liegt es nahe, zunächst die folgende Aufgabe zu stellen:

Es ist eine Lösung des Gleichungssystems

$$r_1 \varepsilon_1^k + r_2 \varepsilon_2^k + \ldots + r_n \varepsilon_n^k = \begin{cases} 2\cos\frac{\pi}{n+2} & \text{für } k=0, \\ -1 & \text{für } k=1, \\ 0 & \text{für } k=2,3,\ldots,n, \end{cases} \tag{28}$$

zu ermitteln, für welche

$$r_\nu \geqq 0; \quad |\varepsilon_\nu| = 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

gilt.

Die *Existenz* einer derartigen Lösung folgt unmittelbar aus der Carathéodoryschen Theorie, indem man zunächst durch eine ähnliche Rechnung wie bei L. Fejér, a. a. O.[13]), S. 77—79, zeigt, daß das Maximum der Hermiteschen Form

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} (x_\nu \bar{x}_{\nu+1} + \bar{x}_\nu x_{\nu+1})$$

[27]) Vgl. die unter [14]) zitierten Comptes-Rendus-Noten.

unter der Nebenbedingung $|x_0|^2+|x_1|^2+\dots+|x_n|^2=1$ gleich $2\cos\frac{\pi}{n+2}$ ist. Wir wollen hier die Heranziehung der Carathéodoryschen Theorie vermeiden und gleich etwas genauer zeigen, daß

$$(29)\quad r_\nu=\frac{2}{n+2}\left(\cos\frac{\pi}{n+2}-\cos\frac{2\nu+1}{n+2}\pi\right),\quad \varepsilon_\nu=e^{i\frac{2\nu+1}{n+2}\pi}\qquad (\nu=1,2,\dots,n)$$

eine Lösung von der gewünschten Art ist.

Dies kann ohne weiteres verifiziert werden. Man kann jedoch auf dem folgenden natürlicheren Wege zu diesem Resultate kommen.

Das Gleichungssystem (28) besagt, daß

$$(30)\qquad \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu\frac{1+\varepsilon_\nu z}{1-\varepsilon_\nu z}=\cos\frac{\pi}{n+2}-z+((z^{n+1}))$$

ist, wobei $((z^{n+1}))$ eine Potenzreihe bezeichnet, die keine niedrigeren Potenzen von z als die $(n+1)$-te enthält[28]). Wir gehen nun aus von der Entwicklung

$$\frac{1}{\omega(z)}=\frac{1-2\cos\frac{\pi}{n+2}z+z^2}{1+z^{n+2}}=1-2\cos\frac{\pi}{n+2}z+z^2+((z^{n+2})).$$

Hierbei ist $\omega(z)$ ein Polynom n-ten Grades und man hat

$$\omega(z)=\prod_{\nu=1}^{n}(1-\varepsilon_\nu z),$$

wenn

$$\varepsilon_\nu=e^{i\frac{2\nu+1}{n+2}\pi}\qquad (\nu=1,2,\dots,n)$$

gesetzt wird. Folglich gilt

$$f(z)=\frac{1-\frac{1}{\omega(z)}}{z}-\cos\frac{\pi}{n+2}=\cos\frac{\pi}{n+2}-z+((z^{n+1})).$$

Die rationale Funktion $f(z)$ hat $\omega(z)$ zum Nenner und ein Polynom n-ten Grades zum Zähler; wir zeigen, daß sie die Form der linken Seite von (30) besitzt, wobei $r_\nu>0$.

Es ist zunächst mit geeigneten komplexen Konstanten $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$,

$$f(z)=c_0+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{c_\nu}{1-\varepsilon_\nu z}.$$

---

[28]) Vgl. die erste unter [14]) angeführte Comptes-Rendus-Note von L. Fejér, wo ein auf ähnlichen Prinzipien beruhender Beweis für die Ungleichung (8) gegeben wird.

Hierbei ist $f(\infty) = c_0 = -\cos\frac{\pi}{n+2}$ und $f(0) = c_0 + \sum\limits_{\nu=1}^{n} c_\nu = \cos\frac{\pi}{n+2}$, so daß $c_0 = -\frac{1}{2}\sum\limits_{\nu=1}^{n} c_\nu$. Es ist also

$$f(z) = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \frac{1+\varepsilon_\nu z}{1-\varepsilon_\nu z}.$$

Die Konstanten $c_\nu = r_\nu$ können hieraus ohne Schwierigkeit bestimmt werden. Es ist

$$r_\nu = \lim_{z\to\bar\varepsilon_\nu}(1-\varepsilon_\nu z)f(z) = -\varepsilon_\nu \lim_{z\to\bar\varepsilon_\nu}\frac{1-\varepsilon_\nu z}{\omega(z)} = \frac{\varepsilon_\nu^2}{\omega'(\bar\varepsilon_\nu)}.$$

Nun gilt

$$\omega'(\bar\varepsilon_\nu) = \frac{(n+2)\,\bar\varepsilon_\nu^{n+1}}{1-2\cos\frac{\pi}{n+2}\,\bar\varepsilon_\nu + \bar\varepsilon_\nu^2} = \frac{(n+2)\,\bar\varepsilon_\nu^{n}}{\varepsilon_\nu - 2\cos\frac{\pi}{n+2} + \bar\varepsilon_\nu}$$

$$= \frac{(n+2)\,\bar\varepsilon_\nu^{n}}{2\left(\cos\frac{2\nu+1}{n+2}\pi - \cos\frac{\pi}{n+2}\right)},$$

so daß

$$r_\nu = \varepsilon_\nu^{n+2}\,\frac{2\left(\cos\frac{2\nu+1}{n+2}\pi - \cos\frac{\pi}{n+2}\right)}{n+2} = \frac{2}{n+2}\left(\cos\frac{\pi}{n+2} - \cos\frac{2\nu+1}{n+2}\pi\right)$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

woraus $r_\nu > 0$ hervorgeht.

2. Wir kommen jetzt auf den Beweis des eingangs ausgesprochenen Satzes. Es ist

$$\psi(\theta) = \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu\,\varphi\left(\theta + \frac{2\nu+1}{n+2}\pi\right) = 2\cos\frac{\pi}{n+2} - (\lambda_1\cos\theta + \mu_1\sin\theta)$$

ein trigonometrisches Polynom erster Ordnung, das für alle Werte von θ nichtnegativ ist. Folglich gilt

$$\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2} \leq 2\cos\frac{\pi}{n+2},$$

d. h. die Behauptung. Das Gleichheitszeichen kann hier nur dann eintreten, wenn für irgendeinen Wert $\theta = \theta_0$

$$\psi(\theta_0) = 0$$

wird. Dann hat man aber

$$\varphi\left(\theta_0 + \frac{2\nu+1}{n+2}\pi\right) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

d. h.

$$\varphi(\theta) = c\,|\,\omega(e^{i(\theta-\theta_0)})|^2,$$

wo c eine passend zu wählende Konstante ist. Sie wird durch die Bedingung

$$\frac{c}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\omega(e^{i\theta})|^2 d\theta = 1$$

bestimmt. Nun ist bekanntlich

$$\frac{1}{1-2\cos\frac{\pi}{n+2}z+z^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin(\nu+1)\frac{\pi}{n+2}}{\sin\frac{\pi}{n+2}} z^\nu,$$

also

$$\omega(z) = \frac{1+z^{n+2}}{1-2\cos\frac{\pi}{n+2}z+z^2} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\sin(\nu+1)\frac{\pi}{n+2}}{\sin\frac{\pi}{n+2}} z^\nu.$$

Es ist somit

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\omega(e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{\sin(\nu+1)\frac{\pi}{n+2}}{\sin\frac{\pi}{n+2}}\right)^2$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1-\cos(\nu+1)\frac{2\pi}{n+2}}{1-\cos\frac{2\pi}{n+2}} = \frac{n+2}{1-\cos\frac{2\pi}{n+2}},$$

weil ja

$$\sum_{\nu=0}^{n+1} \cos\nu\frac{2\pi}{n+2} = 0$$

ist. Wir haben folglich

$$c = \frac{1-\cos\frac{2\pi}{n+2}}{n+2} = \frac{2}{n+2}\sin^2\frac{\pi}{n+2}$$

und

$$\varphi(\theta) = \frac{2}{n+2}\left|\sum_{\nu=0}^{n} \sin(\nu+1)\frac{\pi}{n+2}z^\nu\right|^2_{z=e^{i(\theta-\theta_0)}} \tag{31}$$

$$= \frac{1-\cos\frac{2\pi}{n+2}}{n+2}\prod_{\nu=1}^{n}\left|1-e^{i\frac{2\nu+1}{n+2}\pi}z\right|^2_{z=e^{i(\theta-\theta_0)}}.$$

Das sind die einzigen trigonometrischen Polynome der zugelassenen Art, für die in (27) das Gleichheitszeichen eintreten kann.

3. Mit Hilfe der vorhin abgeleiteten Ungleichung (27) kann auch die folgende allgemeinere Aufgabe gelöst werden:

Welches ist das Maximum von $\sqrt{\lambda_q^2+\mu_q^2}$, *wenn*

$$\varphi(\theta) = 1+\lambda_1\cos\theta+\mu_1\sin\theta+\ldots+\lambda_n\cos n\theta+\mu_n\sin n\theta$$

die Gesamtheit aller nichtnegativen trigonometrischen Polynome der festen Ordnung n *mit dem Absolutglied* 1 *durchläuft?* $(q = 1, 2, \ldots, n.)$

Für $q = 1$ wird diese Frage durch (27) beantwortet. Der allgemeine Fall kann leicht auf diesen Spezialfall zurückgeführt werden. Es ist nämlich

$$\frac{1}{q}\sum_{\nu=1}^{q}\varphi\left(\theta+\frac{2\pi}{q}\nu\right) = 1 + \lambda_q \cos q\theta + \mu_q \sin q\theta + \lambda_{2q}\cos 2q\theta + \mu_{2q}\sin 2q\theta + \ldots$$

ein nichtnegatives trigonometrisches Polynom von der Ordnung $\left[\frac{n}{q}\right]$ in $q\theta$. Wendet man darauf (27) an, so ergibt sich sofort

$$(27') \qquad \sqrt{\lambda_q^2 + \mu_q^2} \leqq 2\cos\frac{\pi}{\left[\frac{n}{q}\right]+2} \qquad (q = 1, 2, \ldots, n)^{29)}.$$

Man sieht, daß hier das Zeichen = tatsächlich eintreten kann. Bezeichnet nämlich $\varphi_n(\theta - \theta_0)$ das trigonometrische Polynom n-ter Ordnung (31) (θ_0 beliebig), so ist dies sicher der Fall, wenn $\varphi(\theta) = \varphi_{\left[\frac{n}{q}\right]}(q\theta - \theta_0)$ oder allgemeiner $\varphi(\theta) = \varphi_{\left[\frac{n}{q}\right]}(q\theta - \theta_0)\chi(\theta)$, wo $\chi(\theta)$ ein beliebiges nichtnegatives trigonometrisches Polynom von der Ordnung $n - q\left[\frac{n}{q}\right] \leqq q - 1$ mit dem Absolutglied 1 bezeichnet, gesetzt wird. Umgekehrt, wenn in (27′) das Gleichheitszeichen gilt, dann muß wegen 2

$$\frac{1}{q}\sum_{\nu=1}^{q}\varphi\left(\theta+\frac{2\pi}{q}\nu\right) = \varphi_{\left[\frac{n}{q}\right]}(q\theta - \theta_0)$$

sein. Das trigonometrische Polynom auf der rechten Seite besitzt dann wegen (31) lauter reelle Nullstellen, für welche sämtliche Glieder der auf der linken Seite angeschriebenen Summe, also u. a. auch $\varphi(\theta)$ verschwinden muß. Es ist somit[30]) $\varphi(\theta) = \varphi_{\left[\frac{n}{q}\right]}(q\theta - \theta_0)\chi(\theta)$, wo $\chi(\theta)$ die obige Eigenschaft hat.

---

[29]) Diese Ungleichung ist in dem Spezialfall $\left[\frac{n}{q}\right] = 1$ (d. h. für $\frac{n}{2} < q \leqq n$) a. a. O.[13]) zu finden. Die allgemeine Gültigkeit von (27′) ist mir vor einer Reihe von Jahren durch eine mündliche Mitteilung der Herren J. Egerváry und O. Szász bekannt geworden. Sie gelangten darauf durch die a. a. O.[13]) bewiesene Parameterdarstellung der nichtnegativen trigonometrischen Polynome. Wie ich nun neuerdings von Herrn O. Szász erfahre, hat er bereits vor längerer Zeit, durch eine Bemerkung von F. Lukács angeregt, einen Beweis von (27′) gefunden, der im Prinzip mit dem im Text angegebenen übereinstimmt.

[30]) Wenn das stets nichtnegative trigonometrische Polynom $\varphi(\theta)$ für $\theta = \theta_0$ verschwindet, so ist

$$\varphi(\theta) = (1 - \cos(\theta - \theta_0))\varphi^*(\theta),$$

(Fortsetzung der Fußnote 30 auf nächster Seite.)

Das sind die einzigen trigonometrischen Polynome der zugelassenen Art, für die in (27′) das Gleichheitszeichen eintreten kann.

§ 7.

Verschärfung des Pickschen Satzes II.

1. *Es sei $U(x, y, z)$ ein harmonisches Polynom n-ten Grades; d. h. die Entwicklung* (K) *von $U(x, y, z)$ nach Kugelfunktionen möge beim n-ten Gliede abbrechen:*

$$U(x, y, z) = K_0(x, y, z) + K_1(x, y, z) + \dots + K_n(x, y, z).$$

Es sei

$$U(x, y, z) \geqq 0 \quad \textit{für} \quad x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1,$$

ferner

$$K_0(x, y, z) = U(0, 0, 0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_E U(\sin\bar\theta \cos\bar\varphi, \sin\bar\theta \sin\bar\varphi, \cos\bar\theta)\, d\sigma = 1.$$

Dann gilt für $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$

$$|K_1(x, y, z)| \leqq 3\varrho_n; \tag{32}$$

hierbei bezeichnet ϱ_n die größte Nullstelle des Legendreschen Polynoms $P_{q+1}(\xi)$, wenn $n = 2q$ gerade ist und die größte Nullstelle von $P_{q+1}(\xi) + P_{q+2}(\xi)$, wenn $n = 2q + 1$ ungerade ist.

Es ist unmittelbar klar, daß diese Behauptung eine Verschärfung des Pickschen Satzes II bedeutet.

Es genügt (32) für einen Punkt $(1, \theta_0, \varphi_0)$ der Einheitskugel zu beweisen. Betrachten wir eine Drehung der Einheitskugel, welche diesen Punkt in den Nordpol überführt. Das in der Einheitskugel nichtnegative harmonische Polynom $U(x, y, z)$ geht dadurch in ein ebensolches über und die Bedingung $U(0, 0, 0) = 1$ bleibt auch bestehen. Hieraus folgt, daß man sich auf den Spezialfall $\theta_0 = 0$ (Nordpol) beschränken kann. Es handelt sich dann um die Abschätzung von $K_1(0, 0, 1)$.

Wegen (1′) wird durch

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\sin\theta \cos\bar\varphi, \sin\theta \sin\bar\varphi, \cos\theta)\, d\bar\varphi = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu P_\nu(\cos\theta) = P(\cos\theta) \tag{33}$$

wo $\varphi^*(\theta)$ wieder ein nichtnegatives trigonometrisches Polynom ist. Es genügt, dies etwa für $\theta_0 = 0$ zu zeigen. Man hat dann

$$\varphi(\theta) = \varphi(\theta) - \varphi(0) - \varphi'(0) \sin\theta;$$

der letzte Ausdruck setzt sich aus Gliedern von der Form $\cos k\theta - 1$ und $\sin k\theta - k \sin\theta$ zusammen, k ganz, die sämtlich durch $1 - \cos\theta$ teilbar sind.

ein im Intervall $-1 \leqq \xi \leqq 1$ nichtnegatives Polynom n-ten Grades $P(\xi)$ definiert, das die Bedingung

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P(\xi)\, d\xi = 1 \tag{34}$$

erfüllt. Es ist ferner wegen (2)

$$K_1(0, 0, 1) = a_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} P(\xi)\,\xi\, d\xi.$$

Bezeichnet also ϱ_n das Maximum von

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P(\xi)\,\xi\, d\xi \tag{35}$$

für die Gesamtheit aller, im Intervalle $-1 \leqq \xi \leqq 1$ nichtnegativen Polynome n-ten Grades, die die Bedingung (34) erfüllen, so ist (32) für $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$ sicher erfüllt. Durch Betrachtung des harmonischen Polynoms

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu r^\nu P_\nu(\cos\theta),$$

das für $r \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$, zugleich mit

$$P(\xi) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu P_\nu(\xi) \qquad (-1 \leqq \xi \leqq 1)$$

nichtnegativ ist, ergibt sich, daß in (32) ϱ_n durch keine kleinere Zahl ersetzt werden kann. Damit ist unsere Aufgabe auf die Bestimmung von ϱ_n zurückgeführt.

2. Die Größe ϱ_n hat bereits Tchebychef berechnet[31]). Seine etwas komplizierte Schlußweise möge hier durch die folgende ersetzt werden, welche auf einer von F. Lukács stammenden Darstellung der im Intervalle $-1 \leqq \xi \leqq 1$ nichtnegativen Polynome n-ten Grades $P(\xi)$ beruht[32]). Diese lautet:

$$\begin{aligned} P(\xi) = (A(\xi))^2 + (1-\xi)(B_1(\xi))^2 + (1+\xi)(B_2(\xi))^2 \\ + (1-\xi^2)(C(\xi))^2. \end{aligned} \tag{36}$$

Hierbei sind $A(\xi), \ldots, C(\xi)$ Polynome, deren Grade so beschaffen sind, daß kein Glied in $P(\xi)$ von höherem als n-ten Grade ist. Der Grad von

---

[31]) Œuvres de P. L. Tchebychef 2 [St.-Pétersbourg 1907], Sur le rapport de deux intégrales étendues aux mêmes valeurs de la variable. S. 374—402, insb. S. 399.

[32]) Vgl. G. Pólya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis 2 [Berlin, Julius Springer 1925], vgl. Abschnitt VI, Aufgabe 47, S. 82, 276.

$A(\xi)$ ist also $\left[\frac{n}{2}\right]$, der von $B_1(\xi)$ und $B_2(\xi)$ gleich $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ und der von $C(\xi)$ gleich $\left[\frac{n}{2}\right]-1$. (Umgekehrt stellt ein derartiger Ausdruck offenbar ein im Intervall $-1 \leqq \xi \leqq 1$ nichtnegatives Polynom n-ten Grades dar.) Es genügt also, die Quotienten

$$(37)\qquad \frac{\int\limits_{-1}^{1}(A(\xi))^2\,\xi\,d\xi}{\int\limits_{-1}^{1}(A(\xi))^2\,d\xi},\quad \frac{\int\limits_{-1}^{1}(B(\xi))^2(1\pm\xi)\,\xi\,d\xi}{\int\limits_{-1}^{1}(B(\xi))^2(1\pm\xi)\,d\xi},\quad \frac{\int\limits_{-1}^{1}(C(\xi))^2(1-\xi^2)\,\xi\,d\xi}{\int\limits_{-1}^{1}(C(\xi))^2(1-\xi^2)\,d\xi}$$

für die Gesamtheit aller Polynome $A(\xi)$, $B(\xi)$, $C(\xi)$ bzw. vom Grade $\left[\frac{n}{2}\right]$, $\left[\frac{n-1}{2}\right]$, $\left[\frac{n}{2}\right]-1$ abzuschätzen.

Nun ist bekannt, daß das Maximum von

$$(38)\qquad \frac{\int\limits_{-1}^{1}(t_0+t_1\xi+\ldots+t_m\xi^m)^2\,p(\xi)\,\xi\,d\xi}{\int\limits_{-1}^{1}(t_0+t_1\xi+\ldots+t_m\xi^m)^2\,p(\xi)\,d\xi},$$

wobei $p(\xi)$ eine gegebene nichtnegative (nicht überall in $[-1,1]$ verschwindende) stetige Funktion bezeichnet, gleich der größten Nullstelle desjenigen Polynoms $Q_{m+1}(\xi)$ vom Grade $m+1$ ist, das die Orthogonalitätsbedingungen

$$(39)\qquad \int\limits_{-1}^{1} p(\xi)\,Q_{m+1}(\xi)\,\xi^\nu\,d\xi = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

erfüllt[33]). Für $p(\xi)=1$ ist bekanntlich

$$(40)\qquad Q_{m+1}(\xi) = \text{konst.}\, P_{m+1}(\xi);$$

für $p(\xi) = 1\pm\xi$ ist

$$(41)\qquad Q_{m+1}(\xi) = \text{konst.}\,\frac{P_{m+1}(\xi)\pm P_{m+2}(\xi)}{1\pm\xi};$$

für $p(\xi) = 1-\xi^2$ ist

$$(42)\qquad Q_{m+1}(\xi) = \text{konst.}\,\frac{P_{m+1}(\xi)-P_{m+3}(\xi)}{1-\xi^2}.$$

Die Nullstellen dieser Polynome sind sämtlich reell und liegen im Intervall $-1<\xi<1$.

Das gesuchte Maximum ϱ_n ist somit gleich der größten unter den größten (von 1 verschiedenen) Nullstellen der Polynome

$$P_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(\xi),\quad P_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(\xi)\pm P_{\left[\frac{n+3}{2}\right]}(\xi),\quad P_{\left[\frac{n}{2}\right]}(\xi)-P_{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(\xi).$$

[33]) Dieses Polynom ist bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.

Für $n = 2q$ handelt es sich um die Polynome

$$P_{q+1}(\xi), \quad P_q(\xi) \pm P_{q+1}(\xi), \quad P_q(\xi) - P_{q+2}(\xi),$$

während für $n = 2q + 1$ um die folgenden:

$$P_{q+1}(\xi), \quad P_{q+1}(\xi) \pm P_{q+2}(\xi), \quad P_q(\xi) - P_{q+2}(\xi).$$

Es sei nun ξ_m die größte Nullstelle von $P_m(\xi)$; man hat bekanntlich

$$0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_m < \ldots < 1.$$

Aus elementaren Eigenschaften dieser Polynome folgt weiter für $\xi_m < \xi < 1$

$$P_{m-1}(\xi) > P_m(\xi) > 0,$$

ferner

$$P_m(\xi) > P_{m+1}(\xi),$$

weil ja $P_{m+1}(\xi)$ zwischen ξ_m und ξ_{m+1} negativ ist. Es ist also für $\xi_{q+1} < \xi < 1$

$$P_q(\xi) + P_{q+1}(\xi) > 0, \quad P_q(\xi) - P_{q+1}(\xi) > 0,$$
$$P_q(\xi) - P_{q+2}(\xi) > 0.$$

Bei geradem n, $n = 2q$, ist folglich

$$\varrho_n = \xi_{q+1}.$$

Bei ungeradem n, $n = 2q + 1$, ist ξ_{q+1} mit der größten Nullstelle von $P_{q+1}(\xi) \pm P_{q+2}(\xi)$ zu vergleichen. Es ist für $\xi_{q+1} < \xi < 1$

$$P_{q+1}(\xi) - P_{q+2}(\xi) > 0,$$

so daß $P_{q+1}(\xi) - P_{q+2}(\xi)$ nicht in Frage kommt. Dagegen hat das Polynom $P_{q+1}(\xi) + P_{q+2}(\xi)$ sicher eine Nullstelle im Intervall $\xi_{q+1} < \xi < 1$, weil es doch für $\xi = \xi_{q+1}$ negativ, für $\xi = 1$ positiv ist. Für $n = 2q + 1$ ist somit ϱ_n gleich der größten Nullstelle von $P_{q+1}(\xi) + P_{q+2}(\xi)$.[34]

3. Die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (32) kann leicht diskutiert werden. Zunächst erreicht der Ausdruck (35) sein Maximum ϱ_n für ein einziges Polynom $P(\xi) = \overline{P}(\xi)$ der zugelassenen Art. Es ist

a) bei geradem n, $n = 2q$,

$$\overline{P}(\xi) = \text{konst.} \left(\frac{P_{q+1}(\xi)}{\xi - \varrho_n}\right)^2;$$

b) bei ungeradem n, $n = 2q + 1$,

$$\overline{P}(\xi) = \text{konst.} (1 + \xi) \left(\frac{P_{q+1}(\xi) + P_{q+2}(\xi)}{(1 + \xi)(\xi - \varrho_n)}\right)^2,$$

wobei die konstanten Faktoren gemäß (34) zu bestimmen sind.

[34]) Vgl. Tchebychef, a. a. O. [31]), § 10.

Es sei nun $U(x, y, z)$ ein harmonisches Polynom der oben betrachteten Art, für das $K_1(0, 0, 1) = \varrho_n$ ist. Wegen (33) muß dann

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\sin\theta\cos\overline{\varphi}, \sin\theta\sin\overline{\varphi}, \cos\theta)\,d\overline{\varphi} = \overline{P}(\cos\theta)$$

sein. Nach dem Obigen besitzt $\overline{P}(\xi)$ im Intervall $-1 < \xi < 1$ genau $q = \left[\frac{n}{2}\right]$ Nullstellen $\cos\theta_h$ $\left(0 < \theta_h < \pi;\ h = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$, deren jede zweifach ist. Wegen $U(x, y, z) \geqq 0$ für $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ muß $U(x, y, z)$ auf den entsprechenden Breitenkreisen $\theta = \theta_h$ identisch in φ verschwinden; es muß ferner, wie man leicht sieht, für $\theta = \theta_h$ identisch in φ

$$\frac{\partial}{\partial\theta} U(\sin\theta\cos\overline{\varphi}, \sin\theta\sin\overline{\varphi}, \cos\theta) = 0$$

sein. Mit der Bezeichnung (1′) kann man also behaupten, daß die Ausdrücke

$$\sum_{m=\nu}^{n} a_{m\nu} P_m^{\nu}(\cos\theta), \quad \sum_{m=\nu}^{n} b_{m\nu} P_m^{\nu}(\cos\theta) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

für $\theta = \theta_h$ samt ihrer ersten Ableitung verschwinden $\left(h = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$. Die Polynome

$$\sum_{m=\nu}^{n} a_{m\nu} P_m^{(\nu)}(\xi), \quad \sum_{m=\nu}^{n} b_{m\nu} P_m^{(\nu)}(\xi)$$

müssen somit die zweifachen Nullstellen $\xi = \cos\theta_h$ $\left(h = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$ besitzen. Da ihr Grad gleich $n - \nu$ ist, so verschwinden sie identisch, wenn $\nu = 2, 3, \ldots, n$ oder wenn $\nu = 1$ und n gerade ist; d. h. es gilt bei geradem n

$$U(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) = \overline{P}(\cos\theta).$$

Ist $\nu = 1$ und n ungerade, so liefert diese Schlußweise, daß

$$\sum_{m=1}^{n} a_{m1} P_m'(\xi) = \text{konst.}\frac{\overline{P}(\xi)}{1+\xi}$$

und ähnliches beim zweiten Polynom. Es müßte dann

$$U(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) = \overline{P}(\cos\theta)\left(1 + \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}(a\cos\varphi + b\sin\varphi)\right)$$

sein, a und b Konstanten. Ein derartiger Ausdruck nimmt aber notwendig auch negative Werte an (es sei denn, daß $a = b = 0$ ist), da doch $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ für $\theta = \pi$ unendlich wird.

Die Kugelfunktionen $\overline{P}(\cos\gamma)$, wobei γ die sphärische Distanz des variablen Punktes $(1, \theta, \varphi)$ von einem beliebigen festen Punkte $(1, \theta_0, \varphi_0)$

ist, sind also die Randwerte der einzigen zulässigen harmonischen Polynome, für welche in passenden Punkten der Einheitskugel $K_1(x, y, z) = \varrho_n$ oder $K_1(x, y, z) = -K_1(-x, -y, -z) = -\varrho_n$ gelten, d. h. in (32) das Gleichheitszeichen eintreten kann. (Es tritt nur in dem Punkte $(1, \theta_0, \varphi_0)$ und in seinem Gegenpol ein.)

§ 8.

Übertragung eines Satzes von L. Fejér auf den Raum.

Es sei $U(x, y, z)$ ein harmonisches Polynom n-ten Grades, das in der Einheitskugel nichtnegativ ist und im Mittelpunkte derselben den Wert 1 annimmt, $U(0, 0, 0) = 1$. Dann ist für $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$

$$U(x, y, z) \leqq \left(\frac{n}{2} + 1\right)^2 - \frac{1 - (-1)^n}{8}. \tag{43}$$

Die Konstante auf der rechten Seite dieser Ungleichung ist durch keine kleinere zu ersetzen.

Man ersieht, wie in § 7, daß es genügt, diese Ungleichung nur für den Nordpol $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$ zu beweisen. Es ist aber $P_n^\nu(1) = 0$ für $\nu > 0$, so daß wegen $(1')$

$$U(0, 0, 1) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu P_\nu(1) = P(1)$$

gilt, wenn $P(\xi)$ das in § 7 eingeführte Polynom bedeutet. Hieraus folgt, wie dort, daß die kleinste Zahl M_n, welche in (43) auf der rechten Seite stehen kann, die Lösung der folgenden Maximumaufgabe ist:

Welches ist das Maximum M_n von $P(1)$ für die Gesamtheit aller im Intervalle $-1 \leqq \xi \leqq 1$ nichtnegativen Polynome n-ten Grades, welche der Bedingung

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} P(\xi)\, d\xi = 1$$

genügen?

Diese Aufgabe ist von F. Lukács gelöst worden[35]) mit dem Ergebnis

$$M_n = \left(\frac{n}{2} + 1\right)^2 - \frac{1 - (-1)^n}{8},$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

[35]) F. Lukács, Verschärfung des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung für rationale Polynome [Mathematische Zeitschrift 2 (1918), S. 295—305].

Lukács hat auch gezeigt, daß unter den erwähnten Polynomen $P(\xi)$ ein einziges $\overline{\overline{P}}(\xi)$ existiert, für welches $\overline{\overline{P}}(1) = M_n$ gilt. Es ist

a) bei geradem n, $n = 2q$,

$$\overline{\overline{P}}(\xi) = \frac{1}{(q+1)^2}(P'_q(\xi) + P'_{q+1}(\xi))^2 = \left(\frac{P_q(\xi) - P_{q+1}(\xi)}{1-\xi}\right)^2$$
$$= \left(\frac{1}{q+1}\sum_{\nu=0}^{q}(2\nu+1)P_\nu(\xi)\right)^2;$$

b) bei ungeradem n, $n = 2q+1$,

$$P(\xi) = \frac{2}{(q+1)(q+2)}(1+\xi)(P'_{q+1}(\xi))^2$$
$$= \frac{2(q+1)(q+2)}{(2q+3)^2}(1+\xi)\left(\frac{P_q(\xi) - P_{q+2}(\xi)}{1-\xi^2}\right)^2$$
$$= \frac{2}{(q+1)(q+2)}(1+\xi)((2q+1)P_q(\xi) + (2q-3)P_{q-2}(\xi) + \ldots)^2;$$

Die Kugelflächenfunktionen $\overline{\overline{P}}(\cos\gamma)$, wobei γ die sphärische Distanz des variablen Punktes $(1, \theta, \varphi)$ von einem beliebigen festen Punkte $(1, \theta_0, \varphi_0)$ ist, sind die Randwerte der einzigen zulässigen harmonischen Polynome, für welche in (43) das Gleichheitszeichen eintreten kann. (Es tritt nur in dem Punkte $(1, \theta_0, \varphi_0)$ ein, wenn $n \geqq 1$ ist.)

Berlin, März 1926.

(Eingegangen am 23. 3. 1926.)