Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du type elliptique. II. Note.

Von

S. Bernstein in Charkow (Ukraine).

1. Je crois, qu'après les quelques explications que j'ai données dans une Note[1]) récente au sujet des inégalités fondamentales (23) de mon Mémoire[2]) »Sur la généralisation du problème de Dirichlet«, je n'ai plus besoin de revenir sur la démonstration de la proposition suivante que j'appellerai, pour abréger, théorème A:

Si z est une solution finie et continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres de l'équation linéaire

$$(1)\qquad A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2D\frac{\partial z}{\partial x}+2E\frac{\partial z}{\partial y}+Fz=M$$
$$(AC-B^2>\varkappa>0,\ AF\leqq 0)$$

qui s'annule sur la circonférence C de rayon R; si les coefficients du premier membre sont des fonctions analytiques de x, y à l'intérieur de C; si de plus les modules des dérivées des 7 premiers ordres de A, B, C et les modules des dérivées des 2 premiers ordres de D, E, F sont bornés supérieurement sur la circonférence C et à son intérieur par un nombre donné P: on a les inégalités[2a])

$$[z]^{(01)}_{R_1' r_1'}<\lambda\,[M]^{(01)}_{R_1' r_1'},$$

$$(23)\ \text{ou}\ (2)\qquad \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]^{(01)}_{R_1' r_1'}<\lambda\,[M]^{(01)}_{R_1' r_1'},\ \ldots \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]^{(01)}_{R_1' r_1'}<\lambda\,[M]^{(01)}_{R_1' r_1'},$$

où λ est entièrement déterminé par P et $\varkappa$; (les modules trigonométriques normalisés qui figurent dans ces inégalités se rapportent aux nouvelles variables x_1, y_1 qui transforment l'équation (1) à la forme réduite en

[1]) Math. Ann. 95 (pp. 585—594).

[2]) Ibid. 69 (pp. 82—136).

[2a]) loc. cit. p. 109.

faisant correspondre au cercle C un cercle C' de rayon 1 avec correspondance des centres, *ces nouvelles variables ainsi que R_1' et r_1' dépendent donc uniquement de A, B, C*).

2. C'est de ce théorème A que découle le lemme du § 14 du Mémoire cité qui domine toute la théorie des équations du type elliptique. La démonstration un peu trop concise de cette proposition que j'appellerai théorème B n'étant pas bien comprise par certains de mes lecteurs, je tiens à la reproduire avec plus de développements. Voici textuellement son énoncé[3]):

Théorème B. «*Si z_0 est une solution de l'équation analytique du type elliptique*

$$F(r, s, t, p, q, z, x, y, \alpha) = 0 \qquad (F_r' F_z' \leqq 0) \tag{3}$$

correspondant à $\alpha = \alpha_0$ qui s'annule[4]) *sur la circonférence C et admet des dérivées bornées des neuf premiers ordres sur cette circonférence aussi bien qu'à son intérieur, il existe un nombre ε tel que, pour toutes les valeurs du paramètre α (réelles ou complexes) satisfaisant à l'inégalité $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$, l'équation admet une solution jouissant des mêmes propriétés que la solution z_0 et se confondant avec cette dernière sur le contour C*».

Avant de passer à la démonstration, je voudrais préciser quelques points de cet énoncé et expliquer la portée du théorème. Je suppose, bien entendu, en disant que l'équation est du type elliptique (pour les solutions considérées z) qu'il existe pour toutes les valeurs effectivement prises par z un nombre $\varkappa > 0$ tel que $4 F_r' F_t' - (F_s')^2 > \varkappa$. *Le nombre ε qui est une borne supérieure du rayon de convergence du développement de z suivant les puissances de $(\alpha - \alpha_0)$ est entièrement déterminé par la borne supérieure P des dérivées considérées des neuf premiers ordres* (du moment que $\varkappa$ est fixé). Enfin, quand je dis que la solution z (pour $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$) jouit des mêmes propriétés que z_0, cela signifie que z admet également des dérivées bornées des neuf premiers ordres; mais naturellement la borne supérieure des modules de ces dérivées pourra, en général, être différente de P. C'est pour cette dernière raison que du théorème B à lui seul on ne saurait aucunement conclure

[3]) On trouvera une généralisation de ce théorème pour le cas, où la condition $F_r' F_z' \leqq 0$ n'est pas remplie, dans mon Mémoire »Sur les équations du calcul des variations«, Ann. de l'Ec. Normale 1912, page 481.

[4]) Il n'y aurait *rien* à changer, si la solution se réduisait à une fonction $\varphi(\theta)$ analytique de l'angle θ sur C; le cas général se ramenant d'ailleurs facilement à celui de $\varphi(\theta) = 0$, c'est uniquement pour simplifier l'écriture que cette hypothèse avait été introduite dans l'énoncé.

(ce qui d'ailleurs, en général, serait inexact) que, en l'appliquant de proche en proche, on aura une solution de l'équation (3) quel que soit α. *Cette conclusion ne sera légitime que pour toutes les classes d'équations, où en partant de l'hypothèse que la solution admet des dérivées finies des neuf premiers ordres, le nombre P peut être fixé a priori indépendamment de α, car dans ce cas la valeur ε sera déterminée une fois pour toutes, et on arrivera à n'importe quelle valeur donnée de α en appliquant le théorème B un nombre limité de fois.* Voici pourquoi je maintiens intégralement mon affirmation qui termine le § 14: «Le lemme (théorème B) ainsi démontré nous montre que la question de la possibilité du problème de Dirichlet se ramène à la question de la possibilité de fixer a priori des limites supérieures des modules de la solution et de ses dérivées des neuf premiers ordres, si on admet seulement l'existence de cette solution et de ses dérivées de tous les ordres. Ce résultat assez compliqué devient extrêmement simple grâce à l'application de la méthode des fonctions auxiliaires».

3. Passons donc à la démonstration. Pour simplifier l'écriture je poserai $\alpha_0 = 0$; de plus, pour plus de netteté, je supposerai la fonction F entière par rapport à toutes les variables dont elle dépend. Remarquons d'abord que la série

$$z = z_0 + \alpha z_1 + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!} z_n + \ldots \tag{4}$$

qui vérifiera formellement l'équation (3), la vérifiera effectivement pour toutes les valeurs de α pour lesquelles cette série converge uniformément, ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres par rapport à x et y. Il s'agit donc en premier lieu de former la série (4) et d'assigner une borne supérieure à son rayon de convergence, ainsi qu'à celui de ses dérivées des deux premiers ordres. A cet effet, nous prenons pour $z_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}$ la solution, qui s'annule sur C, de l'équation linéaire

$$F'_{r_0} \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + F'_{s_0} \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + F'_{t_0} \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} + F'_{p_0} \frac{\partial z_1}{\partial x} + F'_{q_0} \frac{\partial z_1}{\partial y} + F'_{z_0} z_1 = -F'_{\alpha=0} = A_1 \tag{5}$$

qu'on obtient en différentiant (3) par rapport à α et en remplaçant α par 0 et z, p, q, r, s, t par $z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0$, respectivement. En différentiant encore une fois, nous avons

$$F'_{r_0} \frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2} + F'_{s_0} \frac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial y} + F'_{t_0} \frac{\partial^2 z_2}{\partial y^2} + F'_{p_0} \frac{\partial z_2}{\partial x} + F'_{q_0} \frac{\partial z_2}{\partial y} + F'_{z_0} z_2 = A_2, \tag{6}$$

où

$$A_2 = -\left[F''_{r_0^2} \left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}\right)^2 + 2 F''_{r_0 s_0} \left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}\right) \left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y}\right) + 2 F''_{r_0 t_0} \left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}\right) \left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}\right) + \ldots \right.$$
$$\left. + F''_{z_0^2} z_1^2 + 2 F''_{r_0 \alpha} \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \ldots + F''_{\alpha^2} \right],$$

et $z_2 = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=0}$ est la solution de (6) qui s'annule sur C. En différentiant successivement nous déterminons de proche en proche z_n comme la solution qui s'annule sur C de l'équation linéaire

$$(7) \qquad F'_{r_0}\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2} + F'_{s_0}\frac{\partial^2 z_n}{\partial x\,\partial y} + F'_{t_0}\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2} + F'_{p_0}\frac{\partial z_n}{\partial p} + F'_{q_0}\frac{\partial z_n}{\partial y} + F'_{z_0} z_n = A_n$$

dont le premier membre reste invariable et le second dépend des fonctions $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ et de leurs dérivées des deux premiers ordres par rapport à x et y déja déterminées.

Dans ces conditions les équations (5), (6), (7) satisfont aux conditions[5]) du théorème A, avec les mêmes valeurs de P et $\varkappa$ et les mêmes variables de transformation x_1, y_1, de sorte qu'on pourra fixer une valeur de λ indépendante de n, telle que

$$[z_n]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda\,[A_n]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial z_n}{\partial x}\right]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda\,[A_n]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial z_n}{\partial y}\right]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda\,[A_n]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1},$$

$$(8) \qquad \left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}\right]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda\,[A_n]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial x\,\partial y}\right]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda\,[A_n]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1},$$

$$\left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2}\right]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda\,[A_n]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1},$$

les modules trigonométriques normalisés ayant toujours les mêmes significations.

Nous allons fixer à présent une valeur de ε_1 telle que, pour $|\alpha| < \varepsilon_1$, non seulement la serie (4) converge uniformément avec ses dérivées des deux premiers ordres, mais qu'il en soit de même des séries

$$(9) \qquad \begin{array}{c} \alpha\,[z_1]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1} + \ldots + \dfrac{\alpha^n}{n!}[z_n]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha\left[\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}\right]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1} + \ldots + \dfrac{\alpha^n}{n!}\left[\dfrac{\partial^2 z_n}{\partial y^2}\right]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1} + \ldots \end{array}$$

qu'il suffit de considérer pour $\alpha > 0$.

A cet effet, remarquons que, si dans les expressions A_n qui figurent dans les seconds membres des équations (5), (6), (7) on remplace chacune

[5]) L'existence des solutions des équations linéaires a été démontrée préalablement dans le § 13 du Mémoire cité; il fallait, en effet, pour éviter l'apparence d'un cercle vicieux, démontrer d'abord le théorème B pour l'équation linéaire et constater que pour les équations linéaires les conditions de ce théorème se trouvent toujours remplies, le nombre ε pouvant être fixé indépendamment de α (pp. 112—114), de sorte que la solution de l'équation linéaire correspondante existe effectivement. Il est essentiel surtout que si, pour une valeur de α, l'existence est établie, les inégalités (8) (théorème A) les accompagnent.

des dérivées partielles de F par son module trigonométrique normalisé et les fonctions de même indice $\frac{\partial^2 z_i}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z_i}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z_i}{\partial y^2}, \frac{\partial z_i}{\partial x}, \frac{\partial z_i}{\partial y}, z_i$ par un même nombre b_i (pour $i < n$) qui est supérieur aux modules trigonométriques normalisés de celles-ci, on obtiendra un nombre $B_n > [A_n]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}$. De plus, ce nombre B_n s'obtiendra de la façon suivante: soit

$$b(\alpha) = \alpha b_1 + \cdots + \frac{\alpha^n}{n!} b_n + \cdots \tag{10}$$

une série (formelle) majorante des séries (9).

Considérons la série de Taylor suivant les puissances de $\varrho, \sigma, \tau, \xi, \eta, \zeta, \alpha$

$$\begin{aligned}(11)\quad & \Phi(\varrho, \sigma, \tau, \xi, \eta, \zeta, \alpha) \\ & = F(r_0 + \varrho, s_0 + \sigma, t_0 + \tau, p_0 + \xi, q_0 + \eta, z_0 + \zeta, x, y, \alpha) \\ & - F(r_0, s_0, t_0, p_0, q_0, z_0, x, y, 0) - [\varrho F'_{r_0} + \sigma F'_{s_0} + \tau F'_{t_0} + \xi F'_{p_0} + \eta F'_{q_0} + \zeta F'_{z_0}] \\ & = \alpha F'_{\alpha=0} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial^n F(r_0, s_0, t_0, p_0, q_0, z_0, x, y, 0)}{\partial r^{\varkappa_1} \partial s^{\varkappa_2} \partial t^{\varkappa_3} \partial p^{\varkappa_4} \partial q^{\varkappa_5} \partial z^{\varkappa_6} \partial \alpha^{\varkappa}} \frac{\varrho^{\varkappa_1} \sigma^{\varkappa_2} \tau^{\varkappa_3} \xi^{\varkappa_4} \eta^{\varkappa_5} \zeta^{\varkappa_6} \alpha^{\varkappa}}{\varkappa_1! \varkappa_2! \varkappa_3! \varkappa_4! \varkappa_5! \varkappa_6! \varkappa!},\end{aligned}$$

qui aura, en général, des rayons de convergence bornés inférieurement par rapport à toutes les variables; mais, comme je l'ai dit au début de la démonstration, je fais ici, pour ne pas entrer dans des détails d'ordre secondaire, l'hypothèse simplificatrice (nullement essentielle) que ce développement est convergent dans tout le plan de $\varrho, \sigma, \tau, \xi, \eta, \zeta, \alpha$; si, à présent, nous posons $\varrho = \sigma = \tau = \xi = \eta = \zeta = b$ et remplaçons en même temps tous les coefficients de la série Φ (qui sont des fonctions de x et y) par leurs modules trigonométriques normalisés respectifs, nous obtenons une série formelle suivant les puissances de b et α (à coefficients constants)

$$\varphi(b, \alpha) = \alpha [F'_{\alpha=0}]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} + \sum_{m+\varkappa=2}^{\infty} c_{m,\varkappa} b^m \alpha^{\varkappa}; \tag{12}$$

alors $\frac{B_n}{n!}$ sera le coefficient de α^n dans le développement formel suivant les puissances de α, auquel se réduit la série (12), lorsqu'on y substitue (10) à la place de b: en d'autres termes, B_n est la dérivée complète d'ordre n par rapport à α, pour $\alpha = 0$, de $\varphi(b, \alpha)$, si b est donné en fonction de α par la série (10).

Remarquons ensuite que la fonction $F(r, \ldots, z, x, y, \alpha)$ étant supposée *entière* par rapport à toutes ses variables, la fonction $\varphi(b, \alpha)$ sera également convergente pour toutes les valeurs de b et α. En effet, l'hypothèse que z_0 admet des dérivées bornées des 9 premiers ordres (les 3 premiers ordres seraient suffisants) entraîne son analyticité, et, d'après les considérations générales de la page 108 de mon Mémoire cité, on peut assigner une borne supérieure Q à tous les modules trigonométriques normalisés $[z_0]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}, [p_0]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}, \ldots, [t_0]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}, [x]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}, [y]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}$. Par conséquent, en tenant compte de la propriété évidente des modules trigonométriques normalisés, que $[f_1+f_2]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1} \leqq [f_1]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1} + [f_2]^{0,1}_{R'_1 r'_1}$ et $[f_1 f_2]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1} \leqq [f_1]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1}[f_2]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1}$, nous aurons

$$(13)\quad \left[\frac{\partial^n F(r_0, s_0, t_0, p_0, q_0, z_0, x, y, 0)}{\partial r^{\varkappa_1}\partial s^{\varkappa_2}\partial t^{\varkappa_3}\partial p^{\varkappa_4}\partial q^{\varkappa_5}\partial z^{\varkappa_6}\partial \alpha^{\varkappa}}\right]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1} \leqq \frac{\partial^n \overset{+}{F}(Q, Q, Q, Q, Q, Q, Q, Q, 0)}{\partial r^{\varkappa_1}\partial s^{\varkappa_2}\partial t^{\varkappa_3}\partial p^{\varkappa_4}\partial q^{\varkappa_5}\partial z^{\varkappa_6}\partial \alpha^{\varkappa}},$$

où $\overset{+}{F}(r, s, t, p, q, z, x, y, \alpha)$ est la série majorante (partout convergente) du développement de $F(r, s, t, p, q, z, x, y, \alpha)$ suivant les puisances de r, s, t, p, q, z, x, y, α. Donc la série (11) reste partout convergente, quand on y remplace tous les coefficients par leurs modules trigonométriques normalisés, et par conséquent la série (12) représente également une fonction entière par rapport à b et α.

Cela étant, pour obtenir la série (10) qui est majorante des séries (9), il suffira de prendre la solution b de l'équation

$$(14)\qquad b = \lambda\,\varphi(b, \alpha)$$

qui s'annule avec α, pour le développement de laquelle suivant les puissances de α on peut trouver une borne inférieure ε_1 du rayon convergence par la méthode classique de Cauchy. En effet, de (12) nous tirons

$$b_1 = \lambda\,[F'_\alpha]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1} = \lambda\,[A_1]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1},$$

donc, en vertu de (8) pour $n=1$, b_1 est bien supérieur aux coefficients de α dans les séries (9). Or, en admettant que pour toutes les valeurs de $i < n$ on sait que

$$b_i > \left[\frac{\partial^2 z_i}{\partial x^2}\right]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1}, \ldots, b_i > [z_i]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1},$$

on aura, d'après ce qui précède,

$$b_n = \lambda \frac{d^n}{d\alpha^n}\varphi(b, \alpha)_{\alpha=0} = \lambda \frac{d^n}{d\alpha^n}\varphi\left(b_1 a + \frac{b_2}{2}\alpha^2 + \ldots + \frac{b_{n-1}}{(n-1)!}\alpha^{n-1}, \alpha\right)_{\alpha=0}$$
$$= \lambda B_n > \lambda\,[A_n]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1};$$

par conséquent, en vertu de (8), on aura aussi

$$(15)\qquad b_n > \left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}\right]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1}, \ldots, b_n > [z_n]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1}.$$

Donc de la convergence de la série (10) il résulte que toutes les séries (9) sont également convergentes, d'où, enfin, résulte a fortiori la convergence absolue et uniforme de la série (4) ainsi que celle de ses dérivées des deux premiers ordres pour $|\alpha| < \varepsilon_1$; *ainsi l'existence de la solution z pour les valeurs considérées de α est établie.*

4. Je passe à présent à la démonstration du fait que la solution z (pour $|\alpha| < \varepsilon$) admet des dérivées finies et continues des 9 premiers ordres, en suivant la méthode indiquée aux pages 117—118 que je développe, conformément au procédé de démonstration du théorème 11 employé à la page 113 pour le cas particulier de l'équation linéaire. A cet effet, en différentiant terme à terme par rapport à l'angle polaire θ la série (4), je pose

$$(16)\qquad \frac{\partial z}{\partial \theta} = z' = z_0' + \alpha z_1' + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!} z_n' + \ldots,$$

en remarquant que, si les dérivées secondes par rapport à x et y de cette série sont uniformément convergentes, z' satisfera à l'équation linéaire

$$(17)\qquad F_r' \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} + F_s' \frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y} + F_t' \frac{\partial^2 z'}{\partial y^2} = A'$$

obtenue en différentiant (3) par rapport à θ (en tenant compte des identités: $\frac{\partial}{\partial \theta}(r) = \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} - 2s$, $\frac{\partial}{\partial \theta}(s) = \frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y} + r - t$, $\frac{\partial}{\partial \theta}(t) = \frac{\partial^2 z'}{\partial y^2} + 2s$), où F_r', F_s' F_t', A' sont des fonctions entières par rapport à $r, s, t, p, q, z, x, y, \alpha$. Par conséquent, en faisant dans (17) $\alpha = 0$, $r = r_0, \ldots, z = z_0$, on obtient l'équation à laquelle satisfait z_0'

$$(18)\qquad F_{r_0}' \frac{\partial^2 z_0'}{\partial x^2} + F_{s_0}' \frac{\partial^2 z_0'}{\partial x \partial y} + F_{t_0}' \frac{\partial^2 z_0'}{\partial y^2} = A_0',$$

et en différentiant successivement par rapport à α l'équation (17) on a successivement les équations pour déterminer $z_1', \ldots z_n'$ qui sont nulles sur C

$$F_{r_0}' \frac{\partial^2 z_1'}{\partial x^2} + F_{s_0}' \frac{\partial^2 z_1'}{\partial x \partial y} + F_{t_0}' \frac{\partial^2 z_1'}{\partial y^2} = -\left[\frac{d}{d\alpha}(F_{r_0}') \frac{\partial^2 z_0'}{\partial x^2} + \frac{d}{d\alpha}(F_{s_0}') \frac{\partial^2 z_0'}{\partial x \partial y} \right.$$
$$\left. + \frac{d}{d\alpha}(F_{t_0}') \frac{\partial^2 z_0'}{\partial y^2}\right] + \frac{d}{d\alpha}(A_0') = A_1'$$

. . . .

$$(19)\quad F_{r_0}' \frac{\partial^2 z_n'}{\partial x^2} + F_{s_0}' \frac{\partial^2 z_n'}{\partial x \partial y} + F_{t_0}' \frac{\partial^2 z_n'}{\partial y^2} = -\left[n \frac{d}{d\alpha}(F_{r_0}') \frac{\partial^2 z_{n-1}'}{\partial x^2} \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d^2}{d\alpha^2}(F_{r_0}') \frac{\partial^2 z_{n-2}'}{\partial x^2} + \ldots + \frac{d^n}{d\alpha^n}(F_{t_0}') \frac{\partial^2 z_0'}{\partial y^2}\right]$$
$$+ \frac{d^n}{d\alpha^n}(A_0') = A_n',$$

où les symboles tels que $\frac{d^i}{d\alpha^i}(F_{r_0}')$ représentent la dérivée complète par rapport à α d'ordre i de F_r', où, aprés différentiation, on fait $\alpha = 0$, $r = r_0, \ldots,$ $z = z_0$.

Puisque les équations linéaires (18) et (19) ont leurs premiers membres identiques et satisfaisant aux conditions du théorème A, que l'existence de leurs solutions est assurée, quand les modules trigonométriques normalisés des seconds membres sont finis, et que, d'autre part, leur réduction à la forme canonique se fait par l'introduction des mêmes variables x_1 et y_1 que celle des équations (5), (6), (7), on a, en conservant les mêmes modules trigonométriques normalisés que précédemment (8), les inégalités

$$(20)\qquad \left[\frac{\partial^2 z_n'}{\partial x^2}\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < \lambda_1 [A_n']_{R_1' r_1'}^{(0,1)}, \quad \left[\frac{\partial^2 z_n'}{\partial x \partial y}\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < \lambda_1 [A_n']_{R_1' r_1'}^{(0,1)},$$
$$\left[\frac{\partial^2 z_n'}{\partial y^2}\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < \lambda_1 [A_n']_{R_1' r_1'}^{(0,1)},$$

où λ_1 est déterminé par le même nombre P (qui limite supérieurement les dérivées des 9 premiers ordres de z_0) que λ dans les inégalités (8).

Or, pour $\alpha \geqq 0$, on a, d'après ce qui précède,

$$\left[\frac{d^i}{d\alpha^i}(F_r')\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < \frac{d^i}{d\alpha^i}\left(\overset{+}{F_r'}\left([r_0]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} + b,\ [s_0]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} + b, \ldots, Q, Q, \alpha\right)\right),$$

où b est la série majorante (10) suivant les puissances de α qui est la solution de l'équation (14) considérée plus haut; donc, le rayon de convergence ε_1 de cette série étant fixé, on pourra fixer un nombre g, tel que

$$\left[\frac{d^i}{d\alpha^i}(F_{r_0}')\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < i!\, g^i$$

et de même

$$(21)\qquad \left[\frac{d^i}{d\alpha^i}(F_{s_0}')\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < i!\, g^i, \quad \left[\frac{d^i}{d\alpha^i}(F_{t_0}')\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < i!\, g^i,$$
$$\left[\frac{d^i}{d\alpha^i}(A_0')\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < i!\, g^i,$$

quel que soit $i > 0$. Prenons ensuite, en supposant $g > \frac{1}{6}$, un nombre N assez grand pour que

$$(22)\qquad [z_0']_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < N, \quad \left[\frac{\partial z_0'}{\partial x}\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < N, \quad \left[\frac{\partial z_0'}{\partial y}\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < N, \quad \left[\frac{\partial^2 z_0'}{\partial x^2}\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < N,$$
$$\left[\frac{\partial^2 z_0'}{\partial x \partial y}\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < N, \quad \left[\frac{\partial^2 z_0'}{\partial y^2}\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < N, \quad 6\lambda_1 g < N, 2g < N.$$

Je dis que, dans ces conditions, on aura, quel que soit n,

$$(23)\qquad [z_n']_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < n!\, N^{n+1}, \quad \left[\frac{\partial z_n'}{\partial x}\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < n!\, N^{n+1}, \quad \left[\frac{\partial z_n'}{\partial y}\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < n!\, N^{n+1},$$
$$\left[\frac{\partial^2 z_n'}{\partial x^2}\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < n!\, N^{n+1}, \quad \left[\frac{\partial^2 z_n'}{\partial x \partial y}\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < n!\, N^{n+1}, \quad \left[\frac{\partial^2 z_n'}{\partial y^2}\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < n!\, N^{n+1}.$$

En effet, supposons que les inégalités (23) soient vraies pour toutes les valeurs *inférieures* à n_0. Alors, pour $n = n_0$, on aura, à cause de (19), (21), (22),

$$\begin{aligned}[A_n']_{R_1' r_1'}^{(0,1)} &< 3\,[n_0!\, g\, N^{n_0} + n_0!\, g^2\, N^{n_0-1} + \ldots + n_0!\, g^{n_0} N] + n_0!\, g^{n_0} \\ &< n_0!\, 6\, g\, N^{n_0};\end{aligned}$$

donc, en vertu de (20) et (22), on a également

$$\left[\frac{\partial^2 z_{n_0}'}{\partial x^2}\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < 6\,\lambda_1\, n_0!\, g\, N^{n_0} < n_0!\, N^{n_0+1}$$

et des inégalités pareilles pour les autres dérivées. Les inégalités (23) sont donc exactes quel que soit n, et par conséquent, pour $|\alpha| < \frac{1}{N}$, la série (16) satisfait à l'équation (17) et admet non seulement des dérivées finies et continues des deux premiers ordres, mais ces dernières admettent également des modules trigonométriques normalisés finis.

Cela étant, en différentiant encore l'équation (17) par rapport à θ, on formera une équation linéaire analogue

$$F_r'\,\frac{\partial^2 z''}{\partial x^2} + F_s'\,\frac{\partial^2 z''}{\partial x\,\partial y} + F_t'\,\frac{\partial^2 z''}{\partial y^2} = A'', \tag{24}$$

à laquelle satisfera

$$z'' = \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = z_0'' + \alpha z_1'' + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!} z_n'' + \ldots, \tag{25}$$

tant que cette dernière série convergera uniformément avec ses dérivées des deux premiers ordres. Le premier membre de l'équation (24) est le même que celui de l'équation (17), seulement A'' (qui est une fonction entière de $r, s, t, p, q, z, x, y, \alpha$) est de plus un polynome par rapport à z' et ses dérivées des deux premiers ordres par rapport à x et y. Donc, en différentiant successivement un nombre quelconque n de fois l'équation (24) par rapport à α, et en faisant $\alpha = 0$, on obtient des équations linéaires pour déterminer z_n'' de la forme

$$F_{r_0}'\,\frac{\partial^2 z_n''}{\partial x^2} + F_{s_0}'\,\frac{\partial^2 z_n''}{\partial x\,\partial y} + F_{t_0}'\,\frac{\partial^2 z_n''}{\partial y^2} = A_n'' \tag{26}$$

qui ne se distinguent des équations (19) que par leurs seconds membres, de sorte que le théorème A est applicable avec les mêmes inégalités (20) (avec la même signification des modules trigonométriques normalisés et la même valeur de λ_1). Ainsi on peut déterminer, comme plus haut, un nombre N_1, tel que, pour $|\alpha| < \frac{1}{N_1}$, la série (25) satisfasse à l'équation (24) et possède avec ses dérivées des deux premiers ordres par rapport à x et y des modules trigonométriques normalisés finis.

Le même procédé de différentiation par rapport à θ pourra être appliqué autant de fois qu'on voudra, le théorème A étant toujours applicable avec les mêmes inégalités (20), puisque les premiers membres des équations linéaires correspondantes restent toujours les mêmes. La différentiation étant poussée jusqu'au septième ordre, on choisira la plus petite des 8 limites supérieures pour $|\alpha|$ ainsi obtenues, et cette valeur fixe ε jouira de la propriété que la solution z de l'équation (3) aura pour toute valeur de $|\alpha| < \varepsilon$ des dérivées finies et continues des 9 premiers ordres.

En effet, en introduisant les coordonnées polaires ϱ et θ nous avons déjà démontré par ce qui précède que toutes les dérivées de z d'ordre non supérieur à 9, où la différentiation par rapport à ϱ n'est pas effectuée plus de 2 fois, sont finies et continues. Ainsi, en particulier, il en est ainsi de $\frac{\partial^3 z}{\partial \theta^3}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial \varrho \partial \theta^2}$ et $\frac{\partial^3 z}{\partial \varrho^2 \partial \theta}$. Or, si nous différentions par rapport à ϱ l'équation (3), en considérant $\frac{\partial^2 z}{\partial \varrho^2}$ comme fonction implicite de ϱ, toutes les autres fonctions entrant dans cette équation ayant des dérivées finies et continues par rapport à ϱ, nous obtenons en chaque point à l'intérieur d'une couronne circulaire S formée par la circonférence C et une autre circonférence C' concentrique de rayon fixe aussi petit qu'on veut (et sur ces circonférences également) des valeurs finies et continues parfaitement déterminées $\frac{\partial^3 z}{\partial \varrho^3}$ bornées supérieurement. Naturellement le même procédé de différentiation par rapport ϱ pourra être appliqué pour déterminer $\frac{\partial^4 z}{\partial \theta \partial \varrho^3}$, en partant de l'équation (17) et ainsi de suite; donc, en opérant de cette façon, on parvient à limiter supérieurement toutes les dérivées des 9 premiers ordres (quel que soit le nombre $i \leqq 9$ de différentiations par rapport à ϱ) pour les valeurs indiquées de $|\alpha| < \varepsilon$, à l'extérieur du petit cercle C'; mais nous pouvons supposer ce cerle C' assez petit pour que du seul fait que $[z]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1} \geqq [z]_{R'_1 r_1}$ on puisse conclure l'existence des dérivées de tous les ordres et l'analyticité de z à son intérieur. Ainsi toutes les dérivées des 9 premiers ordres existent et sont limitées supérieurement à l'intérieur du cercle entier C ainsi que *sur son contour*.

Le théorème B est donc entièrement démontré.

5. Je voudrais indiquer encore quelques conséquences du mode de raisonnement que nous avons suivi dans cette démonstration (chap. IV, pp. 132—135 du Mémoire cité). Je souligne d'abord encore une fois que, le premier membre de l'équation

$$(24^{\text{bis}}) \qquad F'_r \frac{\partial^2 z^{(\varkappa)}}{\partial x^2} + F'_s \frac{\partial^2 z^{(\varkappa)}}{\partial x \partial y} + F'_t \frac{\partial^2 z^{(\varkappa)}}{\partial y^2} = A^{(\varkappa)},$$

obtenue en différentiant l'équation (3) $\varkappa$ fois par rapport à θ, satisfaisant quel que soit $\varkappa$ aux conditions du théorème A, lorsqu'on sait que z admet des dérivées bornées des 9 premiers ordres, sa solution (dont l'existence est assurée et qui satisfait aux inégalités fondamentales (2)) qui se confond avec $z^{(\varkappa)} = \frac{\partial^\varkappa z}{\partial \theta^\varkappa}$ sur le contour C représente effectivement $\frac{\partial^\varkappa z}{\partial \theta^\varkappa}$ pour toutes les valeurs de x, y à l'intérieur de C. On sait, en effet, que $\frac{\partial^\varkappa z}{\partial \theta^\varkappa}$ satisfait à l'équation (24^{bis}) et, puisque z est analytique, on sait aussi que $\frac{\partial^\varkappa z}{\partial \theta^\varkappa}$ admet des dérivées des deux premiers ordres finies et continues à *l'intérieur* de C; or, *l'équation linéaire* (1) *ne peut avoir deux solutions différentes ayant des dérivées des deux premiers ordres finies et continues à l'intérieur de* C *qui prennent les mêmes valeurs sur* C *(sans faire aucune supposition sur l'existence des dérivées sur le contour).* Je reproduirai ici la démonstration très simple de ce fait (dont l'idée est due à M. Paraf[6]) qui semble avoir échappé à l'attention de plusieurs géomètres. Il suffit, évidemment, de montrer que la solution u de l'équation

$$(27) \qquad A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial u}{\partial x} + 2E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$$
$$(AC - B^2 > K > 0, \ FA \leqq 0)$$

admettant à *l'intérieur* de C des dérivées finies et continues des deux premiers ordres est identiquement nulle, si elle est nulle sur C. En effet, en supposant d'abord $FA < 0$ (soit $A > 0$, pour fixer les idées), on voit que u ne peut avoir à l'intérieur de C de maximum positif (ou minimum négatif), car en un tel point on aurait $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 \geqq 0$ avec $u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leqq 0$, ce qui est incompatible avec (27). Dans le cas général posons

$$u = b\left[1 - e^{-a(x+R_1)}\right],$$

où $R_1 > R$ et a est un nombre positif assez grand. On aura $b = 0$ sur C et de plus b satisfait à l'équation

$$\begin{aligned}
&\left[1 - e^{-a(x+R_1)}\right]\left[A\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 b}{\partial y}\right] \\
&\quad + 2\left[(1 - e^{-a(x+R_1)})D + Aa\,e^{-a(x+R_1)}\right]\frac{\partial b}{\partial x} \\
&\quad + 2\left[(1 - e^{-a(x+R_1)})E + Ba\,e^{-a(x+R_1)}\right]\frac{\partial b}{\partial y} + \left[F(1 - e^{-a(x+R_1)})\right. \\
&\quad \left. + 2Da\,e^{-a(x+R_1)} - a^2 A\,e^{-a(x+R_1)}\right]b = 0;
\end{aligned}$$

[6]) Annales de Toulouse 1892. Voir aussi ma lettre à M. Radó publiée dans Math. Zeitschr. 1926.

cette équation est de la même forme que (27) et il suffit de prendre $a > \frac{2D}{A}$ pour que le coefficient de b soit certainement *négatif* pour toute valeur de x, y à l'intérieur de C. Donc b est identiquement nul, et u de même.

Ainsi, si la solution z_0 pour $\alpha = 0$ qu'on a pris pour point de départ admet des dérivées bornées des 9 premiers ordres, on est certain d'abord que ses dérivées de tous les ordres existent sur le bord également (nous allons plus loin préciser ce résultat) et, de plus, pour toutes les autres valeurs de α il n'est nullement nécessaire, pour legitimer l'application de la méthode des fonctions auxiliaires qui suppose l'existence des dérivées, d'appliquer des considérations nouvelles pour prouver cette existence, — celle-ci résulte du théorème B et du procédé de détermination des dérivées successives par le procédé indiqué plus haut moyennant l'équation (24^{bis}). C'est pour cela que, grâce à la méthode des fonctions auxiliaires qui *borne supérieurement (uniformément*[7]), *quel que soit α, les dérivées successives, si on connaît une limite supérieure des modules des dérivées des 2 premiers ordres seulement, on a le théorème général suivant*[8]).

Théorème C. *L'équation* (3) *admet toujours une solution analytique pour $\alpha = 1$, se réduisant à une fonction analytique donnée $\varphi(\theta)$ sur C, si elle admet, pour $\alpha = 0$, une solution bornée avec ses dérivées des 9 premiers ordres prenant les mêmes valeurs $\varphi(\theta)$ sur C, et si, de plus, il est possible de limiter supérieurement les modules des dérivées des 2 premiers ordres des solutions* (supposées dérivables autant de fois qu'on veut) *de* (3), *quel que soit α $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$, se réduisant à $\varphi(\theta)$ sur C.* (Si l'équation est linéaire en r, s, t, la limitation des dérivées *premières* suffit).

6. Enfin, en restant dans le même ordre d'idées (et sans utiliser la méthode des fonctions auxiliaires) je développerai les calculs qui précèdent pour établir la généralisation suivante d'un théorème connu de Schwarz:

Théorème D. *Si z est une solution admettant des dérivées bornées des 9 premiers ordres à l'intérieur du cercle C de l'équation analytique du type elliptique*

$$F(r, s, t, p, q, z, x, y) = 0 \tag{28}$$

qui s'annule sur la circonférence C, elle peut être prolongée analytiquement à l'extérieur de C. En tenant compte de la méthode des fonctions auxiliaires on peut généraliser cet énoncé, (voir la page 133 du Memoire cité)

[7]) Au contraire, le procédé que nous avons employé pour démontrer le théorème B, donne des limites supérieures qui augmentent, lorsque $|\alpha|$ s'approche de ε.

[8]) Pages 131—135 loc. cit. On trouvera des applications de ce théorème dans mes Mémoires, „Sur les surfaces définies au moyen de leur courbure." Ann. Sc. de l'Ecole Norm. 1910. „Sur les l'équations du calcul des variations." Ibid. 1912.

en remplaçant les dérivées des 9 premiers ordes par celles des 2 ordres seulement[9]).

Il suffira évidemment de prouver que $\frac{\partial z}{\partial \varrho}$, sur la circonférence C, est une fonction analytique de l'angle θ. Or ceci sera établi, si nous parvenons à construire une série majorante

$$(29)\qquad b(\theta) = \sum_1^\infty \frac{M_\varkappa \theta^\varkappa}{\varkappa!} = \sum_0^\infty \frac{M_\varkappa \theta^\varkappa}{\varkappa!} - M_0$$

convergente pour des valeurs assez petites de θ, telle que (pour toute valeur de $\varkappa \geqq 0$)

$$(30)\qquad M_\varkappa > \left[\frac{\partial^2 z^{(\varkappa)}}{\partial x^2}\right]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}, \quad M_\varkappa > \left[\frac{\partial^2 z^{(\varkappa)}}{\partial x \partial y}\right]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} \text{ etc.},$$

où $z^{(\varkappa)} = \frac{\partial^\varkappa z}{\partial \theta^\varkappa}$ satisfait à l'équation linéaire obtenue en différentiant (28) $\varkappa$ fois par rapport à θ que nous pouvons mettre sous la forme

$$(31)\qquad F_r' \frac{\partial^2 z^{(\varkappa)}}{\partial x^2} + F_s' \frac{\partial^2 z^{(\varkappa)}}{\partial x \partial y} + F_t' \frac{\partial^2 z^{(\varkappa)}}{\partial y^2} + F_p' \frac{\partial z^{(\varkappa)}}{\partial x} + F_q' \frac{\partial z^{(\varkappa)}}{\partial y} + F_z' z^{(\varkappa)} = A_\varkappa,$$

où

$$\begin{aligned} A_\varkappa &= \frac{d^\varkappa F}{d\theta^\varkappa} - \left[F_r' \frac{\partial^2 z^{(\varkappa)}}{\partial x^2} + \ldots + F_z' z^{(\varkappa)}\right] \\ &= \frac{d^\varkappa F}{d\theta^\varkappa} - \left[F_r' \frac{\partial^\varkappa r}{\partial \theta^\varkappa} + F_s' \frac{\partial^\varkappa s}{\partial \theta^\varkappa} + \ldots + F_z' \frac{\partial^\varkappa z}{\partial \theta^\varkappa}\right] \\ &+ \left[F_r'\left(\frac{\partial^\varkappa r}{\partial \theta^\varkappa} - \frac{\partial^2 z^{(\varkappa)}}{\partial x^2}\right) + F_s'\left(\frac{\partial^\varkappa s}{\partial \theta^\varkappa} - \frac{\partial^2 z^{(\varkappa)}}{\partial x \partial y}\right) + \ldots + F_q'\left(\frac{\partial^\varkappa q}{\partial \theta^\varkappa} - \frac{\partial z^{(\varkappa)}}{\partial y}\right)\right]. \end{aligned}$$

On vérifie d'abord par un calcul facile l'identité

$$\begin{aligned} (32)\qquad \frac{\partial^\varkappa r}{\partial \theta^\varkappa} &= \frac{\partial^2 z^{(\varkappa)}}{\partial x^2} - 2\varkappa \frac{\partial^2 z^{(\varkappa-1)}}{\partial x \partial y} - \frac{\varkappa(\varkappa-1)}{2!} \cdot \frac{2^2}{2}\left(\frac{\partial^2 z^{(\varkappa-2)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z^{(\varkappa-2)}}{\partial y^2}\right) \\ &+ \frac{\varkappa(\varkappa-1)(\varkappa-2)}{3!} \cdot 2^3 \frac{\partial^2 z^{(\varkappa-3)}}{\partial x \partial y} \\ &+ \frac{\varkappa(\varkappa-1)(\varkappa-2)(\varkappa-3)}{4!} \cdot \frac{2^4}{2}\left(\frac{\partial^2 z^{(\varkappa-4)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z^{(\varkappa-4)}}{\partial y^2}\right) - \ldots \end{aligned}$$

---

[9]) De plus, à cause de l'existence d'inégalités analogues aux inégalités fondamentales (2) dans le cas d'un anneau limité par deux circonférences concentriques (voir ma Note précédente, p. 593), les dérivées de z pourraient n'être bornées que dans le voisinage de C. Le cercle C peut être évidemment remplacé ici par une courbe analytique fermée quelconque; mais l'étude du cas, où z ne serait analytique que sur un arc de courbe analytique seulement, présente des difficultés spéciales

et des identités analogues pour les autres dérivées; donc, les inégalités (30) étant supposées remplies jusqu'à l'ordre $\varkappa$ inclusivement, on a

$$(30^{\text{bis}}) \qquad \left[\frac{\partial^\varkappa r}{\partial \theta^\varkappa}\right]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1} < N_\varkappa, \quad \left[\frac{\partial^\varkappa s}{\partial \theta^\varkappa}\right]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1} < N_\varkappa \text{ etc.},$$

où $N_\varkappa$ est défini par la série

$$e^{2\theta}[M_0 + b(\theta)] = \sum_0^\infty \frac{N_\varkappa}{\varkappa!}\theta^\varkappa.$$

Car
$$\left[\frac{\partial^\varkappa r}{\partial \theta^\varkappa}\right]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1} < M_\varkappa + \varkappa(2 M_{\varkappa-1}) + \frac{\varkappa(\varkappa-1)}{2!}2^2 M_{\varkappa-2} + \frac{\varkappa(\varkappa-1)(\varkappa-2)}{3!}2^3 M_{\varkappa-3} + \ldots,$$

à cause de (32); et en même temps

$$\left[\frac{\partial^{\varkappa+1} r}{\partial \theta^{\varkappa+1}} - \frac{\partial^2 z^{(\varkappa+1)}}{\partial x^2}\right]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1} < N_{\varkappa+1} - M_{\varkappa+1} = L_{\varkappa+1},$$

où $L_\varkappa$ est défini par le développement (sans terme libre)

$$(33) \qquad (e^{2\theta} - 1)(M_0 + b) = \sum_1^\infty \frac{L_\varkappa}{\varkappa!}\theta^\varkappa.$$

De plus, en supposant que M_0 $\left(\text{qui est une limite supérieure de } \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1}, \ldots, [z]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1}\right)$ est aussi supérieur à $[x]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1}$, $[y]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1}$, nous aurons aussi pour toute valeur de $\varkappa$

$$(34) \qquad M_0 > \left[\frac{\partial^\varkappa x}{\partial \theta^\varkappa}\right]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1}, \quad M_0 > \left[\frac{\partial^\varkappa y}{\partial \theta^\varkappa}\right]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1},$$

puisque toutes ces dérivées sont égales à $\pm x$ et $\pm y$.

Par conséquent, en admettant que les inégalités (30), donc les inégalités (30^{bis}) également, sont remplies pour toutes les valeurs $i < \varkappa$, nous pouvons les utiliser pour limiter supérieurement $[A_\varkappa]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1}$, car $A_\varkappa$ est un polynome par rapport à $\frac{\partial^i r}{\partial \theta^i}, \ldots \frac{\partial^i z}{\partial \theta^i}$, $(i < \varkappa)$, ayant pour coefficients les dérivées partielles de F prises pour les valeurs de $r, s, \ldots, z, x, y$. Donc, en tenant compte des inégalités pareilles aux inégalités (13) (nous supposons toujours que F est entière) et en supposant que $[F'_r]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1}, \ldots,$

$[F'_q]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1}$ sont inférieurs à un nombre positif H, on aura (grâce à (30^{bis}), (33) et (34))

$$B_\varkappa > [A_\varkappa]^{(0,1)}_{R'_1 r'_1},$$

où $\frac{B_\varkappa}{\varkappa!}$ est le coefficient de $\theta^\varkappa$ dans le développement suivant les puissances de θ de

$$\begin{aligned}(35)\quad \varphi(b,\theta) = {} & \overset{+}{F}(e^{2\theta}(M_0+b),\ e^{2\theta}(M_0+b), \ldots,\ M_0 e^\theta,\ M_0 e^\theta) \\ & - \overset{+}{F}(M_0,\ M_0, \ldots, M_0) - b\,[\overset{+}{F}{}'_r(M_0, \ldots, M_0) + \ldots + \overset{+}{F}{}'_z] \\ & + 5H(e^{2\theta}-1)\,(M_0+b),\end{aligned}$$

lorsqu'on remplace b par la série (29), dont les coefficients d'indices inférieurs à $\varkappa$ interviennent seulement, car $\varphi'_b(0,0) = \varphi(0,0) = 0$. (D'ailleurs $\varphi(b,\theta)$ est une fonction entière par rapport à b et θ).

Donc, grâce aux inégalités (2) qui sont applicables avec le même facteur λ, quel que soit $\varkappa$, nous pouvons affirmer que la solution b de l'équation

$$b = \lambda\,\varphi(b,\theta)$$

donne précisément une série (29) qui converge pour des valeurs assez petites de θ, d'après le théorème des fonctions implicites, satisfaisant aux inégalités (30) pour toute valeur de $\varkappa$. Le théorème est donc démontré[10]).

---

[10]) En modifiant un peu les calculs (en faisant passer $F'_z z^{(\varkappa)}$ dans le second membre de (31)) on peut facilement se débarrasser de l'hypothèse $F'_z \leqq 0$ qui est utilisée implicitement dans la démonstration quand nous appliquons à (31) le théorème A.

(Eingegangen am 11. 5. 1926.)