

Differentialinvarianten, ausgezeichnete Feldgrößen und Vektorübertragung.

Von

F. Krauß in Aachen.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
I. Teil. Allgemeine Grundbegriffe.	
1. Einleitung. Allgemeiner Begriff der Fundamentalvarianten . .	688
2. Charakteristische Differentialvarianten als Fundamentalvarianten	691
3. Grundvarianten als charakteristische Differentialvarianten . . .	694
II. Teil. Tensorfelder im vollen Raum und allgemeine Vektorübertragung.	
4. Operations- und Zeichensystem der Tensoranalysis	698
5. Die charakteristischen Grundvarianten der allgemeinen Vektor- übertragung	704
6. Kernbildung mit den Grundvarianten der allgemeinen Vektor- übertragung	706
7. Beispiele. Reduzierte Differentiation	707
III. Teil. Tensorfelder auf Gebilden.	
8. Tensoroperationen auf Gebilden	710
9. Charakteristische Grundvarianten, Kernbildung und Reduktion auf Gebilden	712
10. Wirbelfreie Vektorübertragung. Taylorkerne. Fundamentaltensoren und Grundformen. Affine Flächengeometrie	716

I. Teil. Allgemeine Grundbegriffe.

1. Einleitung. Allgemeiner Begriff der Fundamentalvarianten.

Die vorliegende Arbeit gibt einen invariantentheoretischen Aufbau einer tensoranalytischen Theorie der Differentialinvarianten unter der Vor-

aussetzung einer allgemeinen (linearen) Vektorübertragung¹⁾. Sie stellt dabei den Begriff einer Zerlegung (in „Kern“ und „Rest“) in den Mittelpunkt, die an beliebigen Differentialausdrücken mit Hilfe gewisser ausgezeichnete Feldgrößen („Fundamentalvarianten“, „charakteristischer Grundvarianten“) vorgenommen wird. Diese Zerlegungsmethode läßt, wie mir scheint, den inneren Grund der Invarianz deutlicher hervortreten und führt rascher und einfacher zu den differentialgeometrischen Fundamentalformen und ihren Beziehungen als die bisher üblichen Darstellungen. Insbesondere erhalten wir auf einfache Weise die Erweiterung des sogenannten Reduktionsatzes, der bereits von Christoffel (Crelle 70) und Ricci und Levi-Civita (Mathem. Annalen 54) durch komplizierte Eliminationsrechnungen für den Fall der gewöhnlichen Riemannschen Geometrie aufgestellt, bisher aber noch nicht für eine beliebige Vektorübertragung abgeleitet wurde²⁾. Ferner ein analoges Theorem für Differentialformen auf Gebilden (Kurven, Flächen, Hyperflächen usw.) beliebiger Dimension.

Um die Begriffsbildung auch für das rechnerische Verfahren fruchtbar zu machen, schien eine Modifikation der gebräuchlichen Ricci-Bezeichnung nützlich, zu der ich mich erst nach längerem Widerstreben entschlossen habe. Sie beruht in der Hauptsache auf dem naheliegenden Gedanken, die Indexzeichen unmittelbar als Zeichen für die Grundvektoren zu verwenden und die bei der gewählten Grundvektorbezeichnung frei werdenden oberen Indexstellen für die Ableitungszeiger zu benutzen. Überdies werden, wie in der elementaren Vektoranalysis, die drei direkt geschriebenen Operationen der Addition, Multiplikation und Überschiebung (von Tensoren mit Vektoren) gebraucht. Ich glaube, daß diese auf den ersten Blick vielleicht ärgerlich erscheinende Neuwahl der Zeichen sich selbst rechtfertigen wird³⁾. Es versteht sich, daß der Schwerpunkt der Arbeit nicht in dieser Symbolik, sondern in den Grundbegriffen (Zerlegung mittels der charakteristischen Grundvarianten usw.) zu suchen ist.

Alle Invarianten — es handelt sich hier nur um absolute — sind Funktionen gewisser nicht-invarianter („varianter“) Elemente, deren Transformationsänderungen sich in jenen Funktionen dadurch kompensieren, daß zwischen ihnen ein Transformationszusammenhang vorgeschrieben ist.

¹⁾ Zur Orientierung s. z. B. Schouten, *Der Ricci-Kalkül* (Julius Springer, 1924), S. 62 ff.

²⁾ Schouten, a. a. O. S. 101; Weitzenböck, *Enzykl. d. math. Wissensch.* III E 1, 1922; E. Noether, *Invarianten beliebiger Differentialausdrücke*, *Göttinger Nachr.* 1918, *Algebraische und Differentialinvarianten*, *Jahresbericht d. Deutschen Mathem.-Vereinigung* 32, 1. Abt. Heft 5/8, 1922.

³⁾ s. u. S. 697 ff.

Besteht gar kein solcher Zusammenhang, oder sind, wie wir sagen wollen, die varianten Argumente einer Funktion *frei* oder *unabhängig variant*, so kann die Funktion nur dadurch invariant sein, daß sie von ihren varianten Elementen unabhängig ist. Diesen letzteren können dann beliebige triviale invariante Werte erteilt werden, z. B., falls ihr Definitionsbereich es zuläßt, Null^{3a)}.

Unter *Fundamentalvarianten* A eines Variantensystems Ω verstehen wir ein System frei varianter Größen, als deren Funktionen sich alle Elemente des Systems Ω darstellen lassen, derart, daß in diesen Funktionen außer den Fundamentalvarianten nur noch invariante Größen vorkommen. Mit $\varphi(\Omega)$, $\psi(A)$ usw. seien Funktionen von beliebigen Elementen aus Ω und A bezeichnet; ω bedeute ein beliebiges Element aus Ω , $\varphi(0)$ die Größe, die entsteht, wenn man in $\varphi(\Omega)$ alle Elemente aus Ω null setzt. Ist eine Variantenfunktion $\varphi(\Omega)$ vorgelegt, so können wir in ihr alle ω ausdrücken durch A und dadurch $\varphi(\Omega)$ in die Form $\varphi_0(A)$ bringen. $\varphi_0(0)$ ist dann eine Invariante, die wir den mit A gebildeten *Kern* von $\varphi(\Omega)$ nennen. Die Zerlegung $\varphi(\Omega) = \varphi_0(0) + \varphi_r(A)$ liefert den zugehörigen *Rest* $\varphi_r(A)$. Die Kernbildung wird im allgemeinen von der Wahl der A abhängig sein. Zur Kernbildung ausgezeichnet werden solche Varianten heißen, aus denen die A (durch gewisse Prozesse wie rationale Komposition, Differentiation usw.) gebildet sind.

Wenn nun $\varphi(\Omega)$ eine Invariante ist, so muß $\varphi_0(A)$ von den frei varianten A unabhängig, mit seinem Kern $\varphi_0(0)$ identisch und dieser von der Wahl der zur Kernbildung ausgezeichneten Größe unabhängig sein. Vorauszusetzen ist dabei, daß der Variabilitätsbereich, in dem $\varphi_0(\Xi)$ definiert ist, $\Xi = A$ und $\Xi = 0$ enthält, und φ_0 regulär ist, so daß aus seiner Konstanz im Bereich $\Xi = A$ auf die Konstanz im ganzen Bereich geschlossen werden kann. Diese Voraussetzungen sind im folgenden stets erfüllt. Existieren „annullierende“ Transformationen d. h. solche, bei denen die A verschwinden, so kann der Kern auch von vornherein definiert werden als die invariante Darstellung des Wertes der Varianten bei annullierenden Transformationen. Aus dem Begriff des Kerns folgt unmittelbar, daß der Kern einer Variantenfunktion gleich ist der Funktion der Variantenkerne.

^{3a)} Zusatz bei der Korrektur. Die Einführung des Terminus „variant“ geschieht aus folgenden Gründen. Es treten in dieser Arbeit die varianten Elemente selbstständig und vor den invarianten, die sich erst aus ihnen zusammensetzen, auf. Sie verdienen daher nicht, bloß negativ bezüglich der letzteren bezeichnet zu werden. Ferner wären Wortbildungen wie „Differentialnichtinvariante“ sprachlich unmöglich. Schließlich ist die allgemeinere Bezeichnung „variabel“ unbrauchbar, weil sie auch für invariante Feldgrößen benutzt wird, die als Funktionen des Ortes beim Fortgang in Felde sich ändern.

Man erhält daher den Kern einer Variantenfunktion, wenn man in ihr alle varianten Elemente durch ihre Kerne ersetzt.

Reduzierte Form einer Invarianten nennen wir ihre Darstellung aus lauter invarianten Elementen. Offenbar ist der Kern einer Invarianten unmittelbar eine reduzierte Form. Invarianzkriterium ist das in den Λ identische Verschwinden des Restes. Die Kernbildung hat also drei wesentliche Eigenschaften: 1. Sie spaltet jede Variantenfunktion eindeutig in einen invarianten Kern und einen Rest, dessen variante Elemente frei variant sind, und der mit diesen verschwindet. 2. Sie liefert ein Invarianzkriterium. 3. Sie reduziert die Invarianten.

Ein System J von unabhängigen Invarianten, aus denen sich zusammen mit den Λ alle ω komponieren lassen, gestattet auch die Komposition der Kerne aller ω , und daher auch aller invarianten Variantenfunktionen $\varphi(\Omega)$. J ist also ein System von Fundamentalinvarianten. Jede Variantenfunktion hat demnach die Darstellung $f(J, \Lambda)$ und bei Invarianz die reduzierte Form $F(J) = f(J, 0)$.

2. Charakteristische Differentialvarianten als Fundamentalvarianten.

Der allgemeine Begriff der Fundamentalvarianten und der zugehörigen Kernbildung wird im Verlauf der Untersuchung in drei Schritten spezialisiert. Die erste Spezialisierung beruht darauf, daß das betrachtete Variantensystem Ω aus *Differentialvarianten* besteht d. h. aus solchen Größen, die aus gegebenen Feldgrößen von einer gewissen Transformationsweise und deren Differentialquotienten nach den Punktkoordinaten ξ_i des Feldgebietes gebildet sind. Jede Differentialvariante ist in einer gewissen *Transformationsordnung* vom Koordinatensystem abhängig. Ist $\xi_i = \xi_i(\dots \xi_n \dots)$ ein beliebiges System der zugelassenen Transformationsfunktionen, so ist diese Ordnung dadurch gegeben, daß der Wert der Differentialvarianten beim Koordinatensystem der ξ_i durch eine Transformationsgleichung dargestellt werden kann, in der außer zum Koordinatensystem der ξ_n gehörigen Werten die „Transformationsableitungen“ $\frac{\partial^{(r)} \xi_n}{\partial \xi_\lambda \partial \xi_\mu \dots}$ bis zu einer gewissen p -ten Höchstordnung vorkommen (s. u. (1)). Sind zwei Koordinatensysteme durch eine Transformation verbunden, bei welcher die Transformationsableitungen (in einem gewissen beliebigen Punkte P) bis zur p -ten Ordnung gleich sind denen der identischen Transformation, so heißen solche Koordinatensysteme in p -ter Ordnung äquivalent im Punkte P . Differentialvarianten von nicht höherer als p -ter Transformationsordnung haben in solchen in p -ter Ordnung äquivalenten Koordinatensystemen

invariante Werte. Wir nennen nun ein System von Größen, die bei einem zugelassenen System von Transformationen T *frei variant* sind, *charakteristisch in p -ter Ordnung bei T* , wenn zwei Koordinatensysteme aus T in P dann und nur dann äquivalent in p -ter Ordnung sind, wenn sie in P in diesen Größen übereinstimmen.

Das Wesentliche im invariantentheoretischen Begriff der charakteristischen Differentialvarianten beruht darauf, daß sie das veränderliche („neue“) Koordinatensystem jeweils festlegen nicht relativ zu einem andern („alten“) Koordinatensystem, sondern durch die Werte, welche geeignete variante Feldgrößen in dem zu charakterisierenden Koordinatensystem annehmen. Jene Bestimmung des Koordinatensystems relativ zu einem anderen wird durch die Transformationsableitungen gegeben und die Transformationsgleichungen sind es, welche die Werte der Differentialvarianten durch die Werte von Varianten im alten Koordinatensystem und die Transformationsableitungen darstellen, nicht aber durch variante Feldgrößen und Invarianten, wie es durch die Einführung der Fundamentalvarianten geschieht. Dies ist der Grund, weshalb die Transformationsgleichung zwar das Invarianzkriterium liefert (in Gestalt der Unabhängigkeit dieser Darstellung von den in sie eingehenden Transformationsableitungen), nicht aber eine Reduktion der Differentialinvarianten. Die charakteristischen Differentialvarianten leisten nun beides gleichzeitig, da sie Fundamentalvarianten sind für das System *aller* Differentialvarianten von nicht höherer als p -ter Ordnung. Denn die Werte der letzteren hängen bloß bis zur p -ten Ordnung vom Koordinatensystem ab, sie müssen also Funktionen sein derjenigen Größen, welche das Koordinatensystem (innerhalb T) bis zur p -ten Ordnung vollständig charakterisieren, d. h. es muß für sie Darstellungen geben, in denen die charakteristischen Differentialvarianten die einzigen varianten Elemente sind.

Wir wollen diese Verhältnisse, so einfach sie sein mögen, genauer ausführen. Überstrichene Größen sollen Werte varianter Größen in einem beliebigen alten Koordinatensystem bedeuten, das zunächst festgehalten wird. ξ_i seien die durch Transformation veränderlichen neuen Koordinaten. Das System aller Transformationsableitungen $\frac{\partial^{(r)} \bar{\xi}_x}{\partial \xi_\lambda \partial \xi_\mu \dots}$ bis zur p -ten Ordnung einschließlich bezeichnen wir mit $t^{(p)}$; mit $t^{(p)} - t^{(q)}$ die Transformationsableitungen von der $(q+1)$ -ten bis zur p -ten Ordnung. Die allgemeine reguläre Gruppe der Transformationen sei T_0 ; diejenige, bei welcher die $t^{(1)}$ die Einheitsmatrix bilden (im betrachteten Punkte P), sei mit T_1 bezeichnet. Bei T_1 sind alle Differentialgrößen von erster Transformationsordnung invariant. Die Differentialinvariantentheorie hat zu ihrem wesentlichen Grunde die Tatsache, daß bei T_0 die $t^{(p)}$ in einem

beliebigen Punkte frei variant sind, d. h. daß sich immer Koordinatensysteme angeben lassen, welche in P den $t^{(p)}$ beliebige Werte verleihen. Dieser Varianzbereich der $t^{(p)}$ bei T_0 ist nur dadurch eingeschränkt, daß die Determinante der $t^{(1)}$ nicht verschwinden darf, und daß die Transformationsableitungen, die sich formal nur durch die Reihenfolge der Differentiationen unterscheiden, identisch sein müssen (Eindeutigkeit und Integrierbarkeit). Bei T_1 sind die zugehörigen $t^{(p)} - t^{(1)}$ frei variant. Wenn ω eine Differentialvariante p -ter Transformationsordnung ist, so besagt dies: Es existiert ein Variantenkomplex, den wir mit C_ω bezeichnen, derart, daß sich ω in einem beliebigen zugelassenen Koordinatensystem ausdrückt nach der Transformationsgleichung:

$$(1) \quad \omega = f(t^{(p)}, \bar{C}_\omega).$$

Ist ein von T_0 verschiedenes Transformationssystem T zugelassen, so sind in ihm die $t^{(p)}$ i. a. nicht mehr frei variant, vielmehr sind ihnen Bedingungen auferlegt. Diese Bedingungen symbolisieren wir mit:

$$(2) \quad B_T(t^{(p)}) = 0.$$

$A_T^{(p)}$ bedeute ein System in p -ter Ordnung charakteristischer Differentialvarianten bei T . Das System der zugehörigen Transformationsgleichungen sei:

$$(3) \quad A_T^{(p)} = F(t^{(p)}, \bar{C}_{A_T^{(p)}}).$$

Die $A_T^{(p)}$ müssen sich dadurch als frei variant zu erkennen geben, daß sie durch die Gleichungen (2), (3) als voneinander unabhängige Funktionen der $t^{(p)}$ definiert sind. Ferner aber, und nur hierdurch sind die $A_T^{(p)}$ charakteristisch, muß das System (2), (3) die $t^{(p)}$ als eindeutige Funktionen der $A_T^{(p)}$, $\bar{C}_{A_T^{(p)}}$ bestimmen, so daß Darstellungen existieren der Form:

$$t^{(p)} = \varphi(A_T^{(p)}, \bar{C}_{A_T^{(p)}}).$$

Demgemäß können wir oben in der Transformationsgleichung (1) die $t^{(p)}$ durch die $A_T^{(p)}$, $\bar{C}_{A_T^{(p)}}$ ausdrücken, so daß ω die Gestalt annimmt:

$$(4) \quad \omega = \psi(A_T^{(p)}, \bar{C}_{A_T^{(p)}}, \bar{C}_\omega).$$

Der Unterschied dieser letzteren Form von ω gegenüber der in (1) besteht darin, daß in ψ die $A_T^{(p)}$ nur von dem neuen Koordinatensystem, nicht aber auch von dem alten abhängen, wie es die $t^{(p)}$ tun. Nun ist nach unserer Voraussetzung das alte Koordinatensystem beliebig gewählt; die Darstellung gilt also sowohl bei Veränderungen des alten wie des neuen Koordinatensystems. Die Veränderung des neuen ändert $A_T^{(p)}$ und ω , und

zwar können dadurch den $A_T^{(p)}$ beliebige Werte erteilt werden; die Änderung des alten Koordinatensystems läßt aber ω und die $A_T^{(p)}$ in Ruhe und macht nur die $\bar{C}_{A_T^{(p)}}$ und \bar{C}_ω zu Varianten. Nun ist ψ eine Funktion $\Phi(A_T^{(p)})$, in deren Konstante die $\bar{C}_{A_T^{(p)}}$ und \bar{C}_ω so eingehen, daß bei beliebigen Transformationen der $\bar{C}_{A_T^{(p)}}$ und \bar{C}_ω und für jeden beliebigen festen Wertkomplex der $A_T^{(p)}$, ψ ungeändert bleibt. Das ist aber nur möglich, wenn diese Konstanten aus den $C_{A_T^{(p)}}$, C_ω gebildete Invarianten sind^{3b)}. Also sind die $A_T^{(p)}$ Fundamentalvarianten des Systems aller Differentialvarianten nicht höherer als p -ter Transformationsordnung.

Solche Feldgrößen, aus denen die $C_{A_T^{(p)}}$ und die $A_T^{(p)}$ gebildet sind (durch Differentiation und Komposition), heißen zur Charakteristik des Koordinatensystems ausgezeichnet. Jedes Größensystem, das von den $A_T^{(p)}$ umkehrbar eindeutig abhängt, ist offenbar wieder ein charakteristisches Größensystem, und dasselbe gilt für die $C_{A_T^{(p)}}$. *Verschiedene Arten der Charakteristik des Koordinatensystems werden i. a. verschiedene Kernbildungen der Differentialvarianten erzeugen; liegt aber Invarianz des Differentialausdrucks vor, so ist sein Kern unabhängig von der Wahl der $C_{A_T^{(p)}}$ und $A_T^{(p)}$.*

3. Grundvarianten als charakteristische Differentialvarianten.

Die bisher besprochene Charakterisierung des Koordinatensystems durch *irgendwelche* zur Kernbildung ausgezeichnete Feldgrößen ist an sich noch keine *differentialgeometrische*. So können wir uns z. B. ein physikalisches Kontinuum denken, in dem eine formale Geometrie überhaupt nicht festgelegt ist (wie z. B. in der Thermodynamik), in der aber Zustandsfunktionen, die von der Wahl der Zustandskoordinaten abhängig sind, existieren, so daß diese Koordinaten und ihre Verteilung bis zu einer gewissen Differentiationsordnung charakterisiert sind durch die jeweiligen Werte der Zustandsfunktionen und ihrer Ableitungen nach den Koordinaten. Läßt sich überhaupt das Koordinatensystem durch irgendwelche frei variante Feldgrößen bis zu einer gewissen Differentiationsordnung vollständig charakterisieren, so ist es möglich, an irgendwelchen Differentialausdrücken Kernbildungen vorzunehmen und sie, bei Invarianz, zu reduzieren. Hiermit sind sehr allgemeine Bedingungen bezeichnet, unter denen eine Feldtheorie invariantentheoretisch formuliert werden kann.

^{3b)} Zusatz bei der Korrektur. Hierbei ist natürlich die, im Folgenden stets erfüllte, Voraussetzung zu machen, daß die Konstanten in der Darstellung $\Phi(A_T^{(p)})$ eindeutig durch den Funktionsverlauf von Φ bestimmt sind; denn nur dann wird jede Änderung dieser Konstanten eine Änderung von ψ nach sich ziehen.

Differentialgeometrische Bedeutung — und darin besteht die weitere Spezialisierung des allgemeinen Begriffs der Fundamentalvarianten — erhalten die charakteristischen Differentialvarianten erst dann, wenn zwei Arten der Auszeichnung von Feldgrößen zusammenfallen; nämlich, wenn die zur Kernbildung ausgezeichneten Feldgrößen gleichzeitig zur geometrischen Grundbestimmung des Raumes ausgezeichnet sind. Unter Grundbestimmung ist dabei die Eintragung und Auszeichnung solcher Feldgrößen zu verstehen, mit denen die fundamentalen geometrischen Relationen und Operationen definiert werden. Die ursprünglichen, in diese Definitionen unmittelbar eingehenden Größen, wie z. B. die g_{ik} , oder, bei fehlender Maßbestimmung und gegebener Vektorübertragung, die verallgemeinerten Dreizeigergrößen (gewöhnlich mit Γ_{ik}^h bezeichnet), mögen *fundamentale Grundgrößen* heißen. Die aus ihnen durch Differentiation und beliebige Komposition gebildeten Ausdrücke aber *Grundgrößen* überhaupt. Diese letzteren zerfallen in *Grundvarianten* und *Grundinvarianten*. Eine Grundinvariante in diesem Sinne ist z. B. das Krümmungsmaß des Riemannschen Raumes. Ist in dem Raume ein *Gebilde* gegeben, worunter wir ein beliebiges Teilkontinuum niedrigerer Dimension, das sich durch reguläre Parametergleichungen bestimmen läßt, verstehen wollen (Kurven, Flächen, Hyperflächen usw.), so nennen wir diejenigen Größen, die nur durch die Grundbestimmung des Raumes und die Eigengestalt des Gebildes definiert sind, *Eigeninvarianten* des letzteren. Alle übrigen Feldgrößen, die, etwa im Hinblick auf physikalische Anwendungen, überdies noch im Raume ursprünglich angenommen werden, seien als *Stammgrößen* bezeichnet.

Da die Grundvarianten lediglich von der geometrischen Grundbestimmung des Raumes und dem Koordinatensystem abhängen, so müssen sie geometrische Eigenschaften an den Koordinatenlinien, welche diesen durch die Grundbestimmung aufgeprägt sind, zum Ausdruck bringen. So geben z. B. die gewöhnlichen g_{ik} , als Grundvarianten aufgefaßt, die Winkel zwischen den Koordinatenlinien und die auf ihnen durch die Koordinatenverteilung bewirkte Parameterdichte an. In p -ter Ordnung charakteristische Grundvarianten $A_T^{(p)}$ sind deshalb solche differentialgeometrische Größen an den Koordinatenlinien, welche diese und die Parameterverteilung auf ihnen bis zu einer gewissen Ordnung vollständig bestimmen und überdies durch die zugelassenen Transformationen T unabhängig voneinander variiert werden können. Alle Grundvarianten müssen sich dann durch solche $A_T^{(p)}$ und Grundinvarianten darstellen lassen. Hierin kommt der Zwang zum Ausdruck, durch den die invariante Struktur des Raumes die gegenseitige Veränderlichkeit der Grundvarianten einschränkt. Irgendwelche den $A_T^{(p)}$ auferlegte Bedingungen spezialisieren das Koordinatensystem innerhalb T . Wegen der freien Varianz der $A_T^{(p)}$ muß es stets Koordinatensysteme

geben, welche (in irgendeinem Punkte P) den $A_T^{(p)}$ beliebige Werte verleihen; umgekehrt muß jede differentialgeometrische Spezialisierung des Koordinatensystems innerhalb T sich durch Bedingungen, die den $A_T^{(p)}$ auferlegt werden, angeben lassen. Die einfachste Spezialisierungsmöglichkeit ist offenbar die, bei welcher das Koordinatensystem die $A_T^{(p)}$ annulliert. Ein Koordinatensystem heißt in p -ter Ordnung innerhalb T *invariant spezialisiert*, wenn die $A_T^{(p)}$ mit Grundinvarianten in Beziehung gesetzt werden, und diese Spezialisierung eine *vollständige* sein, wenn in dem betreffenden Koordinatensystem die Werte der $A_T^{(p)}$ mit Differentialinvarianten identisch werden. Wählen wir z. B. auf einer euklidischen Kurve als Parameter die wahre Länge, so fallen in diesem invariant spezialisierten Koordinatensystem die Differentialquotienten des Ortsvektors beliebig hoher Ordnung mit Eigeninvarianten der Kurve (Richtungs- und Krümmungsvektoren) zusammen. Ähnliches findet auf einer Fläche statt, wenn wir invariant ausgezeichnete Kurven (z. B. Krümmungs- oder Asymptotenlinien) als Koordinatenlinien wählen und auf ihnen nach ihren wahren Längen differenzieren. In allen Anwendungen des Koordinatenbegriffs auf die geometrische und physikalische Wirklichkeit ist die invariante Struktur des Gebildes, an welchem die Koordinaten zu definieren sind, das primär aufgefaßte, und jede wirkliche Festlegung der Koordinaten erfolgt dadurch, daß sie zu dieser invarianten Struktur, d. h. zu den Eigeninvarianten des Gebildes, in Beziehung gesetzt werden. Charakteristische Grundvarianten haben also eine doppelte Funktion, eine invariantentheoretische, in der sie von den Differentialausdrücken invariante Kerne abspalten und Differentialinvarianten reduzieren, und eine geometrische, in der sie die Eigengestalt des Koordinatensystems durch beliebig variierbare Bestimmungsmomente festlegen.

Als geometrische Grundbestimmung betrachten wir nun in dieser Arbeit — und hierin besteht die dritte und letzte Spezialisierung des Begriffs der Fundamentalvarianten — die allgemeine lineare Vektorübertragung, auf die sich der tensorielle Ableitungs- und Gradientprozeß gründet, und die durch die verallgemeinerten Dreizeigergrößen definiert ist. Aus diesen und ihren Ableitungen werden die charakteristischen Grundvarianten gebildet.

Auf Gebildengenügt die analoge Charakteristik des Koordinatensystems nicht; die diese Charakteristik liefernden vektoriellen Eigenkrümmungen der Koordinatenlinien springen nämlich i. a. aus dem Gebilde heraus infolge der Eigenkrümmung des letzteren; aber diese Krümmungsvektoren sind *frei variant nur in tangentialer Richtung*. Infolgedessen bedarf es, um *bestimmte* tangentiale frei variante Komponenten zu bilden, der Definition einer invarianten Projektionsrichtung, mit der nicht-tangentiale Vektoren eindeutig in tangentiale und quergerichtete Komponenten zerlegt werden können („Querriechung“). Solche Projektionsrichtungen sind in der gewöhnlichen Maßgeometrie durch die Orthogonalität, in der affinen Geometrie durch affinnormale Richtungen definiert (s. u. Teil III).

Als Stammgrößen treten hierzu die Bestimmungszahlen beliebiger Tensoren und deren Ableitungen. Die fundamentalen Grundgrößen der Vektorübertragung (Dreizeigergrößen) sind selbst schon von der zweiten Transformationsordnung; infolgedessen ist es nicht möglich, durch sie und ihre Ableitungen die Eigenschaften erster Ordnung des Koordinatensystems (Richtungsverhältnisse und Parameterdichte der Koordinatenlinien) zu charakterisieren. Dies ist der Grund, weshalb wir als Invarianzgruppe T_1 wählen müssen; denn da bei T_1 die $t^{(1)}$ die Einheitsmatrix bilden, so bedarf es bei dieser Gruppe einer Charakteristik in erster Ordnung nicht. Nun sind aber die Bestimmungszahlen der Tensoren von erster Transformationsordnung und infolgedessen invariant bei T_1 . Ein Differentialausdruck ist daher nur dann Tensorkomponente, wenn er bei T_1 invariant ist. Die Aufgabe also, einen beliebigen Differentialausdruck, dessen variante Elemente nicht alle Tensorkomponenten sind, durch Tensorkomponenten darzustellen, erscheint als Reduktionsproblem bei der Invarianzgruppe T_1 . Auf diese Weise führt die Bildung der charakteristischen Grundvarianten bei T_1 und der zugehörigen Kerne auf Reduktionssätze d. h. auf Theoreme, welche diejenigen Tensoren angeben, aus denen man Differentialausdrücke, die invariant sind oder Tensorcharakter haben, rein algebraisch (projektiv) und ohne weiteren Differentiationsprozeß zusammensetzen kann.

Für die tensorielle und vektorielle Symbolik waren folgende Forderungen maßgebend. Die direkt geschriebenen vektoriellen und tensoriellen Operationen müssen selbst einfach sein und nach einfachen Regeln vollzogen werden können, die möglichst analog sind dem gewöhnlichen skalaren Rechnen und den bekannten Operationen der elementaren Vektoranalysis. Demgemäß schreiben wir mit tensoriellen Zeichen die Addition, die Multiplikation, die Überschiebung eines Tensors mit einem Vektor (inneres Produkt) und die invariante Differentiation. Ebenso wichtig wie die Invarianz und invariante Schreibart der Formeln ist aber die Spezialisierung des Koordinatensystems. Dieses erscheint in den Formeln durch Zerlegung der tensoriellen und vektoriellen Größen in ihre Komponenten, wodurch die Grundvarianten explizit hervortreten. Ein brauchbarer tensorieller Kalkül muß daher eine einfache mechanische Weise enthalten, die tensoriellen und vektoriellen Formeln in die Komponentform (vollständig zerlegte Form) überzuführen und insbesondere die Grundvarianten so schreiben, daß ihre geometrische Bedeutung und ihr Verhalten bei der Transformation übersichtlich hervortreten. Das ist zumal für unsere invariantentheoretischen Untersuchungen erforderlich, die es mit Grundvarianten in erster Linie zu tun haben.

Diese verschiedenen Forderungen lassen sich erfüllen, wenn man eine möglichst einfache Schreibweise für die Grundvektoren wählt. Wir bezeichnen sie, wie schon bemerkt, mit den auf die Zeile gesetzten Indexbuchstaben. Die Grundvarianten sind in der Hauptsache nichts anderes als die Grundvektorableitungen, welche in unserer Symbolik auch bei höherer Differentiationsordnung in einfacher Form erscheinen, während sie in der gewöhnlichen skalaren Schreibweise verhältnismäßig unübersichtliche vielgliedrige Ausdrücke werden, deren Transformationsweise und geometrische Bedeutung nicht un-

mittelbar zu erkennen sind (s. z. B. u. S. 16 (19)). Die Verwendung idealer (invarianter) Vektorfaktoren und die formale Darstellung invarianter Differentiationsprozesse mittels derselben scheint mir durch die hier gewählte Symbolik überflüssig zu werden. Die Schreib- und Rechenweise mit den (realen) Grundvektoren ist nicht unhandlicher als die mit jenen idealen Elementen, ja durchweg einfacher. Ferner aber, und dies scheint mir das wesentlichste Moment zu sein, tritt nicht nur bei allgemeinen invariantentheoretischen Überlegungen, sondern auch bei allen praktischen Anwendungen des Kalküls auf geometrische und physikalische Probleme die Notwendigkeit ein, Komplexe von Grundvarianten zu betrachten, zu spezialisieren und zu berechnen, so daß die formale Elimination derselben durch die idealen Faktoren dann sowieso rückgängig gemacht werden muß⁴⁾.

Charakteristische Feldgrößen und Kernbildung können, außer daß sie als Invarianzkriterium und zur Reduktion dienen, noch eine dritte Funktion übernehmen, nämlich die, einen vorgelegten Differentialausdruck $\varphi(\Omega)$, der nur bei Transformationen T' invariant ist, bei einer umfassenderen Gruppe T invariant zu machen. Wenn $A_T^{(p)}$ und $C_{A_T}^{(p)}$ zu dieser letzteren Gruppe gehören, so kann man mit ihnen $\varphi(\Omega)$ spalten in einen Kern $\varphi_0(0)$ und einen Rest φ_r . Da $\varphi(\Omega)$ bei T' und nicht bei T invariant ist, so verschwindet φ_r nicht identisch in den $A_T^{(p)}$. Wenn man nun die in hohem Maße willkürlichen $A_T^{(p)}$ und $C_{A_T}^{(p)}$ so bestimmt, daß φ_r bei T' verschwindet, so wird $\varphi_0(0)$ bei T' mit $\varphi(\Omega)$ identisch und ist überdies invariant bei T . Neben dieser Art, invariant zu machen, gibt es jedoch noch andere Weisen. Die Klärung der methodischen Bedeutung des Invarianzgedankens in der modernen Physik setzt zunächst voraus, daß man diese verschiedenen Formen unterscheidet; denn darauf gründen sich die verschiedenen physikalischen Bedeutungen, welche das Relativitätsprinzip als Prinzip invarianter Formulierung in seinen einzelnen Anwendungen annimmt.

II. Teil. Tensorfelder im vollen Raum und allgemeine Vektorübertragung.

4. Operations- und Zeichensystem der Tensoranalysis.

In diesem Abschnitt sollen bekannte Elemente der Tensoranalysis in einer für unsere Zwecke geeigneten Fassung kurz zusammengestellt werden⁵⁾.

Das grundlegende Konstruktionselement ist der differentialgeometrische *Verschiebungsvektor* (*Vektor erster Art*) d. h. die auf eine zugehörige Parameteränderung (dt) bezogene kleine Punktverschiebung ($d\xi_i$). $\frac{d\xi_i}{dt}$ sind dann die Bestimmungszahlen des Verschiebungsvektors. *Vektoren können*

⁴⁾ Eine derartige Anwendung auf die Elastizitätstheorie der Schalen, sowie einen Versuch, die nachstehend angedeuteten Unterscheidungen in den Prinzipienfragen der Relativitätstheorie durchzuführen, hoffe ich demnächst vorlegen zu können.

⁵⁾ Zu dieser Nr. und Nr. 8 und 10 darf wohl bemerkt werden, daß die Grundbegriffe dieser Arbeit bereits 1921/22 im Anschluß an meine Bonner Dissertation (Über die Parallelverschiebung im Riemannschen Raume) von 1921 entstanden sind. Literaturhinweise auf inzwischen erschienene Publikationen bedeuten daher nicht die subjektive Abhängigkeit von ihnen.

als solche variant sein d. h. mit dem Koordinatensystem andere vektorielle Werte annehmen. Die Bestimmungszahlen invarianter Verschiebungsvektoren transformieren sich kogredient mit den $d\xi_i$ (kontravariant). Der Tensor erster Art und s -ter Stufe ist symbolischer Träger einer skalaren Linearform von s Argumentvektoren erster Art. Er ist invariant, wenn er invarianten Argumenten invariante Formwerte zuordnet⁶⁾. Der Tensor erster Art und erster Stufe heißt auch *Vektor zweiter Art*. Tensoren zweiter und gemischter Art haben Vektoren der zweiten Art und Vektoren beider Arten zu Argumenten. Für sie gelten die analogen Definitionen der Invarianz. Die algebraischen Tensoroperationen können nach Einführung der invarianten homogen-linearen Kompositionen für Verschiebungsvektoren (Addition, Subtraktion, Multiplikation mit einem Skalar) ohne Rekurs auf Bestimmungszahlen definiert werden. Wir benutzen drei direkt geschriebene algebraische Operationen:

1. Die „Überschiebung“ eines Tensors mit Vektoren.
2. Die Addition und Subtraktion zweier gleichartiger Tensoren.
3. Die Multiplikation zweier Tensoren beliebiger Art und Stufe.

1. ist dadurch definiert, daß in der Vektorform ein unbestimmtes Argument durch ein bestimmtes ersetzt und die Form nur noch in Abhängigkeit von den übrigen Argumenten betrachtet wird, so daß Stufenerniedrigung eintritt. Wir schreiben den nicht-vektoriellen Tensor mit großen gotischen Buchstaben, z. B. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots$, die Vektoren beider Arten mit kleinen. Die Überschiebung wird durch einfaches Danebensetzen ausgedrückt. $\mathfrak{A}b$ ist also Überschiebung des Tensors \mathfrak{A} mit dem Vektor b . Müssen, was selten vorkommt, in \mathfrak{A} die Argumentstellen, an denen die Überschiebung stattfindet, unterschieden werden, so kann dies durch aussparende Punktierungen geschehen: $\mathfrak{A}b, \mathfrak{A}\cdot b, \mathfrak{A}\cdot\cdot b$ usw. wären demnach Überschiebungen an erster, zweiter, dritter usw. Argumentstelle. Bei Symmetrie von \mathfrak{A} fällt eine solche Notwendigkeit eo ipso fort; die skalare Vektorform des Tensors dritter Stufe mit den vektoriellen Argumenten ξ, η, ζ wird demnach geschrieben: $\mathfrak{A}\xi\eta\zeta$.

2. und 3. sind definiert durch die entsprechenden skalaren Verknüpfungen der Vektorformen:

$$(5) \quad (\mathfrak{A} \pm \mathfrak{B})\xi\eta \dots = \mathfrak{A}\xi\eta \dots \pm \mathfrak{B}\xi\eta \dots,$$

$$(6) \quad (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})\xi\eta \dots uv \dots = (\mathfrak{A}uv \dots)(\mathfrak{B}\xi\eta \dots).$$

Die (übrigens willkürliche) Ordnung der überschiebenden Argumente

⁶⁾ Variante Vektoren und Tensoren scheinen mir bei dieser Auffassung die (Hessenbergsche) Bezeichnung Pseudovektoren (-tensoren) ebensowenig zu verdienen wie mit dem Koordinatensystem veränderliche Zahlen die Bezeichnung Pseudozahlen.

in (6) ergibt für die Überschiebung von $\mathfrak{A} \times \dots \times \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$ die „Überschiebungsregel“ in dem Sinne, daß zuerst der rechtshändige Faktor \mathfrak{C} bis zum Skalar durchüberschoben wird, hierauf der links anschließende \mathfrak{B} usw. Diese Multiplikation enthält die Multiplikation eines Tensors mit einem Skalar als denjenigen Spezialfall, bei dem ein Faktor von nullter Stufe ist. Das Zeichen \times kann daher auch für Multiplikation mit Skalaren benutzt werden.

1. und 3. haben allgemeine Produkteigenschaft und sind daher mit 2. distributiv verknüpft. 2. und 3. sind assoziativ. Damit sind die wesentlichen Rechenregeln gegeben. Sie sind einfach und dem skalaren Rechnen sowie der elementaren Vektoralgebra analog. Die Klammersetzung ist gegeben durch die bei fehlenden Klammern geltende Ausführungsfolge (wobei wir die erst unten einzuführende Differentiation vorwegnehmen): 1. Differentiation, 2. Überschiebung, 3. Multiplikation, 4. Addition.

Die n -reihige Einheitsmatrix, aufgefaßt als System von Bestimmungszahlen von n varianten Verschiebungsvektoren, definiert die Grundvektoren erster Art. Variante Elemente werden stets mit griechischen Buchstaben bezeichnet. Da die Grundvektoren die fundamentalen Grundvarianten sind, aus denen sich alle übrigen durch Differentiation und algebraische Komposition ableiten lassen, so bedürfen wir einer möglichst einfachen Bezeichnung für sie. Wir schreiben daher den zur Koordinatenlinie der $\xi_i, \xi_\kappa, \xi_\lambda, \xi_\rho, \dots$ gehörigen Grundvektor erster Art *mit den auf die Zeile gesetzten Indexbuchstaben* $\iota, \kappa, \lambda, \rho, \dots$. Bei numerischer Bestimmtheit der Indizes schreibt man zweckmäßig $\bar{1}, \bar{2}, \dots$. Die (unterpunktierten) Grundvektoren zweiter Art sind (vormetrisch) definiert durch die Reziprozitätsbedingungen:

$$(7) \quad \iota \kappa = \begin{cases} 1 & \iota = \kappa \\ 0 & \iota \neq \kappa \end{cases}$$

und können auch bestimmt werden als diejenigen varianten Vektoren zweiter Art, welche jedem Vektor erster Art durch Überschiebung seine Bestimmungszahlen zuordnen.

Die Bestimmungszahlen eines Tensors s -ter Stufe \mathfrak{A} lassen sich nunmehr definieren als Überschiebungsprodukte von \mathfrak{A} mit s Grundvektoren, wobei je nach der Art von \mathfrak{A} Grundvektoren nur erster oder nur zweiter Art oder aus beiden Arten gemischte zu nehmen sind, so daß die Bestimmungszahlen von \mathfrak{A} sich schreiben: $\mathfrak{A}_{\iota\kappa\dots}$ oder $\mathfrak{A}_{\iota\kappa\bar{\lambda}\dots}$ oder $\mathfrak{A}_{\iota\bar{\kappa}\dots}$ usw. Überschiebungen von \mathfrak{A} mit p ($p \leq s$) Grundvektoren ergeben *Koordinaten p -ten Ranges* und $(s-p)$ -ter Stufe von \mathfrak{A} , so daß die Bestimmungszahlen als Koordinaten s -ten Ranges und skalarer (nullter) Stufe erscheinen. Für die tensorielle Rechnung und invariantentheoretische Überlegung besteht

zwischen Koordinaten gleichen Ranges und gleicher Art von Tensoren verschiedener Stufe kein Unterschied. Aus ihnen können deshalb gleichartige Invarianten gebildet werden, so daß die Erzeugung derselben von der Stufe der Tensoren unabhängig wird. Grundlage der algebraischen Invariantenbildung ist natürlich die Kontragredienz der Vektorkomplexe ι und ι . Die ersteren transformieren sich gemäß:

$$(8) \quad \iota = \sum \frac{\partial \bar{\xi}_\alpha}{\partial \bar{\xi}_i} \bar{\xi}_\alpha,$$

wo die überstrichenen Zeichen sich auf das alte Koordinatensystem beziehen. Algebraische Invarianten sind Summen aus Produkten, in denen die ι und ι als einzige variante Faktoren stehen und über die kontragredienten ι und ι paarweise summiert wird⁷⁾. Dabei ist es für die Invarianz gleichgültig, mittels welcher der beiden Produktoperationen 1. und 3. (s. o. S. 699) die Produkte gebildet sind. Die einfachsten Invarianten sind die Dimension $n = \sum \iota \iota$ und der (gemischte) *Einheitstensor*

$$(9) \quad \mathfrak{E} = \sum \iota \times \iota.$$

Ist $\mathfrak{A} \iota \iota \dots \iota$ Koordinate p -ten Ranges des Tensors \mathfrak{A} , so hat der Tensor die *Zerlegung p -ten Ranges*:

$$(10) \quad \mathfrak{A} = \sum \mathfrak{A} \iota \iota \dots \iota \times \iota \times \dots \times \iota \times \iota.$$

Skalare Koordinaten ergeben die *vollständige Zerlegung* des Tensors. Die mit \mathfrak{A} gleichstufigen Glieder dieser Zerlegung sind die Komponenten p -ten Ranges. Die drei algebraischen Grundoperationen sind gerade diejenigen, welche hinreichen, um mittels der Grundvektoren einerseits den Tensor in seine Bestimmungszahlen abzubauen, andererseits ihn wiederum daraus zusammensetzen. Die Koordinaten invarianter Tensoren sind kogredient mit den Produktkomplexen der sie erzeugenden Grundvektoren, daher ebenso wie diese, von erster Transformationsordnung und invariant bei Transformationen der Gruppe T_1 . Die Darstellung eines bei T_1 invarianten Differentialausdrucks durch Koordinaten invarianter Tensoren bedeutet daher die Reduktion desselben bei T_1 .

Ist a ein beliebiger Vektor, so ist bekanntlich die allgemeine (lineare) Vektorübertragung⁸⁾ durch $da = 0$ definiert, wo das invariante Differential d einer unendlich kleinen Verschiebung im Felde entspricht und folgende Beziehungen gefordert werden:

$$(11) \quad da = \sum \frac{\partial a}{\partial \bar{\xi}_\alpha} d\bar{\xi}_\alpha,$$

⁷⁾ Das Summierungszeichen bezieht sich stets auf paarweise gleiche Zeiger, diese mögen nun Grundvektorzeiger oder Ableitungszeiger (hochgeschriebene) sein.

⁸⁾ Siehe z. B. Schouten, a. a. O. S. 62 ff.

$$d(a \pm b) = da \pm db,$$

$$d(pa) = (dp)a + p(da).$$

Hier ist p ein beliebiger Feldskalar und b ein Vektor derselben Art wie a .

Wegen der Zerlegbarkeit aller Vektoren nach den Grundvektoren ist eine solche Vektordifferentiation bekanntlich allgemein definiert, wenn die Ableitungen der Grundvektoren ι und ι in irgendeinem Koordinatensystem durch beliebige Feldfunktionen festgelegt sind. Wir schreiben im folgenden an Stelle des Ableitungszeichens $\frac{\partial(\)}{\partial \xi_e}$ einfach $()^e$. Die Größenkomplexe $\iota^e \kappa$ und $\iota^e \kappa$ sind also die fundamentalen Grundgrößen der allgemeinen Vektorübertragung (gewöhnlich mit Γ_{ι^e} und Γ'_{κ^e} bezeichnet). Sie sind Differentialvarianten von zweiter Transformationsordnung; ihre Transformationsweise ist durch die Kovarianz der ι , die Kontravarianz der ι und die allgemeinen Differentiationsregeln (11) bestimmt. Beliebige fortsetzbare Vektordifferentiationen höherer Ordnung sind nunmehr ebenfalls definiert. Die Koordinaten der Grundvektorableitungen höherer Ordnung $\iota^{\sigma \dots}$ und $\iota^{\sigma \dots}$ sind ganze rationale Kompositionen aus den Fundamentalgrößen und ihren Ableitungen (s. u. S. 703, (19)). $\iota^e \kappa + \kappa^e \iota$ ist Koordinate eines invarianten Tensors dritter Stufe (des Einheitsgradienten): \mathfrak{E}' ,⁹⁾ so daß

$$(12) \quad \kappa^e \iota = \mathfrak{E}' \varrho \iota \kappa - \iota^e \kappa.$$

Wir können daher auch $\iota^e \kappa$ und $\mathfrak{E}' \varrho \iota \kappa$ als fundamentale Grundgrößen ansehen.

Auf Grund der Vektordifferentiation kann in verschiedener Weise eine invariante Differentiation von Tensoren höherer Stufe definiert werden. Ist \mathfrak{A} ein solcher Tensor und sind $\mathfrak{A} \iota \kappa \dots \nu$ seine Bestimmungszahlen, so erhält man bekanntlich eine kovariante Ableitung \mathfrak{A}^e durch Erweiterung in folgender Weise:

$$(13) \quad \mathfrak{A}^e \iota \kappa \dots \nu = (\mathfrak{A} \iota \kappa \dots \nu)^e - \mathfrak{A} \iota^e \kappa \dots \nu - \mathfrak{A} \iota \kappa^e \dots \nu - \dots - \mathfrak{A} \iota \kappa \dots \nu^e.$$

Eine andere kovariante Ableitung erhält man durch reguläres Durchdifferenzieren des vollständig zerlegten Tensors:

$$(14) \quad \mathfrak{A}^e = \sum (\mathfrak{A} \iota \dots \nu)^e \times \nu \times \dots \times \iota \\ + \sum \mathfrak{A} \iota \dots \nu \times \nu^e \times \dots \times \iota + \dots + \sum \mathfrak{A} \iota \dots \nu \times \nu \times \dots \times \iota^e.$$

Die derart entstehenden Gradienten (erster Ordnung)^{9a)} sind Tensoren mit um eins erhöhter Stufe. Der Gradient von \mathfrak{A} wird mit \mathfrak{A}' bezeichnet und es ist also:

$$(15) \quad \mathfrak{A}' = \sum \mathfrak{A}^e \times \varrho, \quad \mathfrak{A}' \varrho = \mathfrak{A}^e.$$

⁹⁾ Schouten, a. a. O. S. 66.

^{9a)} Eine Terminologie, welche den Tensor \mathfrak{A}' von seinen Koordinaten \mathfrak{A}^e , den kovarianten) Ableitungen, unterscheidet, ist um so mehr geboten, als auf Gebilden (s. u. S. 712) der Gradientprozeß die Querrichtung voraussetzt, die Ableitung aber nicht.

Die durch die beiden verschiedenen Definitionen gewonnenen Einheitsgradienten \mathfrak{E}' sind entgegengesetzt gleich. Das Verschwinden von \mathfrak{E}' oder die äquivalenten Beziehungen

$$(16) \quad \iota^e \varkappa = - \varkappa^e \iota$$

haben die Äquivalenz beider Gradientprozesse zur Folge. In beiden Fällen ergibt die Differentiation von Produkten beider Arten zunächst ein Hauptglied, das durch gewöhnliches Durchdifferenzieren der Faktoren entsteht; hinzu treten Zusatzglieder, in die außer den ursprünglichen Faktoren der Einheitsgradient eingeht. Wird letzterer Null, so gilt demnach für die Differentiation allgemein die gewöhnliche Produktregel. Es ist für unsere Überlegungen gleichgültig, welche Art von Gradientbildung gewählt wird. Der Einfachheit halber legen wir im folgenden die zweite Art zugrunde. Bei dieser gilt:

$$(17) \quad \begin{aligned} \mathfrak{E}' \varrho &= \mathfrak{E}^e = \sum \iota^e \times \iota + \sum \iota \times \iota^e, \\ (\mathfrak{A} \mathfrak{b})^e &= \mathfrak{A}^e \mathfrak{b} + \mathfrak{A} \mathfrak{b}^e - \mathfrak{A}(\mathfrak{E}' \varrho \mathfrak{b}). \end{aligned}$$

Aus der ersten dieser Formeln kann man (s. o. (12)) alle Ableitungen $\iota^e \dots$ durch die $\iota^e \dots$ und Gradienten von \mathfrak{E} ausdrücken.

Ist ein beliebiger Ausdruck aus irgendwelchen Tensoren und den Grundvektoren mittels der definierten tensoriellen Zeichen und Operationen erzeugt, so verstehen wir unter seiner *vollständigen Zerlegung* die Darstellung seiner Bestimmungszahlen durch die Bestimmungszahlen jener Tensoren, die fundamentalen Grundgrößen, sowie die Ableitungen dieser beiden Größenarten nach den Punktkoordinaten. Das Verfahren zur Zerlegung in Koordinaten ist natürlich folgendes: Man überschreibt den direkt geschriebenen Ausdruck s -ter Stufe mit s Grundvektoren, so daß seine Bestimmungszahlen entstehen. Hierauf zerlegt man jede nicht-skalare Größe (außer den Grundvektoren), z. B. \mathfrak{A} , in dem Ausdruck vollständig d. h. in ihre Bestimmungszahlen und die Grundvektoren (s. o. S. 701 (10)). An diesem Zerlegungsaggregat werden die Operationen, welche \mathfrak{A} mit anderen Elementen des Ausdrucks verknüpfen, nach den Regeln des Kalküls ausgeführt. Bei Differentiationen von \mathfrak{A} ergeben sich dann Ableitungen der Grundvektoren und der Bestimmungszahlen von \mathfrak{A} . Die ersteren zerlegt man analog unter Einführung der fundamentalen Grundgrößen $\iota^e \varkappa$ und $\iota^e \varkappa$.

Beispiele:

$$(18) \quad (\text{div } \mathfrak{A})_\lambda = \sum \mathfrak{A}^e \varrho_\lambda = \sum (\mathfrak{A}_{\iota^e \varkappa \times \varkappa \times \iota})^e \varrho_\lambda = \sum (\mathfrak{A}_{\varrho \lambda})^e + \sum \mathfrak{A}_{\varrho \varkappa \times \varkappa^e \lambda} + \sum \mathfrak{A}_{\iota^e \lambda \times \iota^e \varrho},$$

$$(19) \quad \begin{aligned} \iota^{e\sigma} \varkappa &= \sum (\iota^e \lambda \times \lambda)^{\sigma} \varkappa = (\iota^e \varkappa)^{\sigma} + \sum \iota^e \lambda \times \lambda^{\sigma} \varkappa, \\ \iota^{e\sigma\tau} \gamma &= \sum (\iota^{e\sigma} \varkappa \times \varkappa)^{\tau} \gamma = (\iota^e \gamma)^{\sigma\tau} + \sum (\iota^e \lambda \times \lambda^{\sigma} \varkappa + (\iota^e \varkappa)^{\sigma}) \times \varkappa^{\tau} \gamma \\ &\quad + \sum \iota^e \lambda \times (\lambda^{\sigma} \gamma)^{\tau} + \sum (\iota^e \lambda)^{\tau} \times \lambda^{\sigma} \gamma. \end{aligned}$$

Die drei invarianten Grundtensoren zweiter, dritter und vierter Stufe:

$$(20) \quad \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \sum \iota \times \iota, \\ \mathfrak{F} \iota \varrho &= \iota^e - \varrho^e, \\ \mathfrak{H} \varrho \sigma \iota &= \iota^{e\sigma} - \iota^{\sigma e}, \end{aligned}$$

sind Fundamentaltensoren, da, wie die folgenden Betrachtungen zeigen, auf sie alle Invarianten mittels des Gradientprozesses und algebraischer Komposition reduziert werden¹⁰). \mathfrak{S} ist der verallgemeinerte Riemannsche Tensor. \mathfrak{F} liefert bekanntlich den Seitenexzeß im kleinen Dreieck¹¹).

Es ist nunmehr unsere Aufgabe, aus den fundamentalen Grundgrößen charakteristische Grundvarianten (s. o. S. 696) zu bilden und mit ihnen die Zerlegung aller varianten Elemente in Kern und Rest zu bewerkstelligen.

5. Die charakteristischen Grundvarianten der allgemeinen Vektorübertragung.

Wir betrachten die fundamentalen Grundgrößen $\iota^\varrho \varkappa$, deren Ableitungen $(\iota^\varrho \varkappa)^{\sigma \dots}$, sowie Größen der Form $\iota^{\varrho \sigma \dots} \varkappa$. Letztere sind ganze rationale Kompositionen aus jenen, in der vereinfachenden unzerlegten vektoriellen Form geschrieben (s. o. S. 703, (19)). Ein System von Größen $(\iota^\varrho \varkappa)^{\sigma \dots}$ oder von Größen $\iota^{\varrho \sigma \dots} \varkappa$ heiße *permutationsfrei* (bezüglich der $\iota, \varrho, \sigma, \dots$; \varkappa kommt nicht in Betracht), wenn nicht zwei Elemente darin vorkommen, von denen das eine durch Permutation der $\iota, \varrho, \sigma, \dots$ aus dem anderen hervorgeht. Ein permutationsfreies System wird *vollständig* heißen, wenn bei einer festen Höchstordnung der zugelassenen Ableitungen alle Indexkombinationen der $\iota, \varrho, \sigma, \dots$ einmal vertreten sind. Die Transformationsordnung einer Größe $(\iota^\varrho \varkappa)^{\sigma \dots}$ oder $\iota^{\varrho \sigma \dots} \varkappa$ ist, da ι von erster, ι^ϱ also von zweiter Ordnung ist usw., gleich der Anzahl der Zeiger $\iota, \varrho, \sigma, \dots$.

Eine einfache Überlegung zeigt nun, daß ein vollständiges permutationsfreies System von der Höchstordnung p sowohl aus Größen $(\iota^\varrho \varkappa)^{\sigma \dots}$ wie aus Größen $\iota^{\varrho \sigma \dots} \varkappa$ ein System $A_{T_1}^{(p)}$ ist. Wir wählen das letztere System, weil es wegen der vektoriellen unzerlegten Schreibweise die zugehörige Kernbildung vereinfacht.

Das Bedingungssystem $B_{T_1}(\iota^{(p)})$ (s. o. S. 693) ist:

$$(21) \quad (\bar{\xi}_\varkappa)' = \frac{\partial \bar{\xi}_\varkappa}{\partial \xi_\iota} = \begin{cases} 0, & \iota \neq \varkappa \\ 1, & \iota = \varkappa \end{cases}$$

¹⁰) Unter Fundamentaltensoren des Raumes oder eines Gebildes im Raume verstehen wir unabhängige Tensoren von der Art, daß sich aus den Bestimmungszahlen dieser Tensoren und ihrer Gradienten beliebiger Ordnung alle skalaren Differentialinvarianten und Bestimmungszahlen aller invarianten Differentialformen, die durch die Grundbestimmung des Raumes und die Eigengestalt des Gebildes gegeben sind, rein algebraisch d. h. ohne weitere Differentiation komponieren lassen. Auf Gebilden werden dabei sowohl die mit den inneren wie die mit den äußeren Grundvektoren gebildeten Bestimmungszahlen zugelassen (s. u. S. 712).

¹¹) Siehe Schouten a. a. O., S. 67, wo \mathfrak{F} mit $2S_{\lambda\mu}^{\dots p}$ bezeichnet ist.

Das System der Bestimmungszahlen eines vollständigen permutationsfreien Systems aus Ableitungen von Grundvektoren erster Art bis zur $(p-1)$ -ten Ordnung ist ein System $A_{T_1}^{(p)}$ d. h. ein in p -ter Ordnung charakteristisches System von Grundvarianten bei der Gruppe T_1 . Es setzt sich rational und ganz zusammen aus den fundamentalen Grundgrößen der allgemeinen Vektorübertragung und deren Ableitungen von nicht höherer als $(p-2)$ -ter Ordnung.

Mit diesen $A_{T_1}^{(p)}$ können wir nunmehr alle Differentialvarianten bis zur p -ten Ordnung und Funktionen aus ihnen in Kern und Rest zerlegen. Dabei brauchen wir, wie wir sehen werden, in unserem speziellen Falle, wo die Stammgrößen Tensoren sind, nicht den allgemeinen Eliminationsprozeß der $t^{(p)}$ (s. o. S. 693) durchzuführen, sondern können durch den Gradientenprozeß und direkte Einführung der \mathfrak{E} , \mathfrak{F} , \mathfrak{S} unmittelbar die Kernbildung vornehmen.

6. Kernbildung mit den Grundvarianten der allgemeinen Vektorübertragung.

Wir betrachten eine beliebige Funktion φ von skalaren Größen der Form $\mathfrak{A}\iota\kappa\dots\nu$, $\iota^e\kappa$, $\iota^e\kappa$ und Ableitungen derselben nach den ξ_i . Die $\mathfrak{A}\iota\kappa\dots\nu$ sind bei T_1 invariant, ihre Ableitungen indessen nicht. Diese werden unter Auffassung der $\mathfrak{A}\iota\kappa\dots\nu$ als Überschiebungsprodukte von \mathfrak{A} mit den Grundvektoren nach den Regeln (17), S. 703, ausgeführt. Dadurch drücken sich alle $(\mathfrak{A}\iota\kappa\dots\nu)^{\iota^e\sigma\dots}$ aus als Aggregate von Überschiebungsprodukten aus den invarianten \mathfrak{A} , \mathfrak{A}' , \mathfrak{A}'' , ..., den Einheitsgradienten \mathfrak{E}' , \mathfrak{E}'' , ..., den bei T_1 invarianten Grundvektoren ι , ι und den $\iota^e\dots$ und $\iota^e\dots$. Die $(\iota^e\kappa)^{\sigma\dots}$ und $(\iota^e\kappa)^{\sigma\dots}$ werden in analoger Weise durch die Grundvektoren und die $\iota^e\sigma\dots$ und $\iota^e\sigma\dots$ dargestellt. In dieser Form enthält φ als einzige bei T_1 variante Elemente, die $\iota^e\sigma\dots$ und $\iota^e\sigma\dots$. Die letzteren drücken sich durch die ersteren und die \mathfrak{E}' , \mathfrak{E}'' , ... aus, so daß die $\iota^e\sigma\dots$ die einzigen varianten Elemente in φ sind. Die Kernbildung von φ wird dadurch bewirkt, daß man in φ die $\iota^e\sigma\dots$ durch ihre Kerne ersetzt (s. o. S. 690), so daß auf die Bildung der letzteren alles hinausläuft.

Wir wählen $A_{T_1}^{(p)}$ so, daß p der Transformationsordnung der höchsten in φ vorkommenden Ableitung $\iota^e\sigma\dots$ gleich ist. Es seien nun $\iota^{\iota'e'\sigma'\tau'}\dots\kappa$ die Koordinaten einer beliebigen in φ vorkommenden Grundvektorableitung. Dann gibt es in $A_{T_1}^{(p)}$ Elemente $\iota^e\sigma\tau\dots\kappa$, welche Koordinaten eines Vektors $\iota^e\sigma\tau\dots$ sind, der sich von $\iota^{\iota'e'\sigma'\tau'}\dots\kappa$ nur durch Permutation der Zeiger unterscheidet. Dann ist:

$$(23) \quad \iota^{\iota'e'\sigma'\tau'}\dots = \iota^e\sigma\tau\dots - w^{\iota'e\sigma\tau}\dots, \quad w^{\iota'e\sigma\tau}\dots = \iota^e\sigma\tau\dots - \iota^{\iota'e'\sigma'\tau'}\dots,$$

$w^{\iota'e\sigma\tau}\dots$ ist eine wirbelartige Bildung, welche sich in Teilwirbel zerlegt,

die durch Transposition *benachbarter* Indizes sich ergeben. Unter diesen sind drei Formen zu unterscheiden:

$$(24) \quad 1. \iota^{\rho\sigma\tau\dots} - \rho^{\iota\sigma\tau\dots}, \quad 2. \iota^{\rho\sigma\tau\dots} - \iota^{\sigma\rho\tau\dots}, \quad 3. \iota^{\dots\lambda\rho\sigma\tau\dots} - \iota^{\dots\lambda\sigma\rho\tau\dots}.$$

Bei 3. stehen die Transpositionen nicht an erster oder zweiter Stelle wie bei 1. und 2. *Wesentlich ist nun, daß infolge der Grundforderungen (11), S. 701 f., für die Vektordifferentiation sich 3. auf 2. zurückführen läßt gemäß:*

$$(25) \quad \iota^{\dots\lambda\rho\sigma\tau\dots} - \iota^{\dots\lambda\sigma\rho\tau\dots} = \sum \iota^{\dots\lambda\zeta} \times (\zeta^{\sigma\rho\tau\dots} - \zeta^{\rho\sigma\tau\dots}).$$

In die Wirbel der Formen 1. und 2. kann man aber \mathfrak{F} und \mathfrak{H} (s. o. S. 703) unmittelbar einführen:

$$(26) \quad \iota^{\rho\sigma\tau\dots} - \rho^{\iota\sigma\tau\dots} = (\mathfrak{F}\iota\rho)^{\sigma\tau\dots}, \quad \iota^{\rho\sigma\tau\dots} - \iota^{\sigma\rho\tau\dots} = (\mathfrak{H}\rho\sigma\iota)^{\tau\dots}.$$

Die Ausführung der Differentiationen an diesen vektoriellen Überschiebungen von \mathfrak{F} und \mathfrak{H} mit den Grundvektoren ergibt Aggregate aus \mathfrak{F} , \mathfrak{H} ; \mathfrak{E}' , \mathfrak{F}' , \mathfrak{H}' ; \mathfrak{E}'' , \mathfrak{F}'' , \mathfrak{H}'' ; usw. und Grundvektorableitungen von niedrigerer Ordnung als die ursprüngliche von $\iota^{\rho\sigma\tau\dots}$. Somit drückt sich diese letztere Größe durch ein Element aus $\Lambda_{T_1}^{(p)}$, Grundvektorableitungen niedrigerer Ordnung und die Fundamentaltensoren \mathfrak{E} , \mathfrak{F} , \mathfrak{H} und deren Gradienten aus. Mit den noch vorkommenden Grundvektorableitungen niedrigerer Ordnung verfährt man ebenso, bis alle nicht in $\Lambda_{T_1}^{(p)}$ enthaltenen $\iota^{\rho\sigma\tau\dots}$ durch die $\Lambda_{T_1}^{(p)}$ und die \mathfrak{E} , \mathfrak{F} , \mathfrak{H} sowie deren Gradienten eliminiert sind.

Die sich so ergebende Komposition für $\iota^{\rho\sigma\tau\dots}$ (bzw. für die Bestimmungszahlen $\iota^{\rho\sigma\tau\dots}$) ist ein Aggregat von Produkten aus $\Lambda_{T_1}^{(p)}$, \mathfrak{F} , \mathfrak{H} und Gradienten von \mathfrak{E} , \mathfrak{F} , \mathfrak{H} , sowie den bei T_1 invarianten Grundvektoren. Diejenigen Produkte, welche keinen Faktor aus $\Lambda_{T_1}^{(p)}$ enthalten, sind daher bei T_1 invariant, die übrigen aber verschwinden mit den $\Lambda_{T_1}^{(p)}$. Also bilden diese letzteren den Rest, die ersteren den invarianten Kern.

Somit gilt der Reduktionssatz der allgemeinen Vektorübertragung:

Ist $\varphi(\Omega)$ eine Invariante bei T_1 , so ist sie mit ihrem Kern identisch und hat daher eine reduzierte Form aus den in Ω stehenden Stamm-tensoren und deren Gradienten, sowie den Fundamentaltensoren \mathfrak{E} , \mathfrak{F} , \mathfrak{H} und deren Gradienten.

Die Höchstordnung der Gradienten bestimmt sich durch die höchste Transformationsordnung der in φ ursprünglich vorhandenen varianten Elemente. Erst nach Adjunktion von \mathfrak{E} , \mathfrak{F} , \mathfrak{H} zum Stammsystem erzeugt also der Gradientprozeß allein die invarianten Tensoren, aus denen sich alle Differentialinvarianten rein algebraisch (projektiv) zusammensetzen lassen.

7. Beispiele. Reduzierte Differentiation.

Wir erläutern zunächst an drei sehr einfachen Beispielen die *Verwendung der Kernbildung als Invarianzkriterium*.

Zu untersuchen ist die Invarianz der Rotation

$$(27) \quad (\text{rot } \mathfrak{A})_{\iota\kappa} = (\mathfrak{A}_{\iota})^{\kappa} - (\mathfrak{A}_{\kappa})^{\iota}.$$

Durch Ausdifferenzieren und Einführung von \mathfrak{E} und \mathfrak{F} hat man:

$$(\mathfrak{A}'_{\kappa\iota} - \mathfrak{A}'_{\iota\kappa}) - \mathfrak{A}(\mathfrak{E}'_{\kappa\iota} - \mathfrak{E}'_{\iota\kappa}) + \mathfrak{A}(\mathfrak{F}_{\iota\kappa}).$$

Ein Rest tritt nicht auf, so daß Invarianz bei T_1 und Tensorcharakter vorliegt. Die in die einzelnen Glieder eingehenden $\iota^e\kappa$, $\iota^e\kappa$ fungieren lediglich als variante Scheinargumente, von denen die Rotation tatsächlich unabhängig ist.

Desgleichen untersuche man:

$$(28) \quad \text{cycl. } (\mathfrak{A}_{\iota\kappa})^{\lambda} = (\mathfrak{A}_{\iota\kappa})^{\lambda} + (\mathfrak{A}_{\lambda\iota})^{\kappa} + (\mathfrak{A}_{\kappa\lambda})^{\iota}.$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \text{cycl. } (\mathfrak{A}_{\iota\kappa})^{\lambda} &= \text{cycl. } \mathfrak{A}'_{\lambda\iota\kappa} - \text{cycl. } \mathfrak{A}(\mathfrak{E}'_{\lambda\iota})_{\kappa} - \text{cycl. } \mathfrak{A}_{\iota}(\mathfrak{E}'_{\lambda\kappa}) \\ &\quad + \text{cycl. } (\mathfrak{A}_{\iota^{\lambda}\kappa} + \mathfrak{A}_{\iota\kappa^{\lambda}}), \\ \text{cycl. } \mathfrak{A}_{\iota\kappa^{\lambda}} &= \text{cycl. } \mathfrak{A}_{\kappa\lambda^{\iota}} = \text{cycl. } \mathfrak{A}_{\kappa\iota^{\lambda}} + \text{cycl. } \mathfrak{A}_{\kappa}(\mathfrak{F}_{\lambda\iota}). \end{aligned}$$

Nachdem so die vorkommenden ι^{λ} , κ^{λ} permutationsfrei gemacht sind, kommt als Rest:

$$\text{cycl. } (\mathfrak{A}_{\iota^{\lambda}\kappa} + \mathfrak{A}_{\kappa\iota^{\lambda}}).$$

Dieser Rest verschwindet dann und nur dann identisch in den ι^{λ} und κ , wenn \mathfrak{A} antisymmetrisch ist.

Man untersuche desgleichen $(\mathfrak{A}_{\iota})^e - (\mathfrak{A}_{\rho})^{\iota}$. Die Zerlegung ergibt als Rest:

$$\mathfrak{A}_{\iota^e} - \mathfrak{A}_{\rho^{\iota}} = \sum \mathfrak{A}_{\kappa} \times (\iota^e\kappa - \rho^{\iota}\kappa) = - \sum \mathfrak{A}_{\kappa} \times (\kappa^e\iota - \kappa^{\iota}\rho),$$

wo κ^{ι} und κ^e permutationsfrei sind. Dieser Rest verschwindet nicht identisch in den κ^{ι} und κ^e . Also hat $(\mathfrak{A}_{\iota})^e - (\mathfrak{A}_{\rho})^{\iota}$ nicht Tensoreigenschaft¹²⁾.

Nach dem Bisherigen können nach Adjunktion der \mathfrak{E} , \mathfrak{F} , \mathfrak{G} zu den Stammtensoren alle Differentialinvarianten gebildet werden durch Gradientprozeß und rein algebraische Komposition (worunter hier jede Komposition einer Größe aus Koordinaten von Tensoren ohne Differentiationsprozeß verstanden werden soll). Die algebraische Komposition enthält als variante

¹²⁾ Ist der vorgelegte Differentialausdruck $\varphi(\Omega)$ unabhängig von $\iota^e\kappa$ und $\iota^e\kappa$, so kann man trotzdem den Gradientprozeß formal handhaben und mit ihm die Invarianzuntersuchung machen, wobei man die Grundbestimmung stets durch die Voraussetzungen $\mathfrak{E}' = \mathfrak{F} = \mathfrak{G} = 0$ spezialisiert denken kann. In ähnlicher Weise kann man auf Gebilden (s. u. Teil III) eine beliebige Querrichtung als formale Hilfskonstruktion annehmen, um vorgelegte Differentialausdrücke zu untersuchen, obgleich diese von der Auszeichnung einer Querrichtung unabhängig sein mögen.

Grundelemente nur die Grundvektoren ι und ι' . Sei nun eine bei T_0 invariante Größe $\varphi(A, \iota, \iota')$ dieser Art gegeben, wo A die vorkommenden invarianten Elemente symbolisiere. Dann ist φ^e eine bei T_0 kovariante und bei T_1 invariante Ableitung. Die Ausführung des Differentiationsprozesses an φ wird aber außer Gradienten A' auch Ableitungen ι^e und ι'^e ergeben, so daß nach der Differentiation keine reduzierte Form mehr vorliegt. Es ist aber erwünscht, in reduzierten Formen rechnen zu können, da diese als Normalformen fungieren und durch die Abwesenheit der nicht tensoriellen Elemente $\iota^e \dots, \iota'^e \dots$ die Struktur und Invarianz der Kompositionen einfacher hervortreten lassen. Für die Herstellung reduzierter Formen gilt das Prinzip: Enthält eine invariante Funktion nur frei variierende Elemente, so können diese in ihr annulliert werden. Es sei nun φ^e eine Komposition der Form $\psi(A, A', \iota, \iota', \iota^e, \iota'^e)$. Man denke sich die ι'^e durch die ι^e und \mathfrak{G}' ausgedrückt:

$$\iota'^e = \mathfrak{G}' \varrho \cdot \iota - \sum \lambda^e \iota \times \lambda,$$

so daß man erhält:

$$\psi(A, A', \iota, \iota', \iota^e, (\mathfrak{G}' \varrho \cdot \iota - \sum \lambda^e \iota \times \lambda)).$$

Alle in dieser Komposition auftretenden ι^e und λ^e haben denselben Zeiger ϱ . Sie sind deshalb ein permutationsfreies System. Andere bei T_1 variierende Elemente kommen nicht vor. Da die permutationsfreien ι^e, λ^e bei T_1 frei variant sind, da ferner ψ bei T_1 invariant ist, so können in ψ die ι^e direkt annulliert werden. Hieraus folgt die Regel der *reduzierten Differentiation*: Ist $\varphi(A, \iota, \iota')$ eine Invariante und daher φ^e eine kovariante Ableitung, so kann man bei Ausführung der Differentiation die ι als konstant ansehen und die entstehenden ι^e durch $\mathfrak{G}' \varrho \cdot \iota$ ersetzen, so daß man sogleich die reduzierte Form des Ergebnisses erhält. Damit ist gleichzeitig bewiesen, daß bei beliebiger Anwendung der kovarianten Ableitung und rein algebraischer Prozesse zwar \mathfrak{G}' , niemals aber einer der Wirbel \mathfrak{F} und \mathfrak{H} neu eingeführt werden kann. Die $\mathfrak{G}, \mathfrak{F}, \mathfrak{H}$ sind demnach nicht aufeinander reduzierbar mittels des Gradientenprozesses.

Um die Anwendung der reduzierten Differentiation an einem einfachen Beispiel zu zeigen, leiten wir die tensorielle Verallgemeinerung der elementaren Vektorformel:

$$\text{rot rot } \mathfrak{a} = \text{grad div } \mathfrak{a} - \text{div grad } \mathfrak{a}$$

ab. Und zwar der Einfachheit wegen für den gewöhnlichen Riemannschen Raum ($\mathfrak{G}' = \mathfrak{F} = 0$). Die allgemeine rot ist definiert durch:

$$(\text{rot } \mathfrak{A})_{\iota^e} = (\mathfrak{A}_{\iota'})^e - (\mathfrak{A}_{\iota'})^e,$$

die allgemeine div durch:

$$\text{div } \mathfrak{A} = \sum \mathfrak{A}^e_{\varrho} = \sum \mathfrak{A}'^e_{\varrho}.$$

Sieht man von der bekanntlich invariantentheoretisch inkorrekten und nur im drei-

dimensionalen Gebiet möglichen Identifizierung einer Vektorrotation mit einem Vektor ab, so ist die gewöhnlich mit rot rot bezeichnete Invariante $-\text{div rot}$. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathfrak{A} &= \sum (\mathfrak{A}'_{\iota\kappa} - \mathfrak{A}'_{\kappa\iota}) \times \times \iota, \\ \text{div rot } \mathfrak{A} &= \sum ((\mathfrak{A}'_{\iota\kappa} - \mathfrak{A}'_{\kappa\iota}) \times \times \iota) \epsilon_{\rho}.\end{aligned}$$

Die reduzierte Differentiation liefert für den letzteren Ausdruck:

$$\text{div rot } \mathfrak{A} = \sum (\mathfrak{A}''_{\epsilon\rho\kappa} - \mathfrak{A}''_{\rho\kappa\epsilon}) \times \times = \sum \mathfrak{A}''_{\epsilon\rho} - \sum \mathfrak{A}''_{\rho\kappa\epsilon} \times \times.$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned}\text{div grad } \mathfrak{A} &= \sum (\mathfrak{A}'_{\iota} \times \iota) \epsilon_{\rho}, \\ \text{grad div } \mathfrak{A} &= \sum (\mathfrak{A}'_{\rho\epsilon}) \times \times \kappa,\end{aligned}$$

und durch reduzierte Differentiation:

$$\begin{aligned}\text{div grad } \mathfrak{A} &= \sum \mathfrak{A}''_{\rho\epsilon}, \\ \text{grad div } \mathfrak{A} &= \sum \mathfrak{A}''_{\rho\kappa\epsilon} \times \times.\end{aligned}$$

Also:

$$(29) \quad \begin{aligned}\text{div rot } \mathfrak{A} &= \text{div grad } \mathfrak{A} - \text{grad div } \mathfrak{A} + \sum (\mathfrak{A}''_{\rho\kappa\epsilon} - \mathfrak{A}''_{\epsilon\rho\kappa}) \times \times \\ &= \sum (\mathfrak{A}''_{\rho\kappa\epsilon} - \mathfrak{A}''_{\epsilon\rho\kappa}) \times \times = \sum (\text{rot grad } \mathfrak{A})_{\rho\epsilon}.\end{aligned}$$

rot grad \mathfrak{A} ist, wie die vollständige Zerlegung von \mathfrak{A} lehrt, eine Überschiebung von \mathfrak{A} mit dem Riemannschen Tensor \mathfrak{S} und verschwindet mit diesem.

Die relativistische Elektrodynamik formt bekanntlich die Maxwell'schen Gleichungen mit Hilfe eines vierdimensionalen Vektorpotentials \mathfrak{f} , eines schiefsymmetrischen Feldtensors \mathfrak{F} und eines vierdimensionalen Stromvektors \mathfrak{s} zunächst um zu:

$$\text{div grad } \mathfrak{f} = \mathfrak{s}, \quad \text{rot } \mathfrak{f} = \mathfrak{F}, \quad \text{cycl. } (\mathfrak{F}_{\iota\kappa})^2 = 0, \quad \text{div } \mathfrak{f} = 0.$$

Die erste Gleichung ist die retardierte Potentialgleichung und schreibt sich in einem orthogonalen Koordinatensystem:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{f}_i}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{f}_i}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{f}_i}{\partial \xi_3^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{f}_i}{\partial t^2} = \mathfrak{s}_i.$$

An ihr ist die Lorentz-Invarianz unmittelbar erkennbar, und sie ist der eigentliche Ausgangspunkt der ganzen Theorie. Nun gibt aber die Relativitätstheorie die endgültige Feld-Strom-Gleichung in der Form:

$$(30) \quad \text{div } \mathfrak{F} = \text{div rot } \mathfrak{f} = \mathfrak{s}.$$

Der Zusammenhang dieser Formel mit der retardierten Potentialgleichung wird erst, wie mir scheint, durch die obige Zerlegung (29) von div rot deutlich. Da $\text{div } \mathfrak{f} = 0$, so wird, wenn $\mathfrak{S} = 0$, $\text{div grad } \mathfrak{f} = \text{div rot } \mathfrak{f}$. Liegt aber Gravitation vor, so ist die retardierte Potentialgleichung nicht mehr äquivalent mit (30). Es tritt vielmehr ein Glied hinzu, das den Einfluß der Raumkrümmung auf die Potentialgleichung zum Ausdruck bringt.

III. Teil. Tensorfelder auf Gebilden.

8. Tensoroperationen auf Gebilden.

Wir betrachten in diesem Teile vektorielle und tensorielle Größenfelder, die auf *Gebilden* definiert sind, und aus denen *durch den im Raume*

vorgegebenen Ableitungsprozeß Differentialinvarianten erzeugt werden. Zunächst stellen wir wiederum kurz bekannte Elemente der allgemeinen tensoriellen Differentialgeometrie in besonderer Form zusammen¹³⁾.

Die (inneren) Koordinaten *in* dem im Vollraum R_n liegenden Gebilde (Kurve, Fläche usw.) R_m ($m < n$) werden von nun an mit ξ_i, ξ_x, \dots bezeichnet (griechische bis m laufende Zeiger), die Koordinaten *im* vollen Raume R_n und *auf* R_m (äußere Koordinaten) mit ξ_h, ξ_k, \dots (lateinische bis n laufende Zeiger). Das Gebilde sei analytisch regulär, so daß die $(\xi_h)^{i\dots}$ bis zu beliebiger Ordnung bestimmte endliche Werte haben. In unseren Betrachtungen treten nunmehr an Stelle der äußeren mit h, j, k, \dots zu bezeichnenden Grundvektoren die inneren $\iota, \varkappa, \lambda, \dots$, die zu den inneren Koordinaten $\xi_i, \xi_x, \xi_\lambda, \dots$ in R_m gehören. Diese ι sind Verschiebungsvektoren auch im vollen (n -dimensionalen) Raume und haben die äußeren Koordinaten: $\iota_h = (\xi_h)^i$. Bestimmungszahlensysteme mit griechischen Zeigern ($\mathfrak{A}_{\iota\varkappa\dots}, \mathfrak{B}_{\iota\varkappa\dots}, \mathfrak{C}_{\iota\varkappa\dots}$) bestimmen bekanntlich nur dann Tensoren im Vollraum, d. h. sie liefern nur dann mit beliebigen, durch irgendwelche äußere Koordinaten gegebenen, auf R_m stationierten Vektoren in R_n bestimmte Formwerte, wenn sie von der zweiten Art, und also die griechischen Zeiger unterpunktirt sind. So hat man z. B. als Überschiebung von $\mathfrak{A}_{\iota\varkappa}$ mit den Vektoren \varkappa, η : $\sum \mathfrak{A}_{\iota\varkappa}(\varkappa_h)(\eta_j)(j\varkappa)$, so daß:

$$\mathfrak{A}_{hj} = \sum (\mathfrak{A}_{\iota\varkappa} \times \varkappa \times \iota)_{hj} = \sum \mathfrak{A}_{\iota\varkappa}(\iota_h)(\varkappa_j)$$

die äußeren Koordinaten des durch $\mathfrak{A}_{\iota\varkappa}$ bestimmten Tensors sind. Die Vektoren ι sind als Vektoren im Vollraum R_n erst dann definiert, wenn ein $(n-m)$ -dimensionales Kontinuum nicht-tangentialem Verschiebungsvektoren invariant ausgezeichnet ist. Bilden nämlich q_1, q_2, \dots, q_{n-m} eine Basis dieses pseudonormalen oder, wie wir lieber sagen wollen, *quergerichteten* Kontinuums, so sind die ι als Vektoren zweiter Art im Vollraum definierbar durch:

$$\iota_\varkappa = \begin{cases} 0, & \iota \neq \varkappa \\ 1, & \iota = \varkappa \end{cases}, \quad \iota q_r = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, (n-m)).$$

Jetzt erst definieren auch Koeffizientensysteme mit nicht punktierten griechischen Zeigern n -dimensionale Tensoren gemäß:

$$\mathfrak{A} = \sum \mathfrak{A}_{\iota\varkappa} \times \varkappa \times \iota.$$

Den durch die $(n-m)$ -dimensionale Querrichtung definierten Tensor

$$(31) \quad \mathfrak{R} = \sum \iota \times \iota$$

nennen wir Richtungstensor von R_m . Die kovariante Ableitung \mathfrak{A}^e eines (n -dimensionalen) Tensors \mathfrak{A} ist von der Querrichtung unabhängig und

¹³⁾ S. z. B. Schouten, a. a. O. S. 136 ff., 173 ff., 183 ff.

lediglich durch die Übertragung im Vollraum definiert auf Grund der vollständigen Zerlegung von \mathfrak{A} :

$$\mathfrak{A}^e = \sum (\mathfrak{A} \dots h \times h \times \dots)^e = \sum (\mathfrak{A} \dots h)^e \times h \dots \sum + \mathfrak{A} \dots h \times h^r \frac{\partial \xi_r}{\partial \xi_q} \times \dots$$

Dagegen setzt der zugehörige *Gradient längs* R_m , den wir mit \mathfrak{A}' bezeichnen, die Querrichtung voraus; denn er ist definiert durch:

$$(32) \quad \mathfrak{A}' = \sum \mathfrak{A}^e \times e.$$

Alle Formen, ganz gleich durch welche Art von Bestimmungszahlen sie ursprünglich definiert sind, können nunmehr als Tensoren im Vollraum, die auf R_m verteilt sind, angesehen werden; sie haben äußere Koordinaten und gestatten die soeben angegebene (äußere) Gradientbildung längs R_m , welche wiederum auf Vollraumtensoren führt. Formen, die durch innere Bestimmungszahlen (griechische Zeiger) gegeben sind, lassen, wenn eine innere Maßbestimmung $G_{\iota\kappa}$ existiert, einen inneren Ableitungs- und Gradientenprozeß zu mit Hilfe der aus den $(G_{\iota\kappa})^e$ gebildeten Christoffelschen Symbole. Diesen inneren Gradient- und Ableitungsprozeß machen wir dadurch kenntlich, daß wir seine Zeiger in Klammern einschließen: $(\)^{(\iota)}$, $(\)^{(\kappa)}$. An jedem Tensor können durch Überschiebung sowohl mit den h, h , als auch mit den ι, ι Koordinaten verschiedener Stufe gebildet werden¹⁴). Die Eigenschaft von Tensoren, an einer Argumentstelle tangential (oder querrichtet) zu sein, ist natürlich dadurch definiert, daß der Tensor, an dieser Stelle mit einem querrichteten (oder tangentialen) Vektor überschoben, verschwindet. Die (tensorielle) Tangentialkomponente eines Tensors \mathfrak{A} auf R_m ist: $\sum \mathfrak{A}_{\iota\kappa} \dots r \times r \times \dots \times \iota \times \iota$. Aus \mathfrak{A} ergeben sich Tensoren, die in R_m mit \mathfrak{A} äquivalent und an gewissen Argumentstellen tangential sind, durch Überschiebungen von \mathfrak{A} mit \mathfrak{R} . Die Tangentialkomponente eines Vektors α ist $\mathfrak{R}\alpha$.

9. Charakteristische Grundvarianten, Kernbildung und Reduktion auf Gebilden.

Die invariantentheoretischen Betrachtungen im vollen Raume beruhen auf der Ko- und Kontravarianz der h und h und auf der sich aus den Differentiationsregeln ergebenden Varianzart ihrer Ableitungen. Da in dieser Hinsicht die entsprechenden Größen ι, ι auf R_m sich gleich verhalten, so übertragen sich die früheren Aufstellungen mit Leichtigkeit auf die Varianten und Invarianten, welche mit den ι und ι von R_m und dem Differentiationsprozeß längs der ξ_e auf R_m gebildet sind.

¹⁴) Man beachte die Existenz verschiedener Arten von Bestimmungszahlen insbesondere bei der Definition der Fundamentaltensoren o. S. 704 Fußnote und u. S. 718.

Zunächst liefern die Transformationsgleichungen für ein permutationsfreies System $\iota^{\sigma\tau\dots}$ die freie Varianz dieser Vektoren in *tangentialer* Richtung. Die Querrichtung bzw. ι definiert für die im allgemeinen aus R_m herauspringenden $\iota^{\sigma\tau\dots}$ bestimmte tangentialen Komponenten $\mathfrak{R}\iota^{\sigma\tau\dots}$, deren Bestimmungszahlen $\iota^{\sigma\tau\dots}\kappa$ daher frei variant sind. Diese freie Varianz ist von der Wahl der Querrichtung unabhängig. Die permutationsfreien Größen $\iota^{\sigma\tau\dots}\kappa$ sind nunmehr die charakteristischen Grundvarianten für das Koordinatensystem von R_m und haben dieselben Eigenschaften wie die analogen Größen im vollen Raum.

Es seien nun beliebige Stammtensordfelder auf R_m mit beliebigen Arten von Bestimmungszahlen gegeben, überdies die fundamentalen Grundgrößen der Vektorübertragung im vollen Raum und \mathfrak{R} . \mathfrak{R} ist dabei analytisch bestimmt zu denken durch die Funktionensysteme ι^h und ι_h , von denen das erste durch die Gebildegleichungen (in Parameterform), das zweite durch die Querrichtung bestimmt ist. Aus diesen Größen und ihren Ableitungen nach den ξ_i , welche zusammen das Variantensystem Ω bilden, werden nun beliebige Ausdrücke $\varphi(\Omega)$ erzeugt, und es ist die Aufgabe, deren Kerne mit den $A_{T_1}^{(p)}$ zu bilden. Genau wie oben (s. S. 706 ff.) reduziert sich die Betrachtung auf die Kernbildung an den Grundvektorableitungen. Deren gibt es jetzt, da außer den ι, ι auch noch die h, h vorkommen können, vier Arten:

$$\iota^{e\dots}, \iota^e, h^{e\dots}, h^e.$$

Die beiden letzten sind durch die Kernbildung im vollen Raum erledigt, da sie sich durch die Grundvektorableitungen h^r und h_r nach der Kettenregel ausdrücken:

$$h^e = \sum h^r (\iota^r \varrho).$$

Die h^r und h_r eliminieren sich durch die Größen $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{H}$ des vollen Raumes und deren Gradienten längs R_m . Es bleiben also nur noch die $\iota^{e\dots}, \iota^e$.

Für die ι^e hat man:

$$(33) \quad \iota^e = \mathfrak{R}' \varrho \cdot \iota - \sum \kappa^e \iota \times \kappa,$$

wo \mathfrak{R}' , der äußere Krümmungstensor von R_m , die analoge Rolle spielt wie oben \mathfrak{E}' . Auf Grund dieser Beziehung eliminieren sich die $\iota^{e\dots}$ durch die $\iota^{e\dots}$, \mathfrak{R} und seine Gradienten.

Für die Kernbildung an den $\iota^{e\dots}$ ergibt sich gegenüber den Verhältnissen im Vollraum folgender Unterschied. Zunächst spaltet sich von ι^e eine Querkomponente ab, die Tensorcharakter hat. Nämlich wegen $\iota = \mathfrak{R}\iota$ hat man:

$$(34) \quad \iota^e = (\mathfrak{R}\iota)^e = \mathfrak{R}' \varrho \iota - \mathfrak{R}(\mathfrak{E}' \varrho \iota) + \mathfrak{R} \iota^e.$$

Das letzte Glied ist Tangentialkomponente, so daß die beiden ersten die Querkomponente bilden, die sich, wenn $\mathfrak{C}' = 0$, auf $\mathfrak{R}' \varrho \iota$ reduziert. Bei weiterer Differentiation von ι^e ergeben sich Aggregate, die \mathfrak{R} , \mathfrak{R}' , \mathfrak{R}'' , ... und \mathfrak{C}' , \mathfrak{C}'' , ... enthalten und überdies Tangentialkomponenten $\mathfrak{R} \iota^{\sigma\tau\dots}$. Diese Tangentialkomponenten hat man nun in analoger Weise wie oben S. 706f. durch die permutationsfreien $A_{T_1}^{(p)}$ auszudrücken, wobei sich die Analoga der \mathfrak{F} und \mathfrak{S} einführen, nämlich die Tensoren mit den vektoriellen Koordinaten:

$$\iota^e - \varrho^e, \quad \iota^{\sigma e} - \iota^{\sigma e}.$$

Diese Tensoren sind nun aber, wie eine triviale Ausrechnung lehrt, nichts anderes als Tangentialkomponenten der \mathfrak{F} und \mathfrak{S} des Vollraumes. Sie und ihre Gradienten sind daher durch die \mathfrak{F} , \mathfrak{S} , deren Gradienten und \mathfrak{R} und seine Gradienten ausdrückbar. Die Darstellung beliebiger $\iota^{\sigma\tau\dots}$ durch die Größen eines permutationsfreien Systems führt also keine neuen Fundamentaltensoren ein. Vielmehr treten zu \mathfrak{C} , \mathfrak{F} , \mathfrak{S} des Vollraums nur noch \mathfrak{R} und seine Gradienten.

Auf diese Art erhält man den Reduktionssatz:

Beliebige Ausdrücke $\varphi(\Omega)$ haben Kerne, die sich aus den mit den h, h und ι, ι gebildeten Bestimmungszahlen der Stammtensoren und ihrer Gradienten längs R_m und der Tensoren \mathfrak{C} , \mathfrak{F} , \mathfrak{S} , \mathfrak{R} und deren Gradienten komponieren. \mathfrak{C} , \mathfrak{F} , \mathfrak{S} , \mathfrak{R} sind also die Fundamentaltensoren.

Demnach müssen alle Differentialinvarianten auf Gebilden auf reduzierte Normalformen gebracht werden können, wo sie als algebraische Kompositionen aus den Stammtensoren, den Fundamentaltensoren und deren Gradienten erscheinen. Die Eigeninvarianten von R_m enthalten bloß die \mathfrak{C} , \mathfrak{F} , \mathfrak{S} , \mathfrak{R} . Weitere Größen können noch zur Grundbestimmung des Raumes hinzutreten, so z. B. ein quadratischer Linienmaßtensor \mathfrak{G} oder, wie in der volumtreu-affinen Geometrie, ein n -dimensionaler antisymmetrischer Volummaßtensor \mathfrak{B} , der n Verschiebungsvektoren $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ den Rauminhalt $\mathfrak{B} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ des von ihnen aufgespannten Prismas zuordnet. \mathfrak{G} und \mathfrak{B} gehen dann, wie beliebige Stammtensoren, mit ihren Gradienten in die reduzierten Darstellungen ein. Steht die Querrichtung zu einer quadratischen Maßform \mathfrak{G} in einer solchen Beziehung, daß sie die Richtung des Kontinuums aller durch \mathfrak{G} auf R_m als normal definierten Verschiebungsvektoren bedeutet, so wird sie ($n - m$ -dimensionale) Normalrichtung.

Die Kernbildung und Herstellung der reduzierten Formen auf Gebilden verläuft nach den obigen Ausführungen folgendermaßen: Man führt an den als Überschiebungsprodukte aus Tensoren und Grundvektoren aufgefaßten Koordinaten die Differentiationen aus und eliminiert, wie in Teil II an-

gegeben, die $h^r \dots$ und $h^r \dots$ durch \mathfrak{G} , \mathfrak{F} , \mathfrak{H} , so daß die einzigen vorkommenden bei T_1 varianten Elemente von der Form $\iota^{\sigma \dots}$ und $\iota^{\sigma \dots}$ sind. Mittels (33) drückt man die $\iota^{\sigma \dots}$ durch die $\iota^{\sigma \dots}$ aus und zerlegt in den letzteren die ι^{σ} nach (34). An dieser Zerlegung führt man die weiteren Differentiationen aus, indem man nach jeder Differentiation die neu auftretenden ι^{σ} und ι^{σ} wiederum ebenso zerlegt. Das Resultat einer solchen Zerlegung von $\iota^{\sigma \dots}$ oder $\iota^{\sigma \dots}$ ist dann ein Aggregat, in dem als einzige bei T_1 variante Elemente nur noch Tangentialkomponenten $\mathfrak{R} \iota^{\sigma \dots}$ vorkommen. In diese hat man dann noch die beiden Fundamentalwirbel \mathfrak{F} und \mathfrak{H} einzuführen, so daß nur noch permutationsfreie Indexkombinationen übrigbleiben. Ist der Raum wirbelfrei, d. h. sind \mathfrak{F} und \mathfrak{H} null, so erübrigt sich natürlich die letztere Umformung.

Als Beispiel möge die Kernbildung von ι^{σ} ausgeführt werden für $\mathfrak{G}' = \mathfrak{F} = \mathfrak{H} = 0$:

$$(35) \quad \begin{aligned} \iota^{\sigma \sigma} &= (\mathfrak{R}' \varrho \iota + \mathfrak{R} \iota^{\sigma})^{\sigma} \\ &= \mathfrak{R}'' \sigma \varrho \iota + \mathfrak{R}' \varrho^{\sigma} \iota + \mathfrak{R}' \varrho \iota^{\sigma} + \mathfrak{R}' \sigma \iota^{\sigma} + \mathfrak{R} \iota^{\sigma \sigma} \end{aligned}$$

$$\text{Kern von } \iota^{\sigma \sigma} = \mathfrak{R}'' \sigma \varrho \iota + \mathfrak{R}' \varrho (\mathfrak{R}' \sigma \iota) + \mathfrak{R}' \sigma (\mathfrak{R}' \varrho \iota).$$

Liegt ein Ausdruck vor, in dem außer bei T_1 invarianten Elementen nur noch frei variante Elemente (z. B. permutationsfreie Tangentialkomponenten $\mathfrak{R} \iota^{\sigma} \dots$) enthalten sind, so kann man diese alle null setzen, falls der Gesamtausdruck selbst bei T_1 invariant ist. Hierin liegt analog wie oben S. 709 eine Regel der reduzierten Differentiation, wonach man bei der kovarianten Ableitung algebraischer Invarianten *die entstehenden ι^{σ} ersetzt durch ihre Querkomponenten*, die Tensorkoordinaten sind, die ι^{σ} aber durch diese und \mathfrak{G}' ausdrückt.

Hat man die reduzierten Formen, so kommt es im wesentlichen auf die algebraischen Eigenschaften der Gradienten an. Dabei ist zu beachten: Jeder längs R_m gebildete Gradient ist, da er die Form $\sum \mathfrak{A}^{\sigma} \times \varrho$ hat, tangential an erster Argumentsstelle. Er verschwindet also, wenn er dort mit einem quergerichteten Vektor überschoben wird (s. o. (35)). Die Symmetrie- und Antisymmetrieeigenschaften eines Tensors \mathfrak{A} übertragen sich natürlich auf seine kovariante Ableitung \mathfrak{A}^{σ} , so daß \mathfrak{A}' an $(p+1)$ -ter und $(q+1)$ -ter Stelle symmetrisch oder antisymmetrisch ist, wenn \mathfrak{A} es an p -ter und q -ter Stelle war. Ist z. B. \mathfrak{G} von zweiter Stufe und symmetrisch, so ist \mathfrak{G}' symmetrisch an zweiter und dritter Argumentstelle, d. h. $\mathfrak{G}'_{hkl} = \mathfrak{G}'_{hlk}$. Unter Berücksichtigung dieser und ähnlicher algebraischer Verhältnisse macht sich das tensorielle Rechnen, verglichen mit dem Rechnen in skalarer Form, recht einfach. Wir betrachten zum Schlusse noch näher die wichtigste Spezialisierung: $\mathfrak{G}' = \mathfrak{F} = \mathfrak{H} = 0$.

10. Wirbelfreie Vektorübertragung. Taylorkerne. Fundamental-
tensoren und Grundformen. Affine Flächengeometrie.

Die Wirbelfreiheit ($\mathfrak{F} = \mathfrak{S} = 0$) ist die Bedingung für die Existenz eines Ortsvektors \mathfrak{r} mit beliebiger Nullstelle, welcher definiert ist durch:

$$(36) \quad (d\mathfrak{r})_h = d\xi_h.$$

Dann existiert in R_n ein überall affines Koordinatensystem und ist gegeben durch:

$$(37) \quad \mathfrak{r}^h_0 = \xi_h,$$

wo \mathfrak{r}^h_0 die Grundvektoren zweiter Art in der Nullstelle des Ortsvektors bedeuten. Konstante Tensoren haben natürlich in einem solchen Koordinatensystem, welches alle Grundvektorableitungen annulliert, konstante Koordinaten.

Die Grundvektoren ι sind nunmehr als Ableitungen \mathfrak{r}^ι des Ortsvektors darstellbar. Die Differentiationsfolge ist auch an nicht-skalaren Argumenten vertauschbar. Legen wir die Nullstelle des Ortsvektors in den betrachteten Gebildepunkt, so nimmt die Taylorentwicklung von \mathfrak{r} (deren Existenz und Konvergenz vorausgesetzt wird) folgende Form an:

$$(38) \quad \mathfrak{r} = \sum \iota \xi_i + \frac{1}{2!} \iota^e \xi_i \xi_e + \frac{1}{3!} \sum \iota^{e\sigma} \xi_i \xi_e \xi_\sigma + \dots$$

Wegen der Wirbelfreiheit ist die Permutationsfreiheit der $\iota^{e\dots}$ belanglos, und es stellen die Tangentialkomponenten $\mathfrak{R} \iota^{e\dots}$ das charakteristische System $\Lambda_{T_i}^{(p)}$ dar. Sie sind bis zu einer beliebigen Ordnung p in einem beliebigen Punkte P des Gebildes annullierbar. Ein Koordinatensystem von R_m , in dem dies Verschwinden stattfindet, heiße ein in p -ter Ordnung (in P) tangential-affines, da seine Projektion in den Tangentialraum von R_m in p -ter Ordnung äquivalent ist mit einem in diesem gezogenen affinen Koordinatensystem. Da \mathfrak{r} der von dem betrachteten Punkte P zu einem beliebigen anderen Gebildepunkt gezogene Ortsvektor ist, so ist ein (in P) vollständig tangential-affines Koordinatensystem analog wie im Vollraum gegeben durch:

$$(39) \quad \mathfrak{r}^\iota_0 = \xi_i.$$

Jede bis zu einer gewissen Ordnung vollständig invariante Spezialisierung des Koordinatensystems auf R_m (s. o. S. 696) erzeugt vektorielle Koeffizienten $\iota^{e\dots}$ der Taylorentwicklung des Ortsvektors, die mit Eigeninvarianten von R_m zusammenfallen. Das tangential-affine Koordinatensystem ist diejenige einfachste Spezialisierung, bei welcher die mit den Taylorkoeffizienten $\iota^{e\dots}$ der Ortsvektorentwicklung zusammenfallenden Eigeninvarianten des Gebildes die Kerne der $\iota^{e\dots}$ selber sind.

Der Taylorentwicklung entspricht die geometrische Vorstellung der Zerlegung des Ortsvektors in einen unendlich vielgliedrigen Streckenzug mit nach Null konvergierenden Gliedern. Jeder Spezialisierung des Koordinatensystems ist dann eine bestimmte Zerlegung zugeordnet, die als eine vektorielle Charakteristik des Koordinatensystems aufgefaßt werden kann. Die einzelnen Glieder des Streckenzuges haben also bei invarianter Spezialisierung invariante Bedeutung, d. h. ihnen entsprechen invariant bei T_1 definierte Längen und Richtungen am Gebilde im Entwicklungspunkt.

Da im tangential-affinen Koordinatensystem die Tangentialkomponenten der $\iota^e \dots$ verschwinden, so müssen die Kerne der $\iota^e \dots$ auf R_m quer stehen und überdies, wegen $\mathfrak{F} = \mathfrak{S} = 0$, symmetrisch sein. *Die Kerne der $\iota^e \dots$ sind also quer gerichtete symmetrische Vektorsysteme, welche als Vektorkoordinaten invarianter Tensoren aufzufassen sind*, die wir mit $\mathfrak{T}^{[1]}$, $\mathfrak{T}^{[2]}$, ... bezeichnen und „Taylorkerne (des Ortsvektors)“ nennen. Nach den oben S. 714f. auseinandergesetzten Regeln erhält man die ersten zwei Taylorkerne ausgedrückt durch den Richtungstensor und seine Gradienten:

$$(40) \quad \begin{aligned} \mathfrak{T}^{[1]} \iota \kappa &= \mathfrak{R}' \iota \kappa \\ \mathfrak{T}^{[2]} \iota \kappa \lambda &= \mathfrak{R}'' \lambda \kappa \iota + \mathfrak{R}' \lambda (\mathfrak{R}' \kappa \iota) + \mathfrak{R}' \kappa (\mathfrak{R}' \lambda \iota). \end{aligned}$$

Unter der invarianten Entwicklung des Ortsvektors verstehen wir seine Darstellung in der Form:

$$(41) \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{R} \mathfrak{x} + \frac{1}{2!} \mathfrak{T}^{[1]} \iota \kappa \xi_i \xi_\kappa + \frac{1}{3!} \mathfrak{T}^{[2]} \iota \kappa \lambda \xi_i \xi_\kappa \xi_\lambda + \dots,$$

wobei $\xi_i = \mathfrak{x} \iota^i$. Das Wesentliche dieser Entwicklung sind die Taylorkerne, welche invariante, für jedes beliebige Koordinatensystem definierte Tensoren sind.

Von dem Begriff der Fundamentaltensoren (s. oben S. 704 Fußnote), der sich auf die reduzierte Darstellung mittels der äußeren Ableitung bezieht, wohl zu unterscheiden ist der übliche Begriff der Grundformen eines Gebildes (nach Art der beiden Gaußschen Grundformen der gewöhnlichen Flächentheorie). Unter diesen versteht man bekanntlich ein System von Formen (mit griechischen Zeigern), deren Koeffizienten, als Funktionen der ξ_i bekannt, das Gebilde vollständig bestimmen, so daß alle Eigeninvarianten sich aus diesen Koeffizienten und ihren Ableitungen erzeugen lassen. Die Integrabilitätsbedingungen, denen die Grundformen genügen müssen, sind nichts anderes, als die Symmetriebedingungen für die durch die Grundformen dargestellten Koordinaten der $\iota^e \dots$ bzw. für deren Kerne. Sind q_1, q_2, \dots, q_{n-m} invariant definierte unabhängige Quervektoren erster Art und $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_{n-m}$ zugehörige reziproke zweiter Art mit $q_r \hat{q}_s = \begin{cases} 0, & r \neq s \\ 1, & r = s \end{cases}$, so reduzieren sich diese Symmetriebedingungen (genau so wie oben S. 707 alle Wirbel sich auf Wirbel der Form 1) und 2) zurückführten) auf die folgenden:

$$(42) \quad \begin{aligned} [\iota^e \varkappa]_{\iota, e} &= 0, & [\iota^e \hat{q}_r]_{\iota, e} &= 0, \\ [\iota^{e\sigma} \varkappa]_{e, \sigma} &= 0, & [\iota^{e\sigma} \hat{q}_r]_{e, \sigma} &= 0, \\ [q_r^{e\sigma} \varkappa]_{e, \sigma} &= 0, & [q_r^{e\sigma} \hat{q}_s]_{e, \sigma} &= 0. \end{aligned}$$

$[\]_{\iota, e}$ bedeute hierbei den Wirbel, der entsteht, wenn man von dem Ausdruck in der Klammer den durch Vertauschung der Indizes ι, e hervorgehenden abzieht.

Ist eine innere Maßform $\mathfrak{G}\iota\varkappa$ definiert, so kann man mittels ihrer die Integrabilitätsbedingungen reduzieren, d. h. die Ableitungen der Formkoeffizienten, die in ihnen vorkommen, durch ihre Kerne, die mit den aus den $\mathfrak{G}\iota\varkappa$ erzeugten Christoffelschen Symbolen gebildet sind, ersetzen. Setzt man $\mathfrak{A}\iota\varkappa = \iota^{(\varkappa)} - \iota^\varkappa$ (s. o. S. 712), so sind die durch Zerlegung der ι^e und q_r^e entstehenden Formen, welche mit ihren Ableitungen in die Koordinaten der Taylorkerne und die Integrabilitätsbedingungen eingehen:

$$(43) \quad 1) \mathfrak{G}\iota\varkappa, \quad 2) \mathfrak{A}\iota\varkappa\lambda, \quad 3) \iota^e \hat{q}_r, \quad 4) q_r^e \varkappa, \quad 5) q_r^e \hat{q}_s.$$

Jedes unabhängige Formensystem, aus dem sich dieses Formensystem erzeugen läßt, ist ein Grundformensystem.

Die Spezialisierung dieser allgemeinen Verhältnisse für die gewöhnliche und volumtreu-affine Kurven- und Flächengeometrie¹⁵⁾ ist leicht und soll nicht im einzelnen ausgeführt werden. Wir bemerken hier nur, daß die affine Flächentheorie lediglich einen einzigen Fundamentaltensor (s. oben S. 704 Fußnote und S. 712 Fußnote), nämlich einen n -dimensionalen Maßtensor \mathfrak{G} besitzt, weil infolge der Herkunft dieser Maßbestimmung aus der Krümmung der Fläche die Tensoren \mathfrak{B} (s. o. S. 714), \mathfrak{R} und die \mathfrak{R} -Gradienten sich durch \mathfrak{G} und die \mathfrak{G} -Gradienten ausdrücken lassen. Unter den fünf Formen (43) wird 5) Null, 1) und 3) werden identisch; 2) wird $\frac{1}{2}\mathfrak{G}'\iota\varkappa\lambda$ und 4) drückt sich aus den Integrabilitätsbedingungen (42) durch $\mathfrak{G}\iota\varkappa$ und $\mathfrak{G}'\iota\varkappa\lambda$ aus. Somit bleiben zwei durch den Fundamentaltensor \mathfrak{G} dargestellte Grundformen übrig:

$$(44) \quad \mathfrak{G}\iota\varkappa, \quad \mathfrak{G}'\iota\varkappa\lambda.$$

Die Taylorkerne $\mathfrak{T}^{(1)}\iota\varkappa$, $\mathfrak{T}^{(2)}\iota\varkappa\lambda$ werden $\mathfrak{G}\iota\varkappa \times q$ und $\mathfrak{G}'\iota\varkappa\lambda \times q$, wo q der Affinormalvektor. Die sogen. Apolaritätsbeziehung kann auf Grund dieser Form der Taylorkerne als die Aussage aufgefaßt werden, daß infolge der Tangentialität von q^e der Kern der Ableitung des von den ι gebildeten (affinmetrischen) Parallelogramminhalts verschwindet, oder daß dieser Inhalt im tangential-affinen Koordinatensystem stationär ist, eine Eigenschaft, die für die gewöhnliche Maßbestimmung ebenfalls gilt.

¹⁵⁾ Vgl. z. B. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie I. u. II., Springer 1923/24, und Schouten a. a. O.