Zur Integration der Wellengleichung auf Riemannschen Flächen.

Von

A. Rubinowicz in Lemberg.

I. Problemstellung.

Im folgenden behandeln wir ein Problem, das wir kurz in der nachstehenden Weise formulieren können:

F_n sei eine n-blättrige Riemannsche Fläche mit beliebig vorgegebenen Verzweigungspunkten. Zur Zeit $t = t_0$ sei auf F_n ein beliebiger Anfangszustand, d. h. die Werte von $u = f(x, y)$ und $\frac{\partial u}{\partial t} = g(x, y)$ vorgegeben. Es wird für $t \geqq t_0$ nach einer Lösung der Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ gefragt, die dem angegebenen Anfangszustande entspricht und auf der Fläche F_n überall regulär ist.

Oder präzis gesprochen: Es ist eine Funktion $u(x, y, t)$ der Veränderlichen x, y, t zu finden, die den folgenden Bedingungen genügt:

1. $u(x, y, t)$ ist für alle Punkte der Riemannschen Fläche F_n mit eventueller Ausnahme der Verzweigungspunkte eindeutig definiert.

2. $u(x, y, t)$ erfüllt für $t = t_0$ die Anfangsbedingungen:

$$u = f(x, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = g(x, y).$$ [1]

3. $u(x, y, t)$ ist samt ihren Ableitungen der beiden ersten Ordnungen nach ihren Veränderlichen für alle Werte von x, y, t endlich und stetig, mit Ausnahme der Verzweigungspunkte und der singulären Stellen, die durch die Anfangsbedingungen zur Zeit $t = t_0$ verursacht werden[2].

---

[1] Um die Beweise nicht zu komplizieren, nehmen wir im folgenden stets an, daß die Anfangswerte zur Zeit $t = t_0$ partielle Ableitungen der ersten drei Ordnungen nach x und y besitzen.

[2] Vgl. A. E. H. Love: The propagation of wave motion in an isotropic elastic solid medium, Proc. Math. Soc. London (2) 1 (1904), S. 291.

In den Verzweigungspunkten sollen u und $\frac{\partial u}{\partial t}$ endlich bleiben. Ist ϱ der Abstand von einem Verzweigungspunkte, so darf dagegen die Ableitung $\frac{\partial u}{\partial \varrho}$ hier zwar unendlich werden, aber doch nur so, daß $\lim_{\varrho=0} \varrho \frac{\partial u}{\partial \varrho} = 0$ wird.

4. $u(x, y, t)$ genügt, bis auf die unter 3. genannten Ausnahmestellen, der Wellengleichung:

$$\Box u \equiv -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 .$$

Die eben formulierte Aufgabe ist als ein Cauchysches Randwertproblem in einem Riemannschen Raume R_n der Minkowskischen Welt x, y, t aufzufassen, wobei R_n durch eine Bewegung der Riemannschen Fläche F_n längs der senkrecht auf ihr stehenden Zeitachse t entsteht. Den Verzweigungspunkten der Riemannschen Fläche F_n entsprechen dann in unserem Riemannschen Raume R_n zueinander und zur Zeitachse parallele Verzweigungsgerade. Wir haben es hier also mit einem speziellen Riemannschen Raume R_n zu tun, da seine Verzweigungskurven Gerade sind. Beliebigen Verzweigungskurven in R_n entsprechen Riemannsche Flächen F_n, auf denen die Verzweigungspunkte ihre Lage mit der Zeit ändern.

Im folgenden zeigen wir nun zunächst mit Hilfe von Eindeutigkeitssätzen, daß es zur Lösung des oben angegebenen allgemeinen Problems hinreicht, ein spezielles, in dem oben angeführten enthaltenes Problem zu lösen, wo die Riemannsche Fläche F_n einen einzigen im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkt besitzt. Die Lösung des allgemeinen Problems läßt sich nämlich durch „Zusammenstückelung" aus den Lösungen des speziellen Problems herstellen. Die Methode, mit der wir dabei die Lösung $u(x, y, t)$ in diesem letzteren einfacheren Falle gewinnen, verwendet im wesentlichen die unter Benutzung des Charakteristikenbegriffes zuerst von Volterra[3]) und dann von Hadamard[4]) modifizierte Verallgemeinerung der Riemannschen Integrationsmethode. Die Funktion $u(x, y, t)$ werden wir demnach in unserem Spezialfalle mit Hilfe einer „Fundamentallösung" $\left(\text{analog der Lösung } \frac{1}{r} \text{ im Falle der elliptischen Differentialgleichung } \Delta u = 0\right)$ und einer „Fundamentalformel" (analog dem Greenschen Satze) unter Verwendung einer von d'Adhémar[5]) und Hadamard[4]) zuerst eingeführten Operation herstellen, die als die Bildung des endlichen Teiles eines un-

[3]) Vito Volterra, Acta mathematica **18** (1894), S. 161.

[4]) J. Hadamard, Acta mathematica **31** (1908), S. 333.

[5]) R. d'Adhémar, Journ. de Mathématiques (5) **10** (1904), S. 131 und (6) 2 (1906), S. 357.

endlichen Integrales (partie finie d'une intégrale infinie) bezeichnet wird. Dabei wird eine übersichtliche Einfachheit der Fundamentalformel, sowie eine gewisse Eleganz der Rechnung durch die Benützung des von d'Adhémar[5]) eingeführten Begriffes der *Konormalen* erreicht.

Indem wir den Weg, der zur Herstellung der Fundamentallösung in dem obigen Spezialfalle dient, ein wenig verallgemeinern, werden wir gleichzeitig ein anderes Problem lösen, das wir folgendermaßen formulieren:

In der x, y-Ebene seien durch die Relation $x + iy = r \cdot e^{i\varphi}$ die Polarkoordinaten r, φ eingeführt. Wir bezeichnen ferner mit K_χ ein Winkelgebiet, dessen Punkte durch die Ungleichungen $0 \leqq \varphi \leqq \chi$, $0 \leqq r$ gegeben sind. Es ist dann eine Funktion $u(x, y, t)$ zu bestimmen, die folgenden Bedingungen genügt:

1'. $u(x, y, t)$ ist auf K_χ mit eventueller Ausnahme des „Scheitels" $r = 0$ für alle Zeiten $t \geqq t_0$ eindeutig gegeben.

2'. $u(x, y, t)$ erfüllt für $t = t_0$ die Anfangsbedingungen:

$$u = f(x, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = g(x, y)$$

und auf den Halbgeraden $\varphi = 0$ und $\varphi = \chi$ zu allen Zeiten die Randbedingungen:

$$\alpha) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \beta) \quad u = 0$$

(n ist dabei die innere Normale an die Halbgeraden $\varphi = 0$ bzw. $\varphi = \chi$).

3'. $u(x, y, t)$ ist samt seinen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen, abgesehen von singulären Stellen, die durch die Anfangsbedingungen verursacht werden, und abgesehen von dem Punkte $r = 0$, für alle Punkte von K_χ endlich und stetig. In dem Punkte $r = 0$ fordern wir die Endlichkeit der Funktion u selbst, sowie die der Ableitung $\frac{\partial u}{\partial t}$ und verlangen ferner, daß $\frac{\partial u}{\partial r}$ dort höchstens so unendlich wird, daß $\lim\limits_{r=0} r \frac{\partial u}{\partial r} = 0$ ist.

4'. $u(x, y, t)$ genügt bis auf die unter 3'. angeführten singulären Stellen der Wellengleichung:

$$\Box u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Die jetzt formulierte Aufgabe stellt im x, y, t-Raume ein „gemischtes Randwertproblem" (problème mixte) dar. Sie wird nämlich teilweise durch „Cauchysche Randbedingungen" (die Anfangsbedingungen für $t = t_0$) und teilweise durch „Dirichletsche Randbedingungen" (die Bedingungen α) oder β) für $\varphi = 0$ und $\varphi = \chi$) bestimmt. Wir bemerken noch, daß sich durch „Zusammenstückelung" aus den obigen Funktionen das gemischte Problem für den Fall lösen läßt, wo die Berandung in der x, y-Ebene aus einem geschlossenen oder ungeschlossenen Streckenzuge besteht[6]).

Schließlich bedarf es wohl kaum eines besonderen Hinweises auf die Tatsache, daß man in dem obigen Probleme die Cauchyschen Bedingungen statt auf der Ebene $t = t_0$ auch auf einer nicht ebenen Fläche S vorgeben kann, die, sonst beliebig, nur der Einschränkung unterworfen ist, daß ihre Normalen mit der t-Achse immer einen Winkel kleiner als $\pi/4$ bilden.

Physikalisch von Interesse sind die Lösungen des durch 1. bis 4. bestimmten Problems in dem Falle, wo wir es mit einer zweiblättrigen Riemannschen Fläche zu tun haben, deren Verzweigungspunkte alle in einer Geraden liegen. Mit Hilfe des Thomson-Sommerfeldschen Spiegelungsverfahrens läßt sich nämlich aus solchen Lösungen der Wellengleichung das zweidimensionale Beugungsproblem für einen ebenen, vollkommen reflektierenden Schirm erledigen, in dem die beugenden Öffnungen von Geraden begrenzt werden, die zueinander parallel sind. Als wichtigste Beispiele nennen wir den Spalt und das ebene Gitter.

Die erwähnten, durch „Zusammenstückelung" aus den Lösungen des durch 1'. bis 4'. bestimmten Problems hergestellten Funktionen stellen Lösungen noch allgemeinerer zweidimensionaler Beugungsprobleme dar, wo die Beugung an einer oder mehreren Zylinderflächen stattfindet, deren Erzeugende zueinander parallel sind und deren senkrechte Querschnitte aus geschlossenen oder ungeschlossenen Streckenzügen bestehen.

II. Eindeutigkeitsbeweis.

Zunächst wollen wir zeigen, daß die Lösung des Problems, das wir im Abschnitte I an erster Stelle formuliert haben, durch die dort angegebenen Bedingungen 1. bis 4. eindeutig bestimmt ist.

Um das Eindeutigkeitstheorem bequem aussprechen zu können, definieren wir einen Kegelraum K in der nachstehenden Weise: x_2, y_2, t_2 sei ein Punkt in einem bestimmten Blatte des Riemannschen Raumes R_n. Er soll über der Fläche $t = t_0$ liegen, es sei also $t_2 > t_0$. Mit x_2, y_2, t_2 als Spitze errichten wir einen Halbkegel Γ_0, dessen Punkte durch die Gleichung $(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - (t - t_2)^2 = 0$ gegeben sein mögen, also einen gewöhnlichen Kegel mit einem Öffnungswinkel von 90^0, dessen Achse parallel zur t-Achse verläuft. Der Kegel Γ_0 wird nun im allgemeinen irgendwelche Verzweigungsgerade des Raumes R_n schneiden. Denken wir uns dann die durch die betreffende Verzweigungsgerade gehende Erzeugende des Kegels aufgezeichnet, so möge die Kegeloberfläche längs jenes Teiles

[6]) A. Rubinowicz, Monatshefte für Math. u. Phys. **30** (1920), S. 65.

dieser Erzeugenden aufgeschnitten werden, der auf der Verzweigungsgeraden beginnt und *nicht* durch die Kegelspitze geht. Diese Kegelfläche Γ_0 soll nun in der Weise ergänzt werden, daß wir den eben erwähnten Teil der Erzeugenden des Kegels, längs dessen wir Γ_0 aufgeschnitten haben, um die Verzweigungsgerade rotieren lassen. Wir beginnen dabei mit der Rotation dieser Geraden bei dem einen Ufer des aufgeschnittenen Kegels Γ_0 und rotieren unsere Gerade entsprechend der Vielfachheit des betreffenden Verzweigungspunktes so lange, bis wir in dem Riemannschen Raume R_n zum anderen Ufer von Γ_0 gelangen. Der so erhaltene Halbkegel möge mit Γ_1^* bezeichnet werden. Trifft nun Γ_1^* auf eine weitere Verzweigungsgerade, so möge der Kegel, der um diese neue Verzweigungsgerade aus Γ_1^* in der gleichen Weise entsteht wie Γ_1^* aus Γ_0, mit Γ_2^* bezeichnet werden. Γ_3^* sei dann ein aus Γ_2^* entstehender Kegel usf. Analog wird bei allen anderen Verzeigungsgeraden, die Γ_0 schneiden, vorgegangen. Die Gesamtheit aller dieser Kegel $\Gamma_1^*, \Gamma_2^*, \ldots$ möge dann im folgenden kurz mit Γ_ν^* bezeichnet werden. Die aus dem Kegel Γ_0 und der Gesamtheit aller Kegelflächen Γ_ν^* bestehende Fläche bildet, wie man aus dem folgenden erkennt, den zur Wellengleichung und zum Raume R_n gehörigen charakteristischen Kegel. Als den Kegelraum K wollen wir nun alle Punkte x, y, t bezeichnen, die innerhalb von Γ_0 oder eines Halbkegels Γ_ν^* gelegen sind und deren t-Koordinaten der Ungleichung $t_2 \geqq t \geqq t_0$ genügen. f_n^0 sei dann jener Teil der Riemannschen Fläche F_n, den die dem Zeitmomente $t = t_0$ entsprechenden Punkte von K bilden. f_n^0 ist also sozusagen die Grundfläche von K.

Eindeutigkeitstheorem: *Durch die Anfangsbedingungen auf f_n^0 ist eine den im Abschnitte* I *unter* 1. *bis* 4. *formulierten Bedingungen genügende Funktion $u(x, y, t)$ in dem Raume K eindeutig bestimmt.*

Den Beweis führen wir nach den bekannten Greenschen Methoden [7]).

Zunächst definieren wir einen Raum R: Aus dem „Kegel“ K bilden wir einen „Kegelstumpf“, indem wir K durch die Fläche $t = t_1$ $(t_2 > t_1 > t_0)$ schneiden und außerdem die Verzweigungsgeraden von K durch Zylinderflächen vom Radius ϱ aus dem Raume R ausschließen. Dabei sollen mit f_n^1 die Schnittflächen von K und $t = t_1$ und mit Z_ν die (der Vielfachheit der Verzweigungsgeraden entsprechend vielfach gewundenen) Zylinderflächen um die Verzweigungsgeraden bezeichnet werden. Die Begrenzung (R) von R besteht also aus den Flächen f_n^0, f_n^1, Γ_0 und der entsprechenden Anzahl von Flächen Γ_ν^* und Z_ν.

Auf den Raum R und seine Begrenzung (R) wenden wir nun zu-

---

[7]) Vgl. A. Rubinowicz, l. c.

nächst eine schon von Volterra[8]) benutzte Integralrelation an (Fundamentalformel):

$$(1) \qquad \iiint\limits_{R} \{v \Box u - u \Box v\}\, dx\, dy\, dt = \iint\limits_{(R)} \left\{ u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\} df.$$

u und v sind dabei zwei in R zweimal ableitbare Funktionen,

$$(2) \qquad \Box u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

und endlich $\frac{\partial}{\partial \nu}$ die Ableitung nach der inneren Konormalen[9]), d. h. (im Falle der Differentialgleichung $\Box u = 0$):

$$(3) \qquad \frac{\partial}{\partial \nu} = \pi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \pi_2 \frac{\partial}{\partial y} - \pi_3 \frac{\partial}{\partial t},$$

wenn π_1, π_2, π_3 die Richtungskosinus der inneren Normalen an die Fläche (R) sind.

Setzen wir nun voraus, daß u der Differentialgleichung $\Box u = 0$ genügt und $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ ist, so wird:

$$I = \iint\limits_{(R)} \left\{ u \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial \nu} \right\} df = 0.$$

Wir bezeichnen die auf die verschiedenen Teile der Begrenzung (R) bezüglichen Integrale I mit $I_{f_n^0}, I_{f_n^1}, I_{\Gamma_0}$ usf. Um sie zu berechnen, nennen wir s die Entfernung von der Kegelspitze x_2, y_2, t_2 längs der Erzeugenden auf Γ_0 und σ die Entfernung von der Spitze eines Kegels Γ_ν^* längs einer Erzeugenden auf diesem Kegel. Ferner führen wir in jeder Fläche $t =$ konst. Polarkoordinaten r, φ (bzw. ϱ, ψ) ein, deren Ursprung in dem Durchschnittspunkte der Kegelachse Γ_0 (bzw. Γ_ν^*) mit der Fläche $t =$ konst. liegt. Für die auf Γ_0 bzw. Γ_ν^* liegenden Punkte ist dann $r = \frac{s}{\sqrt{2}}$ und $\varrho = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$. Die Ableitungen (3) nach der Konormalen ν sind dann auf den einzelnen Begrenzungsflächen von (R) gegeben:

---

[8]) Vito Volterra, l. c.

[9]) Im allgemeinen Falle wird die Konormale in einem bestimmten Punkte P einer Fläche S durch die Richtung definiert, die zur Tangentialebene an S in P in bezug auf den charakteristischen Kegel, dessen Spitze durch P geht, konjugiert ist. Die Konormale fällt also in die Richtung der Tangentialebene, falls in dem betreffenden Punkte P der charakteristische Kegel die Fläche S berührt. In dem Spezialfalle der Wellengleichung wird die Richtung der Konormalen einfach durch Spiegelung der Normalenrichtung an der x, y-Ebene erhalten.

$$\text{auf der Fläche } f_n^0 \text{ durch: } -\frac{\partial}{\partial t},$$

$$\text{" " " } f_n^1 \text{ " } : +\frac{\partial}{\partial t},$$

(4) $$\text{" " " } Z_\nu \text{ " } : \frac{\partial}{\partial \varrho},$$

$$\text{" " " } \Gamma_0 \text{ " } : \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial t}\right)=-\frac{d}{ds},$$

$$\text{" " " } \Gamma_\nu^* \text{ " } : \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\partial}{\partial \varrho}+\frac{\partial}{\partial t}\right)=-\frac{d}{d\sigma}.$$

Es wird somit:

$$I_{f_n^0} = \iint\limits_{f_n^0}\left\{-u\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right\}df,$$

$$I_{f_n^1} = -\iint\limits_{f_n^1}\left\{-u\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right\}df,$$

$$I_{Z_\nu} = \iint\limits_{Z_\nu}\left\{u\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial \varrho}\right\}df,$$

$$I_{\Gamma_0} = \iint\limits_{\Gamma_0}\left\{\frac{u}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right\}df,$$

$$I_{\Gamma_\nu^*} = \iint\limits_{\Gamma_\nu^*}\left\{\frac{u}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho\,\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial \varrho}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right\}df.$$

Auf den gleichen Raum R wenden wir nun eine zweite aus dem Gaußschen Satze

(5) $$-\iiint\limits_R \operatorname{div}\mathfrak{a}\,d\tau=\iint\limits_{(R)}\mathfrak{a}_n\,df$$

folgende Integralrelation an. Wir setzen

$$\mathfrak{a}=\operatorname{curl}\,[\mathfrak{k},\,u\cdot\operatorname{grad}u]$$

so daß $\operatorname{div}\mathfrak{a}=0$ und daher

$$I^*=\iint\limits_{(R)}\operatorname{curl}_n\,[\mathfrak{k},\,u\cdot\operatorname{grad}u]\,df=0$$

wird. Sämtliche Vektoroperationen sind dabei in dem x, y, t-Raume auszuführen. $\mathfrak{k}$ bedeutet den Einheitsvektor in der Richtung der t-Achse und n die nach innen gerichtete Normale. Nun ist:

$$\operatorname{curl}\,[\mathfrak{k},\,u\cdot\operatorname{grad}u]=-\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\operatorname{grad}u-u\cdot\operatorname{grad}\frac{\partial u}{\partial t}+\mathfrak{k}\,\{u\,\Delta u+(\operatorname{grad}u)^2\}$$

und da die Normalenrichtungen bestimmt sind:

auf der Fläche f_n^0 durch: $+\mathfrak{k}$,

" " " f_n^1 " : $-\mathfrak{k}$,

" " " Z_ν " die Richtung von ϱ,

(6) " " " Γ_0 " den Einheitsvektor: $-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi\,\mathfrak{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\,\mathfrak{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{k}$,

" " " Γ_ν^* " " " : $-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\psi\,\mathfrak{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\psi\,\mathfrak{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{k}$,

so sind die Beiträge, die die einzelnen Teile von (R) zu I^* liefern, gegeben durch:

$$I^*_{f_n^0} = \iint\limits_{f_n^0} \left\{ u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} df,$$

$$I^*_{f_n^1} = -\iint\limits_{f_n^1} \left\{ u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} df,$$

$$I^*_{Z_\nu} = \iint\limits_{Z_\nu} \left\{ -\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial \varrho} - u\,\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho\,\partial t} \right\} df,$$

$$I^*_{\Gamma_0} = \iint\limits_{\Gamma_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial t} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left[u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] \right\} df,$$

$$I^*_{\Gamma_\nu^*} = \iint\limits_{\Gamma_\nu^*} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial \varrho} + \frac{u}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho\,\partial t} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left[u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] \right\} df.$$

Nach dem Obigen ist nun $I + I^* = 0$ und daraus folgt unmittelbar unser Eindeutigkeitstheorem. Um diese Summe zu bilden, bemerken wir, daß mit Rücksicht auf $\Box u = 0$:

$$I_{f_n^0} + I^*_{f_n^0} = \iint\limits_{f_n^0} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right\} df,$$

$$I_{f_n^1} + I^*_{f_n^1} = -\iint\limits_{f_n^1} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right\} df.$$

Ferner ist:

$$I_{Z_\nu} + I^*_{Z_\nu} = -2\iint\limits_{Z_\nu} \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial \varrho}\, df.$$

Mit Rücksicht auf $\Box u = 0$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2$ wird weiter

$$I_{\Gamma_0} + I^*_{\Gamma_0} = -\iint\limits_{\Gamma_0} \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right\} df$$

und schließlich analog:

$$I_{\Gamma_\nu^*} + I^*_{\Gamma_\nu^*} = -\iint\limits_{\Gamma_\nu^*} \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \varrho} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right\} df.$$

Lassen wir nun das ϱ des Z_ν gegen Null gehen, so wird mit Rücksicht darauf, daß $\lim\limits_{\varrho=0} \frac{\partial u}{\partial t}$ endlich ist, $\lim\limits_{\varrho=0} \varrho \frac{\partial u}{\partial \varrho} = 0$ wird und $df = \varrho\, d\psi\, dt$ ist:

$$\lim_{\varrho=0} (I_{Z_\nu} + I^*_{Z_\nu}) = 0.$$

Somit entsteht im Grenzfalle $\varrho = 0$ aus $I + I^* = 0$ die Relation:

$$\iint\limits_{f_n^0} \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right\} df - \iint\limits_{f_n^1} \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right\} df$$

$$-\iint\limits_{\Gamma_0} \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right\} df$$

$$-\sum_\nu \iint\limits_{\Gamma_\nu^*} \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \varrho} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right\} df = 0,$$

wobei die Summe über alle in Betracht kommenden Kegel Γ_ν^* zu erstrecken ist[9a]). Mit Hilfe dieser Beziehung können wir jetzt sofort unser Eindeutigkeitstheorem beweisen.

Nehmen wir nämlich an, es gäbe zwei Funktionen u_1 und u_2, die beide in R die im Eindeutigkeitstheorem angeführten Eigenschaften besitzen, so müßte ihre Differenz $U = u_1 - u_2$ mit Rücksicht darauf, daß beide Funktionen auf f_n^0 die gleichen Anfangsbedingungen erfüllen, der Gleichung

$$-\iint\limits_{f_n^1} \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2\right\} df - \iint\limits_{\Gamma_0} \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial t}\right)^2\right\} df$$

$$-\sum_\nu \iint\limits_{\Gamma_\nu^*} \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial U}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \varrho} - \frac{\partial U}{\partial t}\right)^2\right\} df = 0$$

genügen. Da alle Integrale das gleiche Vorzeichen besitzen, so muß aber

$$\text{auf } f_n^1 \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} = 0,$$

[9a]) Anm. b. d. Korrektur. Einfacher ergibt sich die letzte Beziehung aus dem Gaußschen Satze und der in Hinblick auf $\Box u = 0$ identisch erfüllten Relation:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] = 0.$$

$$\text{auf } \Gamma_0 \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{dU}{ds} = 0,$$

$$\text{und } \text{„} \ \Gamma_\nu^* \quad \frac{\partial U}{\partial \psi} = \frac{dU}{d\sigma} = 0$$

sein. Es ist also auf den genannten Flächen $u_1 - u_2 = \text{konst.}$. Da aber u_1 und u_2 auf f_n^0 die gleichen Anfangsbedingungen erfüllen, so muß auf der Schnittlinie von f_n^0 mit Γ_0 und mit den Γ_ν^* $u_1 = u_2$ sein. Wegen der Stetigkeit dieser beiden Funktionen muß aber dann auch auf allen anderen hier in Betracht kommenden Flächen $u_1 = u_2$ sein. Daraus folgt zunächst, daß u insbesondere auch auf der Fläche f_n^1 eindeutig bestimmt ist.

Da aber die Lage der Fläche f_n^1, d. h. des Schnittes von $t = t_1$ mit K, nur der Bedingung $t_2 > t_1 > t_0$ unterworfen ist, so wird die Funktion $u(x, y, t)$ durch die auf f_n^0 vorgegebenen Anfangswerte im ganzen Raume K eindeutig festgelegt. Damit ist also unser Eindeutigkeitstheorem vollständig bewiesen.

Mit Hilfe unseres Eindeutigkeitstheorems läßt sich nun das im Abschnitt I durch die Bedingungen 1. bis 4. bestimmte Problem auf ein viel einfacheres reduzieren. Wir behaupten nämlich: wir können das in Rede stehende Problem für den Fall einer beliebig vorgegebenen Riemannschen Fläche F_n bewältigen, wenn wir es für Riemannsche Flächen Φ_n, die nur einen einzigen Verzweigungspunkt im Endlichen besitzen, lösen können.

Denken wir uns nämlich in dem zu der Fläche F_n gehörigen Riemannschen Raume einen Kegelraum K gegeben, der so gelegen ist, daß er keine oder höchstens eine einzige Verzweigungslinie dieses Riemannschen Raumes enthält. f_n^0 sei wieder die durch K aus F_n herausgeschnittene Riemannsche Fläche. Nach unserem Eindeutigkeitstheorem werden durch die auf f_n^0 gelegenen Anfangswerte die Werte der Funktion u innerhalb K eindeutig festgelegt und zwar unabhängig davon, welche Anfangswerte auf F_n außerhalb f_n^0 vorgeschrieben sind und unabhängig davon, wie die Riemannsche Fläche weiter außerhalb f_n^0 verläuft. Wir erhalten also offenbar innerhalb K die gleiche Funktion u, ob wir f_n^0 nun weiter zu einer nur einen einzigen Verzweigungspunkt im Endlichen besitzenden Riemannschen Fläche Φ_n oder zu einer beliebigen Riemannschen Fläche F_n ergänzen. Nach unserer Voraussetzung, daß wir unser Problem für die Riemannsche Fläche Φ_n lösen können, ist es uns also möglich, auch auf der Fläche F_n für jeden solchen Raum K die Funktion u anzugeben. Daraus folgt aber, daß wir im Falle der Riemannschen Fläche F_n die Funktion $u(x, y, t)$ für alle Punkte des zu F_n gehörigen Riemannschen Raumes angeben können, die innerhalb irgendeines Raumes K gelegen sind, der höchstens eine Verzweigungsgerade des zu F_n gehörigen Riemannschen Raumes enthält. Bezeichnen wir mit l die Entfernung der beiden Verzweigungspunkte auf F_n, die den kleinsten Abstand voneinander besitzen, so sieht man leicht ein, daß u nach dem Obigen sicher für alle Raumpunkte angegeben werden kann, deren t-Koordinaten der Ungleichung $\frac{l}{2} > t - t_0 \geqq 0$ genügen.

Ist nun t' ein die obige Ungleichung befriedigender t-Wert, so können wir u und $\frac{\partial u}{\partial t}$ für t' auf der ganzen Fläche F_n berechnen. Benützen wir diese Werte als Anfangswerte, so können wir die Funktion u für alle t-Werte berechnen, die die Ungleichung $l > t - t_0 \geqq \frac{l}{2}$ erfüllen, ein Verfahren, das wir offenbar beliebig oft fortsetzen können. Wir erhalten so durch ein Verfahren, das wir als die Zusammenstückelung der zu F_n gehörigen Lösung $u(x, y, t)$ aus den zu Φ_n gehörigen Lösungen bezeichnen können, die Funktion $u(x, y, t)$ in dem ganzen der Riemannschen Fläche F_n entsprechenden Raume R_n für alle Zeiten, die der Ungleichung $t \geqq t_0$ genügen.

III. Anwendung des Spiegelungsverfahrens auf das gemischte Problem.

Wir wollen nun zeigen, wie wir durch Anwendung des Spiegelungsverfahrens unser gemischtes Problem 1'. bis 4'. auf ein einfacheres zurückführen können. Um dies zu erreichen, stellen wir die Lösung $u(x, y, t) \equiv u(r, \varphi, t)$ unseres gemischten Problems, je nachdem sie die Randbedingungen α) oder β) erfüllen soll, als Summe bzw. als Differenz zweier Funktionen u_1 und u_2 dar, die auf einer, einen einzigen Verzweigungspunkt im Endlichen enthaltenden unendlichvielblättrigen Riemannschen Fläche Φ_∞ definiert sind. Die Punkte auf Φ_∞ legen wir durch Polarkoordinaten r, φ fest, deren Ursprung in dem Verzweigungspunkt von Φ_∞ liegt. Die Funktionen u_1 und u_2 bestimmen wir durch die Anfangsbedingungen:

$$u_1 = f_1(r, \varphi), \qquad \frac{\partial u_1}{\partial t} = g_1(r, \varphi),$$

$$u_2 = f_2(r, \varphi), \qquad \frac{\partial u_2}{\partial t} = g_2(r, \varphi),$$

die wir in der nachstehenden Weise wählen: Ist zur Zeit $t = t_0$

$$u = f(r, \varphi), \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = g(r, \varphi),$$

so setzen wir zunächst im Bereiche $\chi \geqq \varphi \geqq 0$:

im Falle der Randbedingung α): $f = f_1 + f_2$,

" " " " β): $f = f_1 - f_2$.

Weiter bestimmen wir in beiden Fällen die Funktionen f_1 und f_2 auf der ganzen Fläche Φ_∞ in der Weise, daß sie bei einer Spiegelung an der

Geraden $\varphi = 0$ wechselweise ineinander übergehen (es ist also $f_1(r, \varphi) = f_2(r, -\varphi)$ und $f_2(r, \varphi) = f_1(r, -\varphi)$) und in bezug auf die Veränderliche φ periodisch mit der Periode 2χ sind. In der gleichen Weise definieren wir auf Φ_∞ unter Zugrundelegung der Funktion $g(r, \varphi)$ die Anfangswerte g_1 und g_2.

Wir können nun, wie dies sofort gezeigt werden soll, eine allen Bedingungen 1'. bis 4'. unseres gemischten Problems entsprechende Funktion u herstellen, wenn es uns gelingt, zwei den nachstehenden Bedingungen 1''. bis 4''. genügende Funktionen u_1 und u_2 anzugeben:

1''. u_1 und u_2 sind in dem durch die Ungleichungen

$$0 \leqq r, \qquad -\infty < \varphi < +\infty, \qquad t_0 \leqq t$$

bestimmten Bereiche des zur Fläche Φ_x gehörigen Riemannschen Raumes R_∞ eindeutig definiert.

2''. u_1 und u_2 erfüllen für $t = t_0$ die Anfangsbedingungen:

$$u_1 = f_1, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial t} = g_1,$$

$$u_2 = f_2, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial t} = g_2.$$

3''. u_1 und u_2 sind samt ihren Ableitungen der beiden ersten Ordnungen, abgesehen von der Verzweigungsgeraden und abgesehen von den singulären Stellen, die durch die Anfangsbedingungen zur Zeit $t = t_0$ verursacht werden, überall in dem in 1''. genannten Raume R_∞ endlich und stetig. In der Verzweigungsgeraden sind u_1 und u_2 sowie ihre Ableitungen $\frac{\partial u_1}{\partial t}$ und $\frac{\partial u_2}{\partial t}$ endlich, ihre Ableitungen $\frac{\partial u_1}{\partial r}$ und $\frac{\partial u_2}{\partial r}$ werden hier aber höchstens in einer solchen Weise unendlich, daß $\lim\limits_{r=0} r\frac{\partial u_\nu}{\partial r} = 0$ $(\nu = 1, 2)$ ist.

4''. u_1 und u_2 entsprechen im allgemeinen, d. h. mit Ausnahme der unter 3''. genannten singulären Stellen, der Differentialgleichung:

$$\Box u \equiv -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Wir behaupten nun: Die beiden Funktionen

$$u' = u_1 + u_2 \quad \text{und} \quad u'' = u_1 - u_2$$

stellen für den Fall der Randbedingungen α) bzw. β) die Lösung unseres gemischten Randwertproblems dar. In der Tat ist ja sofort zu sehen, daß u' und u'' sämtlichen für u vorgeschriebenen Bedingungen 1'. bis 4'. genügen. Nur das Erfülltsein der Randbedingungen an den Ebenen $\varphi = 0$ und $\varphi = \chi$ erfordert eine kleine Betrachtung.

Mit Hilfe unseres Eindeutigkeitstheorems erkennt man zunächst leicht, daß auch die Funktionen u_1 und u_2 die nachstehenden, ihren Anfangsbedingungen auferlegten Eigenschaften besitzen: Sie gehen bei einer Spiegelung an $\varphi = 0$ wechselweise ineinander über und sind in bezug auf die Veränderliche φ periodisch mit der Periode 2χ.

Daher ist

$$u_1(r, 0, t) = u_2(r, 0, t),$$
$$\frac{\partial}{\partial\varphi} u_1(r, 0, t) = -\frac{\partial}{\partial\varphi} u_2(r, 0, t),$$

was aber nichts anderes bedeutet, als daß die Funktionen u' und u'' die Randbedingungen 2'. an der Ebene $\varphi = 0$ erfüllen.

Um noch zu zeigen, daß sie auch den Randbedingungen an der Ebene $\varphi = \chi$ genügen, bemerken wir, daß nach den jetzt angeführten Eigenschaften von u_1 und u_2:

$$\underline{u_1(r, \chi, t)} = u_2(r, -\chi, t) = \underline{u_2(r, \chi, t)},$$
$$\underline{\frac{\partial}{\partial\varphi} u_1(r, \chi, t)} = -\frac{\partial}{\partial\varphi} u_2(r, -\chi, t) = \underline{-\frac{\partial}{\partial\varphi} u_2(r, \chi, t)}$$

ist.

Nun sieht man ohne weiteres, daß unser durch 1''. bis 4''. definiertes Problem, das durch 1. bis 4. bestimmte als Spezialfall in sich schließt, falls die Riemannsche Fläche F_n nur einen einzigen im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkt hat. Setzen wir nämlich in unserem jetzigen Problem $\chi = m\pi$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, so ist die in diesem Falle auf Φ_∞ definierte Funktion schon auf einer m-blättrigen Riemannschen Fläche Φ_m eindeutig darstellbar. Nach den Überlegungen im Abschnitt II genügt es also, das jetzige Problem zu lösen.

Dies kann jedoch erst im Abschnitt VI geschehen, da wir in dem nun folgenden Abschnitt IV an ein zur Bewältigung unserer Aufgabe erforderliches Hadamardsches Operationssymbol erinnern und im Abschnitt V zunächst die Fundamentallösung für unser Problem herstellen müssen.

IV. Ein von Hadamard eingeführtes Operationssymbol[10]).

Wir betrachten das Integral

$$I(x) = \int_a^x \frac{A(x)}{(b-x)^{p+\alpha}}\, dx,$$

wo p eine ganze Zahl bedeutet und α zwischen 0 und 1 gelegen ist, ohne jedoch diesen beiden Grenzen jemals gleich zu werden. Von der Funktion $A(x)$ setzen wir voraus, daß sie mindestens $(p-1)$-mal ableitbar ist

[10]) J. Hadamard, l. c.

und daß ihre $(p-1)$-te Ableitung $A^{(p-1)}(x)$ die Bedingung von Lipschitz $(|A^{(p-1)}(b) - A^{(p-1)}(x)| < K \cdot |b-x|)$ erfüllt.

Ist $p > 0$, so ist im allgemeinen der $\lim\limits_{x=b} I(x)$ nicht vorhanden. Es läßt sich aber leicht zeigen, daß in diesem Falle zu $I(x)$ eine Funktion der Form

$$\frac{B(x)}{(b-x)^{p-1+\alpha}}$$

addiert werden kann, so daß der Grenzwert

$$\lim_{x=b}\left[I(x) + \frac{B(x)}{(b-x)^{p-1+\alpha}}\right] \tag{7}$$

existiert. Setzen wir voraus, daß $B(x)$ ebenfalls $p-1$ Ableitungen besitzt und daß seine $(p-1)$-te Ableitung die Bedingung von Lipschitz erfüllt, so ist der Grenzwert (7) von der sonstigen Wahl der Funktion $B(x)$ unabhängig, wird von Hadamard mit

$$\overline{\left|\int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{p+\alpha}}\,dx\right.} \tag{8}$$

bezeichnet und heißt der endliche Teil des unendlichen Integrals:

$$\int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{p+\alpha}}\,dx\,.$$

Es ist nicht schwer, für den Wert der durch den Hadamardschen Operator angedeuteten Operation (8) einen Ausdruck in den gebräuchlichen Operationssymbolen zu geben. So ist z. B. in dem für uns in dem folgenden allein in Betracht kommenden Falle $p=1$:

$$\overline{\left|\int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{1+\alpha}}\,dx\right.} = \int_a^b \frac{A(x)-A(b)}{(b-x)^{1+\alpha}}\,dx - \frac{A(b)}{\alpha(b-a)^{\alpha}}\,.$$

Es ist nun für das weitere sehr wichtig zu bemerken, daß der Ausdruck (8) im Falle, wo b und $A(x)$ von einem Parameter t abhängen:

$$b = b(t), \qquad A(x) = A(x,t)$$

in der Weise nach t abgeleitet werden kann, daß man einfach unter dem Integralzeichen den Integranden nach t differenziert. Es ist also:

$$\frac{d}{dt}\overline{\left|\int_a^b \frac{A(x,t)}{(b(t)-x)^{p+\alpha}}\,dx\right.} = \overline{\left|\int_a^b \left[\frac{\frac{\partial A}{\partial t}}{(b-x)^{p+\alpha}} - (p+\alpha)\frac{db}{dt}\frac{A}{(b-x)^{p+1+\alpha}}\right]dx\right.}\,.$$

Die Definition des Hadamardschen Operationssymbols läßt sich auch leicht auf den Fall mehrfacher Integrale erweitern: Es sei T eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, deren Punkte durch die rechtwinkligen, kartesischen Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezeichnet werden mögen und die abgesehen von anderen auch durch die Fläche

$$\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

begrenzt wird. Unter dem endlichen Teile

$$(9) \qquad \left|\overline{\int\!\!\int_T \cdots \int \frac{A(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Gamma^{p+\alpha}}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n}\right.$$

des über das Gebiet T erstreckten Integrals

$$\int\!\!\int_T \cdots \int \frac{A(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Gamma^{p+\alpha}}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

wird dann folgendes verstanden: Sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \Gamma$ krummlinige Koordinaten und

$$dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = K \cdot d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1}\, d\Gamma,$$

so ist der Ausdruck (9) gleich

$$\underbrace{\int\!\!\int \cdots \int}_{n-1} d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1} \left|\overline{\int \frac{A K}{\Gamma^{p+\alpha}}\, d\Gamma}\right. .$$

Es läßt sich somit, wie dies ja aus (7) unmittelbar folgt, der Ausdruck (9) als der Grenzwert der Differenz eines n-fachen und eines $(n-1)$-fachen Integrals auffassen.

V. Die zu unserem Randwertproblem gehörige Fundamentallösung.

Hadamard[11]) gewinnt die Lösung des Cauchyschen Problems mit Hilfe der Fundamentallösung der partiellen Differentialgleichung, die zur gegebenen adjungiert ist. Unsere Differentialgleichung (Wellengleichung) $\Box u = 0$ ist nun mit der zu ihr adjungierten Differentialgleichung identisch. Um hier das Cauchysche Problem zu lösen, wird man also die zur ursprünglich gegebenen Wellengleichung $\Box u = 0$ gehörige Fundamentallösung zu bilden haben. Diese wird nun, falls $\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}$ die Spitze und x, y, t einen Punkt im Innern des charakteristischen Kegels

$$\Gamma_0 = -(x-\bar{x})^2 - (y-\bar{y})^2 + (t-\bar{t})^2 = 0$$

[11]) J. Hadamard, l. c.

bezeichnet (für solche Punkte x, y, t ist $\Gamma_0 > 0$), dargestellt durch die Funktion:

$$\frac{1}{\sqrt{\Gamma_0}} = \frac{1}{\sqrt{-(x-\bar{x})^2-(y-\bar{y})^2+(t-\bar{t})^2}}.$$

Um die Funktion $w(r, \varphi, t;\ \bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{t};\ \chi)$, die die obige Fundamentallösung in unserem Randwertproblem ersetzt, bequem definieren zu können, wollen wir zunächst die zu ihr gehörigen charakteristischen Kegel angeben. Dabei legen wir die Punkte in dem der Riemannschen Fläche Φ_∞ entsprechenden Riemannschen Raume R_∞ durch die Zylinderkoordinaten r, φ, t fest, wie wir es im Abschnitt III getan haben. Um die Lösung unseres Problems gleich in einer entsprechenden Form zu erhalten, wollen wir dabei w so definieren, daß schon die im Bereiche $0 < r$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\chi$ auf der Fläche Φ_∞ liegenden Anfangswerte der Funktionen u_1 und u_2 (die im folgenden beide einfach mit u bezeichnet werden sollen) zur Herstellung der Lösung genügen. Dies bedingt, wie man aus dem folgenden sieht, daß w in bezug auf die Veränderliche φ periodisch mit der Periode 2χ ist und daher der charakteristische Kegel Γ_0 in R_∞ in unendlich vielen Exemplaren auftritt.

Um nun die charakteristischen Kegel anzugeben, fassen wir in R_∞ einen Punkt ins Auge, der die Koordinaten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}$ besitzen möge. Die entsprechenden Zylinderkoordinaten seien $\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{t}$. Errichten wir nun in R_∞ mit diesem Punkt als Spitze einen zur Differentialgleichung $\Box u = 0$ gehörigen charakteristischen Kegel $\Gamma_0 = 0$, so lautet seine Gleichung:

$$(10)\qquad \begin{aligned} \Gamma_0 &\equiv -(x-\bar{x})^2-(y-\bar{y})^2+(t-\bar{t})^2 \\ &= -r^2-\bar{r}^2+2r\bar{r}\cdot\cos(\bar{\varphi}-\varphi)+(t-\bar{t})^2 = 0 \\ &\qquad (-\pi < \bar{\varphi}-\varphi < +\pi). \end{aligned}$$

Dabei ist der den Variabilitätsbereich der Veränderlichen φ beschränkende Zusatz ganz besonders zu beachten. Durch die Gleichung $\Gamma_0 = 0$ allein würde nämlich eine unendliche Anzahl solcher Kegel (10) dargestellt werden, deren Spitzen in R_∞ in den Punkten $\bar{r}, \bar{\varphi}+2\nu\pi, \bar{t}$ gelegen sind. Der Zusatz besagt aber, daß die beiden Geraden:

$$\varphi = \bar{\varphi}+\pi,\ \Gamma_0 = 0 \quad \text{und} \quad \varphi = \bar{\varphi}-\pi,\ \Gamma_0 = 0$$

eine Begrenzung der Kegelfläche $\Gamma_0 = 0$ bilden, mithin Γ_0 durch die Verzweigungsgerade $r = 0$ sozusagen aufgeschnitten wird, wie wir es uns schon beim Beweise des Eindeutigkeitssatzes vorgestellt haben.

Errichten wir nun in R_∞ weitere ebensolche charakteristische Kegel auch in den Punkten:

$$\bar{r}, \bar{\varphi}+2\nu\chi, \bar{t}, \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

von denen jeder durch eine um die Verzweigungsgerade, um den entsprechenden Winkel $-2\nu\chi$ ausgeführte Drehung in den Punkt $\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{t}$ übergeführt wird, so lassen sich alle diese Kegel durch die Gleichnng:

$$(11) \quad \Gamma_\nu \equiv -r^2 - \bar{r}^2 + 2r\bar{r}\cdot\cos(\bar{\varphi} - \varphi + 2\nu\chi) + (t - \bar{t})^2 = 0,$$
$$-\pi < \bar{\varphi} - \varphi + 2\nu\chi < +\pi \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

darstellen. Ferner werden bei der Funktion w die beiden unendlichvielblättrigen Kegelflächen:

$$\Gamma^* \equiv -(r + \bar{r})^2 + (t - \bar{t})^2 = 0, \qquad (-\infty < \varphi < +\infty)$$
$$\Gamma^{**} \equiv -(r - \bar{r})^2 + (t - \bar{t})^2 = 0, \qquad (-\infty < \varphi < +\infty),$$

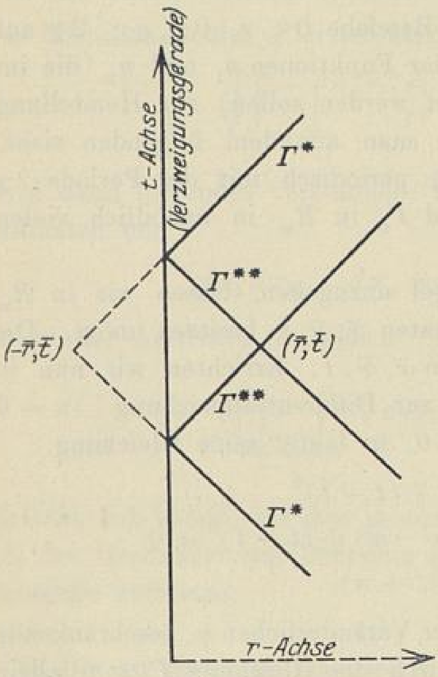

Fig. 1.

von denen wir Γ^* schon von früher her kennen, eine ausgezeichnete Rolle spielen. Sie entstehen durch eine in R_∞ um die Verzweigungsgerade als Achse stattfindende Rotation der in Fig. 1 ausgezogenen Geraden. Jeder Kegel Γ^* und Γ^{**} besteht aus je zwei einfachen Halbkegeln, deren Spitzen in zwei verschiedenen Punkten der Verzweigungsgeraden gelegen sind. Man kann sich auch Γ^* bzw. Γ^{**} durch ein Auseinander- bzw. Ineinanderschieben von zwei Halbkegeln entstanden denken, die zusammen einen unendlichvielblättrigen Doppelkegel bilden. Die Spitzen der beiden Halbkegel Γ^* fallen aber mit den Spitzen der beiden Halbkegel Γ^{**} zusammen. Wir bemerken noch, daß in den beiden Geraden:

$$(12) \qquad \Gamma_\nu = 0, \quad \varphi = \bar{\varphi} + 2\nu\chi \pm \pi \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

die einen Kegel Γ_ν begrenzen, der Kegel Γ_ν die beiden Kegel Γ^* und Γ^{**} berührt und daß ferner die beiden auf der Verzweigungsgeraden gelegenen Punkte:

$$r = 0, \; t = \bar{t} \pm \bar{r}$$

zugleich allen Kegeln Γ_ν sowie den beiden Kegeln Γ^* und Γ^{**} gemeinsam sind.

Wir definieren nun die die Fundamentallösung $\frac{1}{\sqrt{\Gamma_0}}$ ersetzende Funktion $w(r, \varphi, t; \bar{r}, \varphi, \bar{t}; \chi)$ in der nachstehenden Weise:

1*. Die Funktion w ist in allen Punkten des Raumes R_∞ eindeutig definiert, die einer der beiden Bedingungen:

a) $\Gamma_\nu > 0$ und $-\pi \leqq \bar{\varphi} - \varphi + 2\nu\chi \leqq +\pi$ oder b) $\Gamma^* \geqq 0$

genügen, d. h. in allen Punkten von R_∞, die innerhalb eines Kegels Γ_ν oder innerhalb des Kegels Γ^* gelegen sind. Dieser Raum soll R^* heißen.

2*. In R^* ist w überall endlich. In den Kegelflächen $\Gamma_\nu = 0$ wird w wie $\frac{1}{\sqrt{\Gamma_\nu}}$ unendlich. Ferner ist w, abgesehen von den charakteristischen Kegeln Γ_ν und Γ^*, überall stetig und besitzt außerhalb der genannten Stellen und der Verzweigungsgeraden $r = 0$ stetige partielle Ableitungen beliebiger Ordnung nach r, φ, t. In der Verzweigungsgeraden sind w und $\frac{\partial w}{\partial t}$ endlich und $\frac{\partial w}{\partial r}$ wird hier höchstens so unendlich, daß $\lim\limits_{r=0} r \frac{\partial w}{\partial r} = 0$ wird.

3*. Abgesehen von diesen singulären Stellen genügt ferner die Funktion w in allen Punkten von R^* der Differentialgleichung:

$$\Box\, w \equiv -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

4*. w ist schließlich in bezug auf die Veränderliche φ periodisch mit der Periode 2χ.

Zur Herstellung der Funktion w könnte man sich nun vollständig analoger Betrachtungen bedienen, wie sie etwa Sommerfeld[12]) in der Theorie der Beugung benützt. Auf einem solchen Wege gelangt man zum folgenden Resultat: Wir behaupten: w ist der Realteil der durch das nachstehende Integral dargestellten Funktion:

(13)
$$W(r, \varphi, t; \bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{t}; \chi)$$
$$= \frac{1}{2\chi} \int\limits_{(U_1+U_2)} \frac{d\alpha}{\sqrt{-r^2 - \bar{r}^2 + 2r\bar{r}\cos(\varphi - \alpha) + (t - \bar{t})^2}} \cdot \frac{e^{i\frac{\pi}{\chi}\alpha}}{e^{i\frac{\pi}{\chi}\alpha} - e^{i\frac{\pi}{\chi}\bar{\varphi}}}.$$

Der Integrationsweg $(U_1 + U_2)$ ist dabei in der komplexen α-Ebene über die Schleifen (U_1) und (U_2) zu erstrecken, wobei (U_1) z. B. von $\varphi + \pi + \omega_1 + i\infty$ bis $\varphi - \pi + \omega_2 + i\infty$ und (U_2) von $\varphi - \pi - \omega_3 - i\infty$ bis $\varphi + \pi - \omega_4 - i\infty$ läuft. In den obigen Integrationsgrenzen ist dabei für die reellen Konstanten ω_ν eine der Ungleichung $0 \leqq \omega_\nu \leqq \pi$ entsprechende Wahl zu treffen. (Vgl. Fig. 2, in der alle $\omega_\nu = \omega$ einander gleich

[12]) A. Sommerfeld, Math. Ann. 47 (1896), S. 317. Eine Übersicht über die Sommerfeldsche Theorie der Beugung gibt P. S. Epstein in der Enzykl. d. math. Wiss. Bd. V_3, S. 488. (Anmerkung bei der Korrektur.) Vgl. auch Sommerfelds Beitrag zur neuen Riemann-Weber-Ausgabe, 2, Kap. XIII (im Erscheinen).

angenommen sind und die dem Falle entspricht, daß $\Gamma^* > 0$ ist, der Punkt r, φ, t also innerhalb des Kegels Γ^* liegt.)

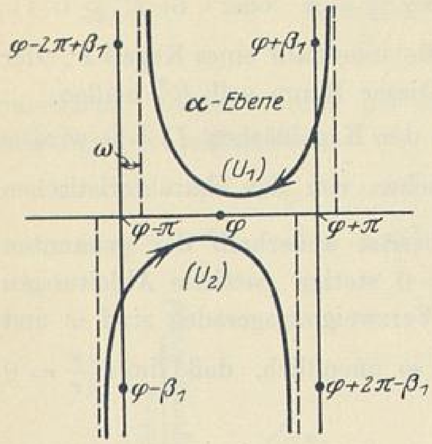

Fig. 2.

Von den Integrationswegen (U_1) und (U_2) wird weiter vorausgesetzt, daß sie über die im Endlichen gelegenen singulären Stellen des Integranden der Funktion W nicht hinübergezogen werden dürfen. Dabei sollen die von der Funktion $\dfrac{e^{i\frac{\pi}{\chi}\alpha}}{e^{i\frac{\pi}{\chi}\alpha} - e^{i\frac{\pi}{\chi}\bar{\varphi}}}$ herrührenden, auf der reellen Achse der α-Ebene befindlichen einfachen Pole

$$(14) \qquad \bar{\varphi} + 2\nu\chi \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

alle stets außerhalb des von (U_1) bzw. von (U_2) umschlossenen Gebietes liegen. Von den unendlich vielen, durch die Quadratwurzel des Integranden bedingten Verzweigungspunkten:

$$(15) \qquad \begin{aligned} \alpha &= \varphi \pm \beta_1 + 2\mu\pi \qquad (\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \\ \beta_1 &= \arccos \frac{r^2 + \bar{r}^2 - (t-\bar{t})^2}{2 r \bar{r}} = \arccos\left(-\frac{\Gamma^*}{2 r \bar{r}} - 1\right) \end{aligned}$$

sollen sich aber die beiden

$$(16) \qquad \varphi + \beta_1 \quad \text{und} \quad \varphi - \beta_1$$

stets innerhalb (U_1) bzw. (U_2) befinden, während alle übrigen Verzweigungspunkte der Wurzel insbesondere auch

$$\varphi - 2\pi + \beta_1 \quad \text{und} \quad \varphi + 2\pi - \beta_1$$

stets außerhalb der Schleifen (U_1) und (U_2) liegen sollen.

Das Vorzeichen der in (13) in dem Integranden auftretenden Quadratwurzel ist so festzulegen, daß die Wurzel auf der reellen Achse der α-Ebene, falls hier kein Verzweigungspunkt des Integranden liegt (vgl. unten), einen positiven Wert hat. Die zu den Verzweigungspunkten (16) gehörigen Verzweigungsschnitte sollen in der α-Ebene innerhalb (U_1) bzw. innerhalb (U_2) so ins Unendliche verlaufen, daß sie von diesen Integrationswegen nicht geschnitten werden.

Wir wollen noch ausdrücklich darauf hinweisen, daß die Integrationswege (U_1) und (U_2) und die Verzweigungspunkte $\varphi \pm \beta_1 + 2\mu\pi$ sich mit φ zugleich ändern, jedoch derart, daß, falls der Ausdruck $\dfrac{r^2 + \bar{r}^2 - (t-\bar{t})^2}{2 r \bar{r}}$

seinen Wert beibehält, ihre gegenseitige Konfiguration die gleiche bleibt. Die in den Punkten (14) befindlichen Pole haben dagegen eine von φ unabhängige Lage. Im folgenden ist auch immer zu beachten, daß der Punkt $\alpha = \infty$ für unseren Integranden eine wesentlich singuläre Stelle ist.

Schließlich sieht man noch sofort, daß das Integral (13) im allgemeinen konvergieren wird, d. h. mit eventueller Ausnahme der Fälle, wo die Verzweigungspunkte des Integranden ins Unendliche rücken oder wo der Integrationsweg gezwungen wird, durch einen singulären Punkt des Integranden hindurchzugehen. Der Integrand von (13) verhält sich nämlich, falls die Verzweigungspunkte im Endlichen liegen, im Unendlichen auf den Geraden $\Re(\alpha) = \varphi \pm \pi \pm \omega_\nu$, wenn wir die Integrationsveränderliche a durch die Gleichung $\alpha = \varphi \pm \pi \pm \omega_\nu + i a$ einführen, für große negative a wie $e^{+\frac{1}{2}a}$ und für große positive a wie $e^{-\left(\frac{\pi}{\chi}+\frac{1}{2}\right)\cdot a}$.

Bevor wir zur Diskussion der Funktion $w = \Re(W)$ übergehen, wollen wir sie noch in reeller Form angeben, da sich aus dieser Darstellung einige ihrer Eigenschaften mühelos folgern lassen. Bei dieser Umformung müssen wir über die Lage der Verzweigungspunkte

$$\varphi \pm \beta_1, \quad \varphi \pm (2\pi - \beta_1) \tag{17}$$

näher orientiert sein. Liegt zunächst der Punkt r, φ, t innerhalb des Kegels Γ^*, so ist $\Gamma^* > 0$ und infolgedessen

$$\cos\beta_1 = -\frac{\Gamma^*}{2 r \bar{r}} - 1 < -1.$$

Setzen wir

$$\beta_1 = i a_1 + \pi,$$

so wird

$$\cos i a_1 = \frac{\Gamma^*}{2 r \bar{r}} + 1, \tag{18}$$

a_1 also reell sein. Die Punkte (17) liegen daher unter dieser Voraussetzung in der α-Ebene in

$$\varphi \pm (i a_1 + \pi) \quad \text{und} \quad \varphi \mp (i a_1 - \pi),$$

also auf den Geraden $\Re(\alpha) = \varphi \pm \pi$ symmetrisch zur reellen Achse der α-Ebene. Diesem Falle entspricht die Fig. 2. Nähert sich nun der Punkt r, φ, t der Verzweigungsgeraden $r = 0$, so wird, wie aus (18) zu ersehen ist, a_1 gegen $+\infty$ wandern. Nähert sich aber r, φ, t dem Kegel $\Gamma^* = 0$, nimmt also $\Gamma^* > 0$ ab, so wird a_1 kleiner, und wenn der Punkt r, φ, t in die Kegelfläche $\Gamma^* = 0$ zu liegen kommt, verschwindet a_1 und die beiden auf jeder Geraden $\Re(\alpha) = \varphi + \pi$ bzw. $\Re(\alpha) = \varphi - \pi$ befindlichen Verzweigungspunkte fallen miteinander zusammen. Für $\Gamma^* = 0$ muß also der Integrationsweg (U_1) durch den Punkt $\alpha = \varphi + \pi$ und der Weg (U_2)

durch den Punkt $\alpha = \varphi - \pi$ gehen. Ist endlich der Punkt r, φ, t außerhalb des Kegels Γ^*, aber innerhalb Γ^{**} gelegen ($\Gamma^* < 0, \Gamma^{**} > 0$), so ist

$$-1 < -\frac{\Gamma^*}{2 r \bar{r}} - 1 = \cos \beta_1 = -\frac{\Gamma^{**}}{2 r \bar{r}} + 1 < +1 .$$

β_1 hat jetzt also einen reellen Wert und die uns interessierenden, auf der Strecke $\langle \varphi - \pi, \varphi + \pi \rangle$ befindlichen Verzweigungspunkte liegen nun auf der reellen Ache der α-Ebene und zwar in den Punkten

$$\varphi + \beta_1 \quad \text{und} \quad \varphi - \beta_1 .$$

Wir können uns daher vorstellen, daß sich die beiden Verzweigungspunkte $\varphi \pm (\pi + i a_1)$ mit abnehmendem Γ^* auf den ausgezogenen Wegen (1) und (2) der Fig. 3 im Sinne der Pfeile bewegen. Die beiden Verzweigungspunkte $\varphi \pm (\pi - i a_1)$ werden dann auf den gestrichelten Wegen (3) und (4) in die Punkte $\varphi \pm (2\pi - \beta_1)$ übergehen müssen. Es soll aber betont werden, daß, wenn im folgenden gemäß der oben erwähnten Möglichkeit stets angenommen wird, die Verzweigungspunkte $\varphi \pm \beta_1$ verschöben sich in der in Fig. 3 angedeuteten Weise, dies eine wesentliche und notwendige Ergänzung der früher angegebenen Definition der Funktion W ist. Berücksichtigen wir nämlich unsere Voraussetzung, daß (U_1) und (U_2) über singuläre Punkte nicht hinübergezogen werden dürfen, so werden wir jetzt folgerichtig mit abnehmendem Γ^* die genannten Integrationswege so, wie dies Fig. 4 anzeigt, deformieren.

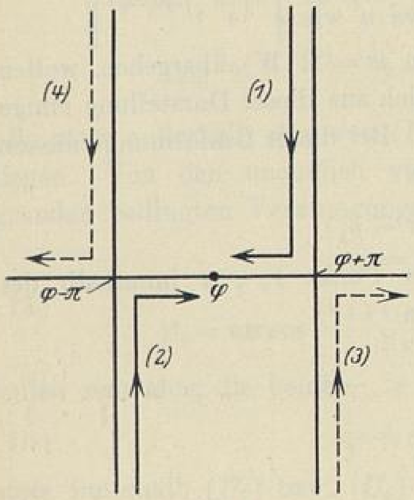

Fig. 3.

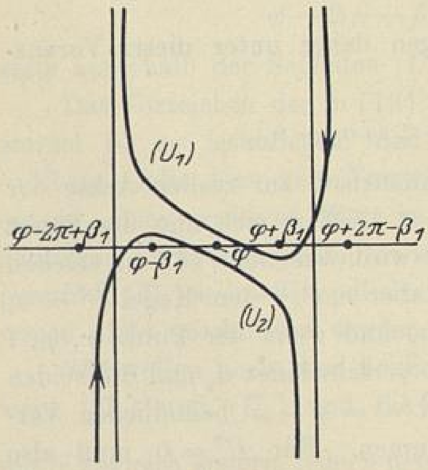

Fig. 4.

Wir wollen nun die gesuchte Darstellung der Funktion $w = \Re(W)$ zunächst in dem Falle angeben, wo die Verzweigungspunkte $\varphi \pm \beta_1$ des Integranden von W in den Geraden $\Re(\alpha) = \varphi \pm \pi$ gelegen sind. Zu diesem Zwecke müssen wir nur die Integrationswege (U_1) und (U_2) in die beiden Geraden $\Re(\alpha) = \varphi \pm \pi$ und das zwischen ihnen befindliche Stück der reellen Achse der α-Ebene deformieren. Die Verzweigungspunkte und Pole des Integranden in (13) sind dabei mit kleinen Halbkreisen zu umgeben (vgl. Fig. 5).

Zunächst erkennt man, daß die auf der reellen Achse verlaufenden Teile der deformierten Integrationswege (U_1) und (U_2) sich bis auf die Schleifen um die hier etwa vorhandenen Pole $\overline{\varphi} + 2\nu\chi\,(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ des Integranden der Funktion (13) gegeneinander wegheben. Eine Schleife um $\overline{\varphi} + 2\nu\chi$ gibt aber nach dem Cauchyschen Residuensatze die Funktion $\frac{1}{\sqrt{\Gamma_\nu}}$. Das Residuum $\frac{1}{\sqrt{\Gamma_\nu}}$ ist daher stets vorhanden, sobald der entsprechende Pol

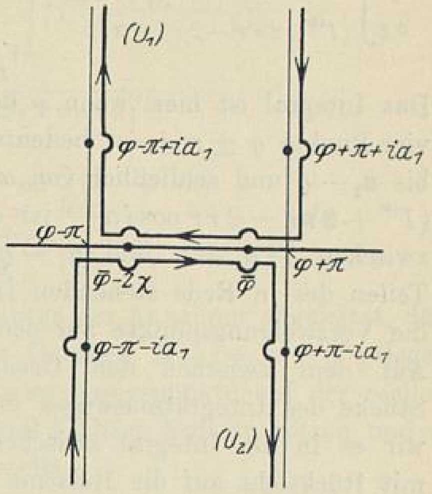

Fig. 5.

$\overline{\varphi} + 2\nu\chi$ auf der Strecke $\varphi - \pi$, $\varphi + \pi$ liegt, d. h. sobald $\varphi - \pi < \overline{\varphi} + 2\nu\chi < \varphi + \pi$ ist. Der Beitrag der zwischen $\varphi - \pi$ und $\varphi + \pi$ verlaufenden Integrationswege zur Funktion W läßt sich daher immer durch eine unendliche reelle Summe

$$S = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu}\, \vartheta_\nu(\varphi) \frac{1}{\sqrt{\Gamma_\nu}}$$

darstellen, wo $\vartheta_\nu(\varphi)$ ein Diskontinuitätsfaktor ist, der nur für die zwischen $\overline{\varphi} + 2\nu\chi + \pi$ und $\overline{\varphi} + 2\nu\chi - \pi$ gelegenen φ-Werte den Wert 1, außerhalb dieses Intervalles aber den Wert 0 hat. Das obige Resultat bleibt unverändert bestehen, selbst wenn der in Fig. 5 nicht berücksichtigte Fall eintritt, daß die Verzweigungspunkte $\varphi \pm \beta_1$ auf der reellen Achse der α-Ebene liegen. Es dürfte wohl kaum notwendig sein, zu erwähnen, daß wegen des Diskontinuitätsfaktors $\vartheta_\nu(\varphi)$ für jede Wahl der r, φ, t-Werte nur eine endliche Anzahl der unter dem Summenzeichen stehenden Glieder zu nehmen ist.

Jetzt erübrigt es nur noch, den Anteil zu berechnen, den der in den Geraden $\Re(\alpha) = \varphi \pm \alpha$ sowie der in den kleinen Halbkreisen um die vier Punkte $\varphi \pm \pi \pm i a_1$ verlaufende Teil des deformierten Integrationsweges zur Funktion $w = \Re(W)$ liefert. In die Integrale, die auf den Geraden $\Re(\alpha) = \varphi + \pi$ bzw. $\Re(\alpha) = \varphi - \pi$ selbst verlaufen, führen wir durch die Gleichung:

$$\alpha = \varphi + \pi + i a \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \varphi - \pi + i a$$

eine neue Integrationsvariable a ein und erhalten so als Beitrag zum Integral (13) den Ausdruck:

$$\frac{i}{2\chi}\int\frac{1}{(\Gamma^*+2r\bar{r}-2r\bar{r}\cos ia)^{1/2}}\left[\frac{1}{1-e^{i\frac{\pi}{\chi}(\bar{\varphi}-\varphi+\pi-ia)}}-\frac{1}{1-e^{i\frac{\pi}{\chi}(\bar{\varphi}-\varphi-\pi-ia)}}\right]da.$$

Das Integral ist hier, wenn ϱ den Radius der kleinen Halbkreise um die vier Punkte $\varphi\pm\pi\pm ia_1$ bedeutet, von $-\infty$ bis $-a_1-\varrho$, von $-a_1+\varrho$ bis $a_1-\varrho$ und schließlich von $a_1+\varrho$ bis $+\infty$ zu erstrecken. Die Wurzel $(\Gamma^*+2r\bar{r}-2r\bar{r}\cos ia)^{1/2}$ ist dabei nach der oben gemachten Festsetzung zwischen $-a_1+\varrho$ und $a_1-\varrho$ reell und zwar positiv, auf den anderen Teilen des in Rede stehenden Integrationsweges (wegen des Umlaufes um die Verzweigungspunkte auf den kleinen Halbkreisen) aber rein imaginär. Auf dem zwischen den Grenzen $-a_1+\varrho$ und $a_1-\varrho$ verlaufenden Stücke des Integrationsweges erhalten wir nun für unser Integral, wenn wir es in ein Integral zwischen den Grenzen 0 und $a_1-\varrho$ verwandeln, mit Rücksicht auf die Relation:

$$\frac{1}{1-e^{i(\alpha+\beta)}}+\frac{1}{1-e^{i(\alpha-\beta)}}=\frac{-e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{e^{-i\alpha}+e^{i\alpha}-e^{i\beta}-e^{-i\beta}}+1=-i\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha-\cos\beta}+1$$

den rein reellen Ausdruck:

$$\frac{1}{2\chi}\int\limits_0^{a_1-\varrho}\frac{1}{(\Gamma^*+2r\bar{r}-2r\bar{r}\cos ia)^{1/2}}$$
$$\times\left[\frac{\sin\frac{\pi}{\chi}(\bar{\varphi}-\varphi+\pi)}{\cos\frac{\pi}{\chi}(\bar{\varphi}-\varphi+\pi)-\cos i\frac{\pi}{\chi}a}-\frac{\sin\frac{\pi}{\chi}(\bar{\varphi}-\varphi-\pi)}{\cos\frac{\pi}{\chi}(\bar{\varphi}-\varphi-\pi)-\cos i\frac{\pi}{\chi}a}\right]da.$$

Die übrigen längs der Geraden $\Re(\alpha)=\varphi\pm\pi$ verlaufenden Teile des Integrationsweges werden, wie man jetzt sofort erkennt, einen rein imaginären Beitrag zu W liefern, in den Ausdruck für $w=\Re(W)$ also gar nicht eingehen. Da die über die kleinen Halbkreise erstreckten Integrale mit abnehmendem ϱ gegen 0 konvergieren, so wird der Realteil des Beitrages, den die längs der Geraden $\Re(\alpha)=\varphi\pm\pi$ sowie die längs der vier kleinen Halbkreise verlaufenden Teile des deformierten Integrationsweges zu der Funktion W liefern, durch das Integral dargestellt:

$$(19)\qquad I=\frac{1}{2\chi}\int\limits_0^{a_1}\frac{1}{(\Gamma^*+2r\bar{r}-2r\bar{r}\cos ia)^{1/2}}$$
$$\times\left[\frac{\sin\frac{\pi}{\chi}(\bar{\varphi}-\varphi+\pi)}{\cos\frac{\pi}{\chi}(\bar{\varphi}-\varphi+\pi)-\cos i\frac{\pi}{\chi}a}-\frac{\sin\frac{\pi}{\chi}(\bar{\varphi}-\varphi-\pi)}{\cos\frac{\pi}{\chi}(\bar{\varphi}-\varphi-\pi)-\cos i\frac{\pi}{\chi}a}\right]da.$$

Für die Funktion w erhalten wir so die gesuchte reelle Darstellung in der Form:

$$(20)\qquad w(r,\varphi,t;\,\bar r,\bar\varphi,\bar t;\,\chi) = S + I = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu}\,\vartheta_\nu(\varphi)\frac{1}{\sqrt{\Gamma_\nu}}$$

$$+\frac{1}{2\chi}\int\limits_0^{a_1}\frac{1}{(\Gamma^* + 2r\bar r - 2r\bar r\cos i\,a)^{1/2}}$$

$$\times\left[\frac{\sin\frac{\pi}{\chi}(\bar\varphi-\varphi+\pi)}{\cos\frac{\pi}{\chi}(\bar\varphi-\varphi+\pi)-\cos i\frac{\pi}{\chi}a} - \frac{\sin\frac{\pi}{\chi}(\bar\varphi-\varphi-\pi)}{\cos\frac{\pi}{\chi}(\bar\varphi-\varphi-\pi)-\cos i\frac{\pi}{\chi}a}\right]da.$$

Wir haben diesen Ausdruck für w unter der Annahme abgeleitet, daß die Verzweigungspunkte $\varphi\pm\beta_1$ auf den Geraden $\Re(\alpha)=\varphi\pm\pi$ gelegen sind. In dem Falle, wo diese beiden Verzweigungspunkte auf der reellen Achse der α-Ebene liegen, ist das Integral I gleich Null zu setzen und w wird einfach durch die Summe S dargestellt.

Eine andere Darstellung für I, die wir an einer späteren Stelle verwenden, ergibt sich aus (19), wenn wir die Integrationsveränderliche a mittels der Relation $\cos i\,a = \gamma z^2 + 1$, $\gamma = \cos i\,a_1 - 1 = \frac{\Gamma^*}{2r\bar r}$ durch die neue Integrationsvariable z ersetzen. Es wird dann:

$$(21)\qquad I = \frac{1}{\chi\sqrt{2r\bar r}}\int\limits_0^1\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{\gamma z^2+2}}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{\chi}(\bar\varphi-\varphi+\pi)}{\cos\frac{\pi}{\chi}(\bar\varphi-\varphi+\pi)-X} - \frac{\sin\frac{\pi}{\chi}(\bar\varphi-\varphi-\pi)}{\cos\frac{\pi}{\chi}(\bar\varphi-\varphi-\pi)-X}\right],$$

wo $X = \cos i\frac{\pi}{\chi}\operatorname{arc\,csh}(\gamma z^2+1)$ ist.

Nunmehr wollen wir zur Diskussion der Eigenschaften der Funktion $w=\Re(W)$ übergehen und wollen vor allem zeigen, daß sie die unter 1*. bis 4*. genannten Eigenschaften besitzt. Zunächst stellen wir für den Fall, daß $\bar r \neq 0$ ist, die Lage der singulären Punkte der Funktion w in ihrem Definitionsbereiche R^* in R_∞ zusammen:

I. $r=0$: die Punkte in der Verzweigungsgeraden. Denn setzen wir voraus, daß nicht gleichzeitig Γ^* verschwindet, wir uns also nicht der Spitze des Kegels Γ^* nähern, so wird für $r=0$ nach (18) $a_1=+\infty$.

II. $\Gamma^*=0$: die Punkte auf dem Mantel des charakteristischen Kegels Γ^*. Wird nämlich angenommen, daß nicht gleichzeitig r gegen Null geht, wir uns also wieder nicht der Spitze von Γ^* nähern, so wird für $\Gamma^*=0$ nach (18) $a_1=0$ und der Integrationsweg muß, wie wir gesehen haben, durch einen singulären Punkt hindurchgehen.

III. $\Gamma_\nu=0$, $-\pi\leqq\bar\varphi-\varphi+2\nu\chi\leqq+\pi$: die Punkte auf den Kegelmänteln der charakteristischen Kegel Γ_ν. Dieser Fall entspricht dem Zusammentreffen eines Verzweigungspunktes $\varphi \pm \beta_1$ mit einem Pole des Integranden von W, wobei der zwischen den beiden singulären Punkten eingepflockte Integrationsweg (vgl. Fig. 4) gezwungen wird, durch den singulären Punkt hindurchzugehen, der durch das Zusammentreffen der beiden genannten Punkte entsteht. Die Ungleichung läßt sich nämlich auch in der Form $\varphi - \pi \leqq \bar{\varphi} + 2\nu\chi \leqq \varphi + \pi$ schreiben und besagt dann, daß der Pol $\bar{\varphi} + 2\nu\chi$ auf der Strecke $\varphi - \pi$, $\varphi + \pi$ gelegen ist. Aus $\Gamma_\nu = 0$ folgt aber nach (11) $\cos(\bar{\varphi} - \varphi + 2\nu\chi) = \frac{r^2 + \bar{r}^2 - (t - \bar{t})^2}{2 r \bar{r}}$, welchem Ausdrucke nach (15) $\cos\beta_1$ gleich ist. Es muß also $\bar{\varphi} - \varphi + 2\nu\chi = \pm\beta_1 + 2\mu\pi$ $(\mu = 0, \pm 1, \ldots)$ sein, so daß $\bar{\varphi} + 2\nu\chi = \varphi \pm \beta_1 + 2\mu\pi$ ist, was aber nichts anderes als das Zusammenfallen eines Poles mit einem Verzweigungspunkte bedeutet.

Weitere besonders zu betrachtende singuläre Stellen sind Schnitte der drei jetzt angeführten Mannigfaltigkeiten von singulären Punkten in R_∞.

Alle im Definitionsbereiche von w gelegenen Punkte, die keinem der drei unter I, II und III angeführten Fälle entsprechen, wollen wir als reguläre Raumpunkte bezeichnen.

Zunächst zeigen wir, daß w allen ihr durch 1*. bis 4*. in den regulären Raumpunkten auferlegten Bedingungen genügt.

Daß die Bedingung 1*. erfüllt wird, ist nach den vorhergehenden Überlegungen selbstverständlich.

Was nun 2*. betrifft, so haben wir ebenfalls oben schon gezeigt, daß w in den regulären Raumpunkten endlich ist. Daß w hier auch partielle Ableitungen beliebig hoher Ordnung nach r, φ, t besitzt, erkennt man aus (13) ohne weiteres. Für reguläre Raumpunkte sind ja die singulären Fälle I bis III ausgeschlossen und die Konvergenz der betreffenden aus (13) durch Differentiation entstehenden Integrale ist durch ein hinreichend starkes Verschwinden ihrer Integranden im Unendlichen gesichert. Bei der Bildung der Ableitungen der Funktion W nach φ wäre dabei allerdings zu berücksichtigen, daß die Wege (U_1) und (U_2) von der Variablen φ abhängen und mithin Glieder auftreten müßten, welche der Veränderlichkeit der Enden dieser Integrationswege Rechnung tragen. In Wirklichkeit treten aber diese Glieder nicht auf, da der Integrand in (13) verschwindet, wenn wir in der α-Ebene auf (U_1) und (U_2) ins Unendliche gehen.

Mit Rücksicht auf diesen Umstand können wir auch sicher sein, daß in allen regulären Raumpunkten, wo nach dem Obigen die in der Wellengleichung vorkommenden Ableitungen von W nach r, φ, t vorhanden sind, W und damit auch w sicherlich der Wellengleichung genügt; denn die

Veränderlichen r, φ, t treten in dem Integranden in (13) nur in dem Ausdrucke

$$\frac{1}{(-r^2-\bar{r}^2+2r\bar{r}\cos(\varphi-\alpha)+(t-\bar{t})^2)^{1/2}}$$

auf, der, als Funktion von r, φ, t betrachtet, offenbar eine Lösung der Wellengleichung ist. Damit ist aber gezeigt, daß w der Bedingung 3^*. entspricht.

Das Erfülltsein der Bedingung 4^*. folgt unmittelbar aus der Darstellung (13) der Funktion w.

Nunmehr müssen wir noch das Verhalten der Funktion w in den singulären Raumpunkten I bis III untersuchen, wobei wir zunächst voraussetzen, daß die betreffenden Raumpunkte immer nur einer dieser drei Bedingungen genügen.

I. $r=0$. In diesem Falle können die Eigenschaften der Funktion w einfach aus einer Darstellung für W erschlossen werden, die in der folgenden Weise gewonnen werden kann: Wir deformieren den Integrationsweg (U_1) bzw. (U_2) so, daß er zu beiden Seiten der Geraden $\Re(\alpha)=\varphi+\pi$ bzw. der Geraden $\Re(\alpha)=\varphi-\pi$ verläuft (vgl. Fig. 6). Wir setzen dabei in den jetzigen Erörterungen — wie dies auch in der Figur zum Ausdrucke kommt — voraus, daß $\Gamma^*>0$ ist, weil nur in diesem Falle für kleine r-Werte der Punkt r, φ, t in dem Definitionsbereiche der Funktion w liegt. Da die Wurzel in (13) bei einem Umlaufe um die Verzweigungspunkte $\varphi \pm \beta_1$ nur ihr Vorzeichen ändert, so sind die beiden längs einer Geraden $\Re(\alpha)=\varphi\pm\pi$ verlaufenden Integrale einander gleich. Führen wir nun durch die Relation:

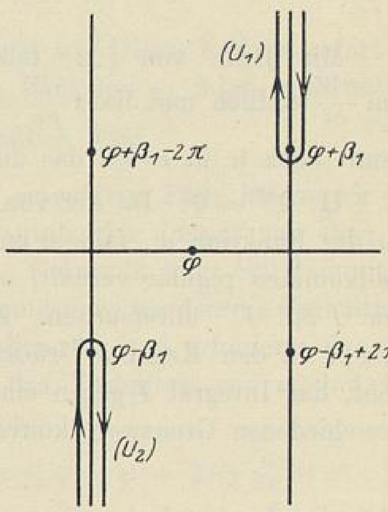

Fig. 6.

$$\alpha=\varphi\pm(\pi+i\zeta)$$

eine neue Integrationsveränderliche ζ für die beiden auf $\Re(\alpha)=\varphi\pm\pi$ verlaufenden Integrale ein, so ergibt sich:

$$W=-\frac{1}{\chi(2r\bar{r})^{1/2}}\int_{a_1}^{\infty}\frac{d\zeta}{(\cos i\zeta-\cos i a_1)^{1/2}}$$

$$\times\left[\frac{1}{1-e^{i\frac{\pi}{\chi}(\bar{\varphi}-\varphi-\pi-i\zeta)}}-\frac{1}{1-e^{i\frac{\pi}{\chi}(\bar{\varphi}-\varphi+\pi+i\zeta)}}\right].$$

Ersetzen wir nun hier mittels $z \cdot \cos i\, a_1 = \cos i\, \zeta$ die Integrationsvariable ζ durch z, so erhalten wir:

$$(22)\quad W = -\frac{\sqrt{\cos i\, a_1}}{\chi\,(2\,r\,\bar{r})^{1/2}} \int\limits_1^\infty \frac{dz}{(z-1)^{1/2}\,(z^2 \cos^2 i\, a_1 - 1)^{1/2}}$$

$$\times \left[\frac{1}{1 - e^{i\frac{\pi}{\chi}(\bar{\varphi}-\varphi-\pi)} \cdot Z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{i\frac{\pi}{\chi}(\bar{\varphi}-\varphi+\pi)} \cdot Z}\right],$$

wobei $Z = e^{-\frac{\pi}{\chi}\operatorname{arc\,csh}(z \cos i\, a_1)} = \left(z \cdot \cos i\, a_1 + \sqrt{z^2 \cos^2 i\, a_1 - 1}\right)^{-\frac{\pi}{\chi}}$.

Jetzt ist der $\lim\limits_{r=0} W$ leicht zu berechnen. Es ist $\lim\limits_{r=0} \cos i\, a_1 = +\infty$ und daher $\lim\limits_{r=0} Z = 0$. Da schließlich $\lim\limits_{r=0} 2\,r\,\bar{r} \cdot \cos i\, a_1 = -\bar{r}^2 + (t-\bar{t})^2$ wird, so erhalten wir:

$$(23)\quad \lim_{r=0} W = \frac{1}{\chi\sqrt{-\bar{r}^2 + (t-\bar{t})^2}} \int\limits_1^\infty \frac{dz}{z\,(z-1)^{1/2}} = \frac{\pi}{\chi}\,\frac{1}{\sqrt{-\bar{r}^2 + (t-\bar{t})^2}}.$$

Mit Hilfe von (22) läßt sich ferner noch unschwer zeigen, daß $\lim\limits_{r=0} \frac{\partial W}{\partial t}$ endlich und $\lim\limits_{r=0} r \frac{\partial W}{\partial r} = 0$ ist. Damit ist nachgewiesen, daß W und somit auch w in $r = 0$ das durch 2^*. geforderte Verhalten besitzen.

II. $\Gamma^* = 0$. Da der von der Summe S in (20) herrührende Beitrag zu der Funktion w, falls er nur nicht verschwindet, sich auf dem Kegel Γ^* vollkommen regulär verhält, so müssen wir lediglich noch das Verhalten von I auf Γ^* untersuchen. Zunächst sehen wir, daß, wenn der Punkt r, φ, t in den Kegel Γ^* rückt, wenn also der Ausdruck Γ^* gegen Null geht, das Integral I gegen einen im allgemeinen endlichen und von Null verschiedenen Grenzwert konvergiert. Es ist ja nach (21):

$$(24)\quad \lim_{\Gamma^*=0} I = \lim_{\gamma=0} I = \frac{\pi}{4\chi\,(r\,\bar{r})^{1/2}} \left[\frac{\sin\frac{\pi}{\chi}(\bar{\varphi}-\varphi+\pi)}{\cos\frac{\pi}{\chi}(\bar{\varphi}-\varphi+\pi) - 1} - \frac{\sin\frac{\pi}{\chi}(\bar{\varphi}-\varphi-\pi)}{\cos\frac{\pi}{\chi}(\bar{\varphi}-\varphi-\pi) - 1}\right].$$

Da die Funktion w außerhalb des Kegels schon durch die Summe S allein gegeben wird oder überhaupt verschwindet, so erleidet w in allen Punkten von Γ^* einen Stetigkeitssprung.

In dem folgenden Abschnitte VI werden wir mit Grenzwerten einiger partieller Ableitungen erster und zweiter Ordnung von I auf dem Kegel Γ^* operieren. Es ist daher wichtig festzustellen, daß diese Grenzwerte endlich sind. Unmittelbar einleuchtend ist diese Tatsache für die Ableitungen nach φ. Sie gilt aber auch für die Ableitungen nach r und t. Als Funktion von γ aufgefaßt (vgl. (21)) haben nämlich die Ableitungen $\frac{\partial I}{\partial \gamma}$ und $\frac{\partial^2 I}{\partial \gamma^2}$ in dem Punkte $\gamma = 0$ (der den Raumpunkten $\Gamma^* = 0$ entspricht) endliche Grenzwerte, wie leicht mit Hilfe der Darstellung (21) zu begründen ist. Andererseits sind aber auch die Grenzwerte der partiellen Ableitungen von γ nach r, t auf dem Kegel Γ^* endlich. Schließlich sind auch die partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen der Funktion I nach $\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{t}$, sowie die gemischten Ableitungen nach $r, \varphi, t, \bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{t}$ auf Γ^* endlich, da die Ableitungen von γ nach den genannten Veränderlichen für $\Gamma^* = 0$ endlich sind.

Dazu bemerken wir noch: Berechnet man die entsprechenden Ableitungen mit Hilfe von (21), so kann man nachweisen, daß auf dem gegen abnehmende t-Werte geöffneten Kegel Γ^* die nachstehenden Relationen gelten:

$$(25)\qquad \begin{aligned} \lim_{\Gamma^*=0} \left(I + 2r \cdot \left(\frac{\partial I}{\partial r} - \frac{\partial I}{\partial t}\right)\right) &= 0, \\ \lim_{\Gamma^*=0} \left(I + 2\bar{r} \cdot \left(\frac{\partial I}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial I}{\partial \bar{t}}\right)\right) &= 0. \end{aligned}$$

III. $\Gamma_\nu = 0, \; -\pi < \bar{\varphi} - \varphi + 2\nu\chi < +\pi$. Dieser Fall ist sofort erledigt. Aus der Darstellung (20) für die Funktion w folgt unmittelbar, daß w auf den Kegeln Γ_ν wie $\frac{1}{\sqrt{\Gamma_\nu}}$ unendlich wird.

Bei der Behandlung der obigen drei singulären Fälle haben wir bisher vorausgesetzt, daß die betreffenden Raumpunkte immer nur einer der drei Bedingungen I, II oder III genügen. Entpricht aber ein Raumpunkt gleichzeitig zwei oder drei solchen Bedingungen, so werden die Verhältnisse in unseren Ausdrücken für w und I komplizierter und erfordern eine neue Untersuchung. Wir behandeln zunächst das Verhalten von w und I in den Raumpunkten, die gegeben sind, durch:

$$\text{I und II:}\; \Gamma^* = 0, \; \Gamma_\nu = 0, \; -\pi \leqq \bar{\varphi} - \varphi + 2\nu\chi \leqq +\pi.$$

Diese Raumpunkte liegen auf den Geraden (12), die die Kegel Γ_ν begrenzen. Sie liegen in den entsprechenden Halbebenen:

$$(26)\qquad \varphi = \bar{\varphi} + 2\nu\chi \pm \pi$$

und in ihnen berühren die Kegel Γ_ν den Kegel Γ^*. Geht nun ein Punkt P im Raume R_∞ gegen eine dieser Geraden, so rücken in der komplexen α-Ebene gleichzeitig ein Pol $\alpha = \bar{\varphi} + 2\nu\chi$ und die beiden auf der entsprechenden Geraden $\Re(\alpha) = \varphi \pm \pi$ liegenden Verzweigungspunkte gegen einen der Punkte $\alpha = \varphi \pm \pi$ und in diesen Punkt wird im Grenzfalle einer von den Integrationswegen (U_1) oder (U_2) hineingedrängt.

Betrachten wir nun das Integral I. Zunächst bemerken wir: Da die Funktion $w = S + I$, wie sofort aus ihrer komplexen Darstellung (13) folgt, in den Halbebenen (26) (mit Ausnahme unserer Geraden) stetig ist, die durch S dargestellte Funktion hier aber Sprünge $\pm\frac{1}{\sqrt{\Gamma_\nu}}$ besitzt, so muß auch I hier Sprünge $\mp\frac{1}{\sqrt{\Gamma_\nu}}$ erleiden, die das unstetige Verhalten von S gerade kompensieren.

In dem folgenden Abschnitte wird uns nun das Verhalten von I in dem Falle interessieren, wo sich ein Punkt P längs einer Geraden auf einer Riemannschen Fläche $t=$ konst. dem Schnittpunkt P_0 unserer Geraden (12) mit $t=$ konst. nähert. Die Polarkoordinaten von P bzw. P_0 sind dann r, φ bzw. $R, \bar{\varphi}+2\nu\chi\pm\pi$, wo $R=\bar{t}-t-\bar{r}$. Bezeichnen wir nun mit ψ den Winkel, den die beiden Verbindungsgeraden PP_0 und P_0-Verzweigungspunkt miteinander einschließen, so ist offenbar $\operatorname{tang}\psi=\frac{r\sin\varepsilon}{R-r\cos\varepsilon}$, wo $\varepsilon=(\bar{\varphi}+2\nu\chi\pm\pi)-\varphi$ ist. Nähert sich P dem Punkte P_0, so verschwindet mit ε gleichzeitig auch Γ^*, und da für kleine ε und kleine Γ^* (d. h. für r-Werte, die sich von R wenig unterscheiden) $\operatorname{tang}\psi=2R(R+\bar{r})\frac{\varepsilon}{\Gamma^*}$ ist, so fordert die Bedingung der geradlinigen Annäherung von P an P_0, daß bei diesem Übergang ψ einem Grenzwerte zustrebe, d. h. daß ε und Γ^* unter Voraussetzung $\frac{\varepsilon}{\Gamma^*}=$ konst. gegen Null gehen. Betrachten wir nun speziell den Punkt P_0^+, mit den Koordinaten $R, \bar{\varphi}+2\nu\chi+\pi$, so müssen wir $\varepsilon=\bar{\varphi}+2\nu\chi+\pi-\varphi$ setzen. In dem Ausdruck (21) für I ist dann der erste Term in der eckigen Klammer für kleine ε und $\Gamma^*=2r\bar{r}\gamma$-Werte, da $X=\cos i\frac{\pi}{\chi}z\sqrt{2\gamma}$ wird, gleich $-\frac{2\chi}{\pi\varepsilon}\frac{1}{1+\frac{2\gamma}{\varepsilon^2}z^2}$, so daß wir für I, soweit es von diesem ersten Term abhängt (der zweite verhält sich für $\varepsilon=0$ und $\Gamma^*=0$ vollkommen regulär) erhalten:

$$-\frac{2}{\pi\varepsilon\sqrt{2r\bar{r}}}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{\gamma z^2+2}}\,\frac{dz}{1+\frac{2\gamma}{\varepsilon^2}z^2}. \tag{27}$$

Dieser Ausdruck wird jedoch im Grenzfalle $\varepsilon=0$ und $\gamma=0$, für $\frac{\varepsilon}{\gamma}$ einen endlichen, von Null verschiedenen Grenzwert vorausgesetzt, gleich

$$-(\operatorname{signum}\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{2r\bar{r}\gamma}}=-(\operatorname{signum}\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\Gamma^*}}.$$

Da nun für kleine ε $\Gamma_\nu=\Gamma^*\left(1+r\bar{r}\frac{\varepsilon^2}{\Gamma^*}\right)$ wird, so erhalten wir unter der obigen Voraussetzung für $\frac{\varepsilon}{\gamma}$ schließlich für (27):

$$-(\operatorname{signum}\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\Gamma_\nu}}.$$

Das gleiche Verhalten von (27) ergibt sich aber auch, wenn der Grenzübergang so vollzogen wird, daß man zunächst $\Gamma^* = 0$ setzt, d. h. auf der Peripherie des Kreises $\Gamma^* = 0$, $t =$ konst. gegen P_0^+ geht, was übrigens auch aus (24) folgt. Setzt man schließlich von vornherein $\varepsilon = 0$, nähert sich also P dem Punkte P_0^+ auf der Verbindungsgeraden: Verzweigungsgerade-P_0^+, so verschwindet (27). Da nun in P_0^+ der Beitrag von S für $\varepsilon > 0$ gleich wird $+\frac{1}{\sqrt{\Gamma_\nu}}$, für $\varepsilon < 0$ aber verschwindet, so sehen wir endlich, daß sich die ganze Funktion w in P_0^+ wie $+\frac{1}{2\sqrt{\Gamma_\nu}}$ verhält.

Die beiden weiteren Kombinationen je zweier Fälle, nämlich des Falles I und II und des Falles I und III, oder die Kombination aller drei Fälle I, II und III führen zur Untersuchung des Verhaltens von w in dem Punkte P_1 mit den Koordinaten $r = 0$, $t = \bar{t} - \bar{r}$. Dieser Punkt liegt auf der Verzweigungsgeraden dort, wo sich die Spitze des gegen abnehmende t-Werte geöffneten Halbkegels Γ^* und zugleich der Schnittpunkt aller Halbkegel Γ_ν mit der Verzweigungsgeraden befindet. Nähert sich nun ein Punkt P dem Punkte P_1 längs einer Geraden, die mit der Verzweigungsgeraden (und zwar mit der negativen t-Achse) den Winkel α bildet, so besteht zwischen r und t die Relation: $r = \operatorname{tg}\alpha \cdot (\bar{t} - t - \bar{r})$. Da I außerhalb des Kegels Γ^* verschwindet, so interessieren uns dabei nur die α-Werte, die zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$ liegen. Für den Fall, daß $\operatorname{tg}\alpha \neq 0$ ist, wir also nicht längs der Verzweigungsgeraden gehen, ist nun:

$$\lim_{r=0} \gamma = \lim_{r=0} \frac{\Gamma^*}{2 r \bar{r}} = -1 + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Setzen wir dann noch weiter voraus, daß wir uns P_1 nicht längs einer in dem Kegel Γ^* liegenden Geraden nähern (denn dann wäre ja $\operatorname{tg}\alpha = 1$), so ist $\lim\limits_{r=0} \gamma$ endlich und von Null verschieden und wir entnehmen dann unmittelbar aus (21), daß für $r = 0$ dann I wie $\frac{1}{\sqrt{r}}$ unendlich wird. Nähern wir uns dem Punkte P_1 längs einer Erzeugenden des Kegels Γ^*, so geht I, wie aus (24) zu ersehen ist, ebenso stark ins Unendliche. Im Falle schließlich, daß wir zur Spitze von Γ^* längs der Verzweigungsgeraden gehen, folgt aus (23), daß die gesamte Funktion $w = S + I$ ebenfalls wie $\frac{1}{\sqrt{r}}$ unendlich wird.

Wir wollen noch auf eine wichtige Eigenschaft der Funktion w aufmerksam machen. Es ist:

$$w(r, \varphi, t; \bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{t}; \chi) = w(\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{t}; r, \varphi, t; \chi),$$

wie man dies leicht mit Hilfe der Darstellung (20) für die Funktion w bestätigt. Diese Tatsache gestattet sofort festzustellen, daß die Fundamentallösung $w(r, \varphi, t; \bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{t}; \chi)$ auch als Funktion von $\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{t}$ betrachtet, die unter 1*. bis 4*. für r, φ, t formulierten Eigenschaften besitzt. Insbesondere genügt w als Funktion von $\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{t}$ der Wellengleichung.

Schließlich möge hier noch darauf hingewiesen werden, daß w eine gerade Funktion von $\varphi - \bar{\varphi}$ ist.

VI. Lösung der gestellten Aufgabe.

Nach den Überlegungen im Abschnitte III genügt es, zur Lösung der beiden durch die Bedingungen 1. bis 4. und 1'. bis 4'. festgelegten Randwertaufgaben das durch die Bedingungen 1''. bis 4''. bestimmte Problem zu lösen. Diese Aufgabe nehmen wir nun in Angriff. Da es uns in der Folge auf eine Unterscheidung der beiden in diesem Probleme auftretenden Funktionen u_1 und u_2 nicht ankommt (sie unterscheiden sich nur durch die Funktionen, die die Anfangswerte bestimmen), bezeichnen wir der einfacheren Schreibweise wegen mit u irgendeine dieser beiden Funktionen. Um nun u in einem Punkte $\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{t}$ des Riemannschen Raumes R_∞ zu berechnen, nehmen wir, gleich den allgemeinen Fall vorausgesetzt, an, dieser Punkt sei so gelegen, daß der zur Funktion $w(r, \varphi, t; \bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{t}; \chi)$ gehörige Kegel Γ^* die Riemannsche Fläche $t = t_0$, auf der unsere Anfangswerte gegeben sind, schneidet und der Kegel Γ_0 eventuell auch schon von anderen Kegeln Γ_ν geschnitten wird (das letztere ist nur im Falle $\chi < \pi$ möglich). Wir verwenden dann analog wie Hadamard[13]) die Fundamentalformel (1) sowie die Funktion w, die in unserem Falle die Rolle der Fundamentallösung spielt. Für das zunächst Folgende nehmen wir dabei an, daß die Existenz unserer Funktion u gesichert sei, setzen in der Fundamentalformel $v = w$ und wenden sie auf den Raum R_χ an, der aus allen Punkten von R_∞ besteht, die zwischen den beiden Ebenen $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\chi$ gelegen sind, in denen w definiert und für die schließlich $t \geqq t_0$ ist. Die Anwendung der Fundamentalformel setzt voraus, daß u und $v = w$ in dem in Betracht kommenden Raume samt ihren ersten Ableitungen endlich und stetig sind. u hat nun aber in der Verzweigungsgeraden $r = 0$ eine singuläre Stelle und die Singularitäten von w liegen in den charakteristischen Kegeln Γ_ν und Γ^* und in der Verzweigungsgeraden $r = 0$. Um die Fundamentalformel anwenden zu können, teilen wir daher den Raum R_χ durch alle innerhalb R_χ verlaufenden Kegel Γ_ν und Γ^* in einzelne Zellen Z_μ ein. Die Begrenzungsfläche einer Zelle Z_μ heiße (Z_μ). Grenzen wir nun in jeder Zelle Z_μ durch eine nahe an (Z_μ)

[13]) J. Hadamard, l. c.

verlaufende Fläche (S_μ) einen Raum S_μ ab, so können wir in S_μ auf u und w die Fundamentalformel anwenden. Da beide Funktionen der Wellengleichung genügen, gilt die Relation:

$$\iint\limits_{(S_\mu)} \left(u \frac{d w}{d \nu} - w \frac{d u}{d \nu}\right) d f = 0. \tag{28}$$

Lassen wir nun in jeder Zelle Z_μ die Fläche (S_μ) gegen die Begrenzung dieser Zelle (Z_μ) rücken, so ergibt in jedem speziellen Falle die Beziehung (28) beim Grenzübergang eine neue Relation. Durch Addition aller dieser Relationen wird sich dann die gesuchte Lösung unseres Problems gewinnen lassen.

Betrachten wir zunächst etwa die Zelle Z_μ, die die Spitze des Kegels Γ_0 enthält; sie heiße Z_0. Z_0 wird im allgemeinen teilweise von Γ_0 und anderen Kegeln Γ_ν, von Γ^* und schließlich von den Ebenen $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\chi$ begrenzt. Je nach der besonderen Wahl der Größen $\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{t}, \chi$ kann aber mit Ausnahme von Γ_0 und $t = t_0$ die eine oder andere der genannten Flächen in der Begrenzung von Z_0 fehlen. Die Funktion w wird nun in der Zelle Z_0 schon allein durch das in der Summe S enthaltene Glied $\frac{1}{\sqrt{\Gamma_0}}$ dargestellt. Sie wird also in der Fläche Γ_0 wie $\frac{1}{\sqrt{\Gamma_0}}$ unendlich, verhält sich aber in den übrigen Begrenzungsflächen von Z_0, selbstverständlich abgesehen von ihren Schnitten mit Γ_0, vollkommen regulär. Lassen wir nun (S_0) gegen (Z_0) rücken, so werden gewisse Teile der Flächenintegrale in der Relation:

$$\iint\limits_{(S_0)} \left(u \frac{d w}{d \nu} - w \frac{d u}{d \nu}\right) d f = 0$$

gegen einen unendlichen Wert streben. Nach Hadamard (das hier für die Zelle Z_0 behandelte Problem ist vollständig identisch mit dem von Hadamard (l. c.) gelösten) erhalten wir nun bei dem erwähnten Grenzübergange eine richtige Relation, wenn wir von allen Integralen nur ihre endlichen Teile beibehalten. Dabei ist zu beachten: Das über Γ_0 erstreckte Flächenintegral entfällt vollständig. Da aber in dem Punkte $\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{t}$ der Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{\Gamma_0}}$ von höherer Ordnung unendlich wird als in den übrigen Punkten von Γ_0, so ist dieser Punkt in eine kleine Kugelkalotte einzuschließen. Beim Grenzübergange ergibt sich dann der endliche Teil des über diese kleine Kugeloberfläche erstreckten Integrales nach Hadamard zu: $-2\pi u(\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{t})$. Wir können somit offenbar $u(\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{t})$ zunächst durch die endlichen Teile von Flächenintegralen darstellen, die über die Begrenzung von Z_0 zu erstrecken sind, soweit sie aus dem Kegel Γ^*, den anderen Kegeln Γ_ν $(\nu \neq 0)$, den beiden Halbebenen $\varphi = 0$, $\varphi = 2\chi$ und schließlich aus der Riemannschen Fläche $t = t_0$ besteht. Um dann noch die über Γ^* und Γ_ν $(\nu \neq 0)$ und die beiden Ebenen $\varphi = 0$, $\varphi = 2\chi$ erstreckten Flächenintegrale durch die auf der Fläche $t = t_0$ gegebenen Anfangswerte auszudrücken, ist der analoge Grenzübergang auch für die übrigen Zellen Z_μ auszuführen.

Aus der Gesamtheit dieser Zellen greifen wir nun die Zelle heraus, die von dem Kegel Γ^*, der Fläche $t = t_0$, den Halbebenen $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\chi$ und der Verzweigungsgeraden $r = 0$ begrenzt wird; sie heiße Z_1. Da alle Kegel Γ_ν außerhalb Γ^* verlaufen, so ist in der Zelle Z_1 keiner von ihnen vorhanden.

Zunächst soll der Beitrag berechnet werden, den I zu (28) im Grenzfalle $(S_1) \to (Z_1)$ liefert. Nun besitzt aber I in den Halbebenen:

$$\varphi = \overline{\varphi} + 2\nu\chi \pm \pi \tag{26}$$

die Sprünge $\frac{1}{\sqrt{\Gamma_\nu}}$. Damit also auf I die Fundamentalformel (1) angewendet werden kann, muß die Zelle Z_1 durch die angegebenen Halbebenen (26) in weitere Zellen $Z_1^{(1)}, Z_1^{(2)}, \ldots$ unterteilt werden. In jeder Zelle $Z_1^{(\mu)}$ ist dann mit dem Integral:

$$A_1 = \iint\limits_{(S_1^{(\mu)})} \left(u \frac{dI}{d\nu} - I \frac{du}{d\nu}\right) df = 0 \tag{29}$$

der Grenzübergang $(S_1^{(\mu)}) \to (Z_1^{(\mu)})$ auszuführen. Dabei stößt man aber auf ein über Γ^* erstrecktes Integral, das zwecks Lösung unseres Problems durch eine partielle Integration umgeformt werden müßte. Außerdem entstünden Komplikationen wegen des Verhaltens von I in den Schnittgeraden von (26) mit den entsprechenden Γ_ν. Das wird vermieden, wenn wir zu (28) die etwa aus dem Gaußschen Satze (5) folgende Relation:

$$A_2 = \iint\limits_{(S_1^{(\mu)})} \operatorname{curl}_n ([\mathfrak{k}\mathfrak{r}]\, u\, I)\, df = 0 \tag{30}$$

addieren, in der $\mathfrak{k}$ den Einheitsvektor in der Richtung der positiven t-Achse und $\mathfrak{r}$ den Einheitsvektor in der Richtung des Radiusvektors r bezeichnet. Da nun:

$$\operatorname{curl} ([\mathfrak{k}\mathfrak{r}]\, u\, I) = -\frac{\partial u I}{\partial t} \cos\varphi\, \mathfrak{i} - \frac{\partial u I}{\partial t} \sin\varphi\, \mathfrak{j} + \left(\frac{\partial u I}{\partial r} + \frac{u I}{r}\right) \mathfrak{k}, \tag{31}$$

so ergibt sich mit Rücksicht auf (4) und (6) für die Beiträge, die die einzelnen Teile von $Z_1^{(\mu)}$ im Grenzfalle zu $A_1 + A_2$ liefern:

auf der Fläche Γ^*: $\quad -\iint \frac{u}{\sqrt{2r}} \left\{ I + 2r \left(\frac{\partial I}{\partial r} - \frac{\partial I}{\partial t}\right) \right\} df$

(welches Integral aber mit Rücksicht auf (25) verschwindet), auf der Fläche $t = t_0$:

$$(32) \qquad \iint \left(-u\frac{\partial I}{\partial t} + I\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial (u I r)}{\partial r}\right)\bigg|_{t=t_0} r\,dr\,d\varphi,$$

wobei die Integration nach φ zwischen zwei aufeinander folgenden Halbebenen (26) und nach r zwischen 0 und dem Radius $R = \bar{t} - t_0 - \bar{r}$ des Schnittkreises von Γ^* mit $t = t_0$ zu erstrecken ist.

Um die Integrale über die Halbebenen (26) brauchen wir uns nicht zu kümmern. Die Integrale (30) über die Flächen (26) sind ja Null, weil der Vektor (31) in den Ebenen $\varphi =$ konst. liegt und daher der Integrand verschwindet. Addieren wir andererseits die auf die Halbebenen bezüglichen Integrale (29) (d. h. ihre endlichen Teile), so erhalten wir ebenfalls Null, wenn wir in ihnen, was für uns schließlich einzig in Betracht kommt, statt I die Funktion $w = S + I$ verwenden. w verhält sich ja in den Halbebenen (ihre Schnittlinien mit Γ^* ausgenommen) vollkommen regulär und die endlichen Teile der Flächenintegrale zu beiden Seiten einer Halbebene (26), die zwei benachbarte Zellen $Z_1^{(\mu)}$ trennt, sind einander entgegengesetzt gleich. Wegen der Periodizität von u und w verschwindet ferner die Summe der beiden Integrale über $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\chi$.

Die Verzweigungsgerade, die Schnittgeraden der Kegel Γ_ν mit den Halbebenen (26) und die Spitze des Kegels Γ^* sind bei diesem Grenzübergang mit entsprechenden Flächen zu umgeben. Die Summe der beiden auf diese Flächen bezogenen Flächenintegrale (29) und (30) verschwindet.

Addieren wir nun die Integrale (32) über sämtliche Zellen $Z_1^{(\mu)}$, so erhalten wir als Resultat:

$$(33) \qquad \int_0^{2\chi}\int_0^{R} \left(I\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial (u I r)}{\partial r}\right)\bigg|_{t=t_0} r\,dr\,d\varphi,$$

wobei hier die Integration über φ von 0 bis 2χ zu erstrecken ist. Zunächst bemerken wir, daß dieses Integral konvergent ist. Das Verhalten des Integranden im Punkte $r = 0$ ist wohl vollständig klar. In den Punkten P_0 mit den Koordinaten $R, \bar{\varphi} + 2\nu\chi \pm \pi$ verhält sich I wie $\pm \frac{1}{2\sqrt{\Gamma_\nu}}$ und, wie man sich leicht mit Hilfe von (21) überzeugt, wird hier die im Integranden auftretende Kombination der Ableitungen von I nämlich $\frac{\partial I}{\partial r} - \frac{\partial I}{\partial t}$ auch nicht stärker unendlich. Sodann erkennt man aber, daß (33) sich in der Form

$$(34) \qquad \int_0^{2\chi}\int_0^{R} I\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=t_0} r\,dr\,d\varphi + \frac{\partial}{\partial \bar{t}}\int_0^{2\chi}\int_0^{R} I u\bigg|_{t=t_0} r\,dr\,d\varphi$$

darstellen läßt.

Um uns davon zu überzeugen, bemerken wir, daß der Ausdruck (33), wenn wir zunächst die Punkte P_0 ausschließen, durch partielle Integration des letzten Gliedes mit Rücksicht auf die Relation $\frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial \bar{t}}$ unmittelbar in den Ausdruck (34) übergeht, falls in diesem letzteren die Differentiation nach $\bar{t}$ ausgeführt wird. Die Punkte P_0, wo sich I wie $\pm \frac{1}{2\sqrt{\Gamma_\nu}}$ verhält, verursachen dabei keinerlei Schwierigkeiten, da beim Grenzübergange die beiden letzten Terme in (33) in den endlichen Teil des zweiten Integrales in (34) übergehen.

Nunmehr ist leicht zu erkennen: Da der ganze Beitrag, den I für die Zelle Z_1 im Grenzfalle zum Integral (28) liefert, durch (34) gegeben wird, so erhalten wir offenbar, wenn für Z_1 in (28) der Grenzübergang für die gesamte Funktion $w = S + I$ vollzogen wird, außer (34) nur noch endliche Teile der mit S gebildeten Flächenintegrale (28):

$$\iint \left(u \frac{dS}{d\nu} - S \frac{du}{d\nu}\right) df$$

und zwar über den Kegel $\Gamma^* = 0$ und die Riemannsche Fläche $t = t_0$, soweit diese Flächen zu Z_1 gehören.

Die übrigen Zellen Z_μ des Raumes R_χ werden von der Fläche $t = t_0$, von Γ_0, den übrigen Kegeln Γ_ν und von Γ^* begrenzt und liegen alle außerhalb des Kegels Γ^*. In diesen Zellen wird also w schon allein durch die Summe S dargestellt. Vollziehen wir nun in den einzelnen Zellen Z_μ den Grenzübergang $(S_\mu) \to (Z_\mu)$, so erhalten wir wieder richtige Relationen, wenn wir beim Grenzübergang auf jeden Kegel Γ_ν (soweit er zur Begrenzung der betreffenden Zelle Z_μ gehört) in dem Flächenintegral das dem betreffenden Kegel Γ_ν in der Summe S entsprechende Glied $\frac{1}{\sqrt{\Gamma_\nu}}$ fortlassen, sonst aber die endlichen Teile aller Integrale behalten.

Es ist nun leicht zu überblicken, zu welchem Resultate wir durch Addition der sämtlichen auf die einzelnen Zellen Z_μ bezüglichen Relationen gelangen. Die beiden von der Summe S herrührenden endlichen Teile der Flächenintegrale über die beiden Seiten einer Begrenzungsfläche, die zwei Zellen Z_μ gemeinsam ist, sind einander entgegengesetzt gleich, da die Richtungen der Konormalen zu beiden Seiten dieser Begrenzungsfläche einander entgegengesetzt gleich sind. Besteht diese Begrenzungsfläche aus einem Kegel Γ_ν, so tritt zwar in der Zelle, die im Innern von Γ_ν liegt, ein Glied mit $\frac{1}{\sqrt{\Gamma_\nu}}$ mehr auf als in der Zelle, die außerhalb Γ_ν gelegen ist; nach dem früher Gesagten ist es aber fortzulassen. Ebenso sind die über die Halbebenen $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\chi$ zu erstreckenden endlichen Teile der unendlichen Integrale einander entgegengesetzt gleich, da w und u periodisch mit der Periode 2χ sind. Wegen der Periodizität von w muß sich nämlich zu jeder Zelle Z_{μ_1}, die z. B. teilweise von der Halbebene $\varphi = 0$ begrenzt wird, eine andere Zelle Z_{μ_2} angeben lassen, die genau die gleiche Begrenzung in der Halbebene $\varphi = 2\chi$ besitzt. Im Falle, daß die Spitze des Kegels Γ_0 hinreichend nahe an einer der Ebenen $\varphi = 0$ oder $\varphi = 2\chi$ gelegen ist, kann es sich ereignen, daß die Z_μ in dem Raume R_χ in zwei räumlichen Bereichen angeordnet sind, die miteinander keine Begrenzungsflächen gemeinsam haben. Es fallen dann aber die Flächenintegrale über die äußere Begrenzung dieser Bereiche fort. Diese Begrenzungsflächen bestehen ja dann aus den Kegeln Γ_ν und die Summe S reduziert sich auf das dem betreffenden Kegel Γ_ν entsprechende Glied $\frac{1}{\sqrt{\Gamma_\nu}}$ allein. Schließlich bemerken wir noch, daß das für die Zelle Z_1 über die Fläche Γ^* erstreckte mit S gebildete Flächenintegral bei der Addition aller Beziehungen (28) gegen anderen Zellen Z_μ zugehörige Flächenintegrale sich weghebt. Die durch S dargestellte Funktion ist nämlich in dem Kegel Γ^* stetig, und sobald wir uns in einem Bereiche von Z_1 befinden, wo S auf Γ^* nicht verschwindet, muß an Γ^* eine Zelle Z_μ grenzen, in der $w = S$ also gleich ist der Summe aller Glieder $\frac{1}{\sqrt{\Gamma_\nu}}$, die in der Summe S der Funktion $w = S + I$ in Z_1 auftreten. Und umgekehrt: In dem Bereiche, wo w in Z_1 durch I allein dargestellt wird (dieser Fall kann nur für $\chi > \pi$ eintreten), werden an Γ^* keine weiteren Zellen grenzen.

Man erkennt daher, daß bei der Addition aller Beziehungen (28) alle Integrale, soweit sie sich nicht auf die Fläche $t = t_0$ beziehen, schließlich fortfallen, wenn wir nur das auf Z_1 und I bezügliche Integral durch die über die Fläche $t = t_0$ erstreckten Integrale (33) oder (34) ausdrücken. Da endlich in der Fläche $t = t_0$: $\frac{d}{d\nu} = -\frac{\partial}{\partial t}$ ist, so erhalten wir durch Summation all unserer, auf die einzelnen Zellen Z_μ bezüglichen Relationen für u den Ausdruck:

$$(35)\quad 2\pi u(\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{t}) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} \overline{\left| \iint \vartheta_\nu(\varphi) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\Gamma_\nu}} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{\Gamma_\nu}}\right) u \right) \right|_{t=t_0} df}$$

$$+ \int_0^{2\chi} \int_0^R I \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=t_0} r\, dr\, d\varphi + \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \int_0^{2\chi} \int_0^R I u \bigg|_{t=t_0} r\, dr\, d\varphi,$$

der, wenn wir die endlichen Teile der unendlichen Integrale nach den im Abschnitt IV angeführten Regeln in gewöhnliche Integrale umformen, auch in der Form:

$$(36)\qquad 2\pi u(\bar{r},\bar{\varphi},\bar{t})$$

$$=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu}\left\{\iint \vartheta_\nu(\varphi)\frac{1}{\sqrt{\Gamma_\nu}}\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=t_0} df+\frac{\partial}{\partial \bar{t}}\iint \vartheta_\nu(\varphi)\frac{1}{\sqrt{\Gamma_\nu}}u\Big|_{t=t_0} df\right\}$$

$$+\int_0^{2\chi}\int_0^R I\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=t_0} r\,dr\,d\varphi+\frac{\partial}{\partial \bar{t}}\int_0^{2\chi}\int_0^R I u\Big|_{t=t_0} r\,dr\,d\varphi$$

geschrieben werden kann. Dabei sind die in diesen beiden Ausdrücken unter dem Summenzeichen stehenden Flächenintegrale über alle Gebiete zu erstrecken, die innerhalb des Bereiches $0,2\chi$ der Veränderlichen φ und zugleich innerhalb der Kreise gelegen sind, die durch den Schnitt der $t=t_0$-Fläche mit den Kegeln Γ_ν entstehen.

Berücksichtigen wir, daß $w=S+I$ ist, so können wir (36) auch in der Gestalt:

$$(37)\qquad 2\pi u(\bar{r},\bar{\varphi},\bar{t})=\iint w\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=t_0} df+\frac{\partial}{\partial \bar{t}}\iint w u\Big|_{t=t_0} df$$

ausdrücken, wobei die Integration über den ganzen, innerhalb des Bereiches $0,2\chi$ der Veränderlichen φ liegenden Definitionsbereich der Funktion w zu erstrecken ist.

Durch (35), (36) oder (37) ist die Funktion u nur für einen Bereich $0,2\chi$ der Veränderlichen φ definiert, entspricht also noch nicht der Forderung $1''$. Wir können ihren Definitionsbereich aber auf den Variabilitätsbereich $-\infty, +\infty$ der Veränderlichen φ durch die Festsetzung erweitern, daß u, als Funktion von φ betrachtet, periodisch mit der Periode 2χ sein soll.

Nunmehr können wir zeigen, daß u allen Bedingungen $1''$. bis $4''$. genügt.

Die Bedingung $1''$. ist sicherlich erfüllt, falls sich die Funktion u in den Ebenen $\varphi=0$ und $\varphi=2\chi$ und auch in den übrigen Ebenen $\varphi=2\nu\chi$ im allgemeinen ebenso verhält, wie in den übrigen Punkten ihres Definitionsbereiches. Um uns davon zu überzeugen, bemerken wir nur, daß man (wie dies leicht aus der Periodizität der Funktion w und der Anfangswerte der Funktion u folgt) die gleiche Funktion u erhält, wenn man zu ihrer Herstellung auf der Fläche $t=t_0$ statt der zwischen den Ebenen $\varphi=0$ und $\varphi=2\chi$ gelegenen Punkte des Definitionsbereiches der Funktion w, den durch irgendwelche zwei Ebenen $\varphi=\varphi^*$ und $\varphi=\varphi^*+2\chi$ $(0<\varphi^*<\bar{\varphi})$ begrenzten Definitionsbereich benützt.

Daß unsere Lösung die vorgeschriebenen Anfangswerte besitzt, d. h. der Bedingung $2''$. genügt, ist einfach festzustellen. Für $\bar{t}$-Werte, die hinreichend nahe an t_0 gelegen sind, schneidet nämlich innerhalb des Bereiches $0, 2\chi$ der Veränderlichen φ unter allen Kegeln Γ_ν und Γ^* nur noch der Kegel Γ_0 die Fläche $t = t_0$. Es reduziert sich daher dann die Funktion u auf den von Hadamard angegebenen Ausdruck:

$$2\pi u(\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{t}) = \boxed{\iint \left(\frac{1}{\sqrt{\Gamma_0}} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sqrt{\Gamma_0}} \right) u \right)\Big|_{t=t_0} df,}$$

und für diese Funktion ist von dem genannten Autor der Nachweis erbracht worden, daß sie die vorgeschriebenen Anfangswerte besitzt.

Nunmehr müssen wir zeigen, daß u die durch $3''$. geforderten Eigenschaften besitzt. Um uns zunächst zu überzeugen, daß u samt ihren Ableitungen der beiden ersten Ordnungen mit Ausnahme der Verzweigungsgeraden und der durch die Anfangsbedingungen verursachten singulären Stellen überall in R_x endlich und stetig ist, bemerken wir, daß dieses Verhalten von u für den Beitrag, der durch die Summe S in w geliefert wird, durch die bereits angeführten Untersuchungen von d'Adhémar und Hadamard verbürgt ist. In unserem Falle hat man nur noch bei der Differentiation nach $\bar{\varphi}$ zu beachten, daß die Grenzen der Bereiche, innerhalb deren die einzelnen Glieder in S von Null verschiedene Werte annehmen (d. h. die durch $t = t_0$ und (26) dargestellten Halbgeraden) zugleich mit $\bar{\varphi}$ ihre Lage ändern. Da jedoch die gesamte Funktion $w = S + I$ in den genannten Halbgeraden stetig ist, so treten bei der gesamten Funktion u bei der Differentiation nach $\bar{\varphi}$ keine Zusatzglieder auf, die sich auf diese Halbgeraden beziehen würden. Was nun den vom Integral I herrührenden Beitrag (34) betrifft, so ist bei der Bildung seiner Ableitungen zu beachten, daß die Integrationsgrenze R von $\bar{t}$ und $\bar{r}$ abhängt und, wie dies bei (34) betont wurde, im Grenzfalle der Punkte P_0 die endlichen Teile der betreffenden Integrale zu nehmen sind. Nach der oben gemachten Bemerkung über die Bildung der Ableitung nach $\bar{\varphi}$ kann diese in (34) formell einfach unter dem Integralzeichen ausgeführt werden.

Untersucht man nun das Verhalten von u in der Verzweigungsgeraden $\bar{r} = 0$, so kann man zunächst zeigen, daß u beim Hineinrücken in die Verzweigungsgerade endlich bleibt und zwar so, daß

$$2\chi \lim_{\bar{r}=0} u(\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{t}) = \int_0^{2\chi}\int_0^{R_0} \frac{1}{\sqrt{\Gamma_0^*}} \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=t_0} r\,dr\,d\varphi + \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \int_0^{2\chi}\int_0^{R_0} \frac{1}{\sqrt{\Gamma_0^*}} u \Big|_{t=t_0} r\,dr\,d\varphi$$

wird. Γ_0^* und R_0 sind dabei die Werte von Γ^* bzw. R für $\bar{r} = 0$, also $\Gamma_0^* = -r^2 + (\bar{t} - t_0)^2$ und $R_0 = \bar{t} - t_0$. Die Integration ist über einen Kreissektor zu erstrecken, der auf der Riemannschen Fläche $t = t_0$ im Bereiche $0, 2\chi$ der Veränderlichen φ liegt und von der Kreislinie $r = R_0$ mit dem Zentrum im Verzweigungspunkte begrenzt, also vom Kegel Γ^*

ausgeschnitten wird. Auf den Nachweis dieser Behauptung soll hier nicht näher eingegangen werden. Ebenso verzichten wir auf die Wiedergabe des Beweises, daß $\frac{\partial u}{\partial t}$ im Verzweigungspunkte endlich bleibt und $\lim_{\bar{r}=0} \bar{r}\frac{\partial u}{\partial \bar{r}}$ hier verschwindet.

Das Erfülltsein der Bedingung $4''$. ist leicht festzustellen. Aus den Untersuchungen von Hadamard folgt zunächst, daß u, soweit es durch die in (36) unter dem Summenzeichen auftretenden Glieder dargestellt wird, der Wellengleichung genügt. Die in unserem Falle bei der Differentiation nach $\bar{\varphi}$ noch auftretenden Zusatzglieder sind nicht weiter zu berücksichtigen, da sie sich, wie oben bemerkt wurde, gegen entsprechende Terme wegheben, die bei der gleichen Differentiation der in (36) mit I gebildeten Integrale (d. h. des Ausdruckes (34)) auftreten. Die Tatsache, daß (34) der Wellengleichung genügt, folgt dann aus dem Umstande, daß I eine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung ist und die wegen der Veränderlichkeit der Integrationsgrenze R bei der Differentiation von (34) noch auftretenden Zusatzglieder mit Rücksicht auf (25) verschwinden.

Zu den obigen Überlegungen bemerken wir noch, daß sie sich auf den Fall verallgemeinern lassen, wo die Funktion u in dem durch 1. bis 4. definierten Probleme auch noch Stellen besitzt, wo sie in vorgegebener Weise unendlich wird. Lösungen der Wellengleichung, die solche Singularitäten aufweisen, lassen sich ja für Riemannsche Verzweigungsflächen, die nur einen einzigen Verzweigungspunkt im Endlichen besitzen, nach dem Sommerfeldschen Verfahren herstellen und aus ihnen kann man dann durch „Zusammenstückeln“ Lösungen mit singulären Stellen für beliebige Riemannsche Flächen herstellen. Vom physikalischen Standpunkte aus sind solche Unendlichkeitsstellen als Energiequellen und Energiesenken zu deuten, z. B. in der Optik als Lichtquellen und Lichtsenken.

Die Differentialgleichung der Potentialtheorie $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ist nun als ein Spezialfall der jetzt behandelten Wellengleichung (2) aufzufassen. Es dürfte daher möglich sein, auf dem Wege über die Wellengleichung, auf Grund der oben bewiesenen Sätze, die Riemannschen Existenztheoreme über die algebraischen Funktionen und ihre Integrale zu beweisen. Setzt man etwa zur Zeit $t = t_0$ den Anfangszustand u und $\frac{\partial u}{\partial t}$ gleich Null und läßt von diesem Zeitmomente an Quellen und Senken von geeigneter Beschaffenheit wirken, so kann man in den beiden Fällen der einfach überdeckten Ebene ohne Verzweigungspunkte und der Riemannschen Fläche mit nur einem einzigen Verzweigungspunkte im Endlichen mit Hilfe der gewöhnlichen bzw. Sommerfeldschen Lösung der Wellengleichung zeigen, daß im Grenzfalle $t = \infty$ (oder, was auf das gleiche hinausläuft, $t_0 = -\infty$) die erwähnten Lösungen der Wellengleichung in Potentiale mit entsprechenden Unendlichkeitsstellen übergehen. Man kann daher vermuten, daß auch im allgemeinen Falle einer beliebigen Riemannschen Fläche F_n geeignete Lösungen der Wellengleichung für $t = \infty$ in Potentiale mit vorgegebenen Unstetigkeitsstellen übergehen. Dieser Weg, die Existenztheoreme der Potentialtheorie zu begründen, wäre, da er getreulich die physikalische Entstehungsweise eines Potentials widerspiegelt, insbesondere dem Physiker sehr sympathisch[14]).

[14]) Im Falle einer elastischen Membran z. B. kann man sich das Potential dadurch zustande gekommen denken, daß gewisse Störungen, die durch das „Erzeugen“ der Unstetigkeitsstellen verursacht werden, sich durch Wellen ausgleichen, die schließlich ins Unendliche verlaufen. Nur der durch die Beschaffenheit der Riemannschen Fläche und der vorgegebenen singulären Punkte bedingte Gleichgewichtszustand bleibt zurück.

(Eingegangen am 20. 11. 1925.)