Zur Theorie der primären Ringe*).

Von

Rudolf Hölzer †.

Unter einem *primären Ring* versteht man einen Ring derart, daß eine Potenz jedes Nullteilers verschwindet. Im Sinne des Übergangs zu Bereichen mit Nullteilern stellt der primäre Ring also den ersten Schritt vom Körper aus dar, insofern dort jeder Nullteiler verschwindet und insofern alle Ringe ohne Nullteiler durch Quotientenbildung auf Körper führen. Entsprechend wie in der Körpertheorie führt die Frage des Aufbaues der primären Ringe auf die Idealtheorie im Polynombereich mit Elementen eines primären Ringes als Koeffizienten. Während aber im Polynombereich mit Koeffizienten aus einem Körper der Teilerkettensatz erfüllt ist und man daher diese Idealtheorie vollständig beherrscht, *fehlt* hier eine solche *Endlichkeitsbedingung*.

W. Krull hat in seinen Arbeiten über primäre Ringe[1]) — die an A. Fraenkel anschließen — eine gewisse allerdings viel schwächere Endlichkeitsbedingung dadurch erreicht, daß er *endlichen Exponenten* voraussetzte, d. h. indem er annahm, daß eine Potenz des aus allen Nullteilern bestehenden Ideals verschwindet; außerdem setzte er den Ring als *speziellen primären* voraus, d. h. als einen solchen, der nur Nullteiler und Einheiten enthält. Hier kann er[2]) durch formal-rechnerische Hilfsmittel, nämlich durch Übertragung des Euklidischeu Algorithmus — der im Spezialfall sich schon bei Fraenkel findet —, im Fall des Polynombereichs *einer* Unbestimmten eine eindeutige Zerlegung der Polynome in paarweise teilerfremde primäre erreichen; und damit eine eindeutige Zerlegung der Ideale in paarweise teilerfremde Primärideale. Gestützt auf dieses Resul-

*) Rudolf Hölzer, geboren am 30. September 1903, erlag am 2. Juli 1926 der Tuberkulose. Die vorliegende, noch ganz von ihm selbst redigierte Arbeit war als Dissertation gedacht; zum Examen ist es nicht mehr gekommen.

[1]) W. Krull, Algebraische Theorie der Ringe, I., Math. Ann. **88** (1923), S. 80 bis 122; II., Math. Ann. **91** (1924), S. 1–46; III., Math. Ann. **92** (1924), S. 183–213.

[2]) W. Krull, Algebraische Theorie der Ringe, I., Math. Ann. **88** (1923), S. 96.

tat, gelingt ihm — wenigstens für „vollkommene" Ringe — eine weitgehende Typisierung.

Im folgenden wird eine Idealtheorie im Polynombereich von n Unbestimmten eines primären Ringes *ohne Voraussetzung einer Endlichkeitsbedingung* und mit *rein begrifflichen Methoden* gegeben. Im Mittelpunkt stehen die Begriffe der Isomorphie und Homomorphie (d. h. der nur in *einem* Sinne eindeutigen Zuordnung von Ringen zueinander), die es erlauben, aus der bekannten Zerlegung im Polynombereich mit Körperkoeffizienten auf eine solche im Ring-Polynombereich zu schließen. Diese Zuordnung zwischen Ring und Körper tritt bei Krull erst an viel späterer Stelle auf[3]).

Man gewinnt so als Hauptsatz, wenn man sich vorerst auf spezielle primäre Ringe als Koeffizientenbereich beschränkt, für alle *Ideale der Dimension Null* eine *eindeutige Zerlegung als Produkte von paarweise teilerfremden Primäridealen* — was im Spezialfall auf das Krullsche Resultat zurückkommt. Im Fall einer Unbestimmten folgt daraus die Zerlegung der Funktionen.

Geht man zu allgemeinen primären Ringen über, so ergibt hier — unter Benutzung der Resultate von H. Grell[4]) — der Zerlegungssatz noch für die „ausgezeichneten" Ideale der Dimension Null eine eindeutige Zerlegung in „ausgezeichnete" Primärideale.

Daß für Ideale höherer Dimension die Methode sich nicht direkt übertragen läßt, zeigen zwei von W. Krull herrührende Beispiele.

Die von W. Krull in seinen beiden ersten Arbeiten zur Ringtheorie aufgestellte Theorie der Erweiterungen bezieht sich — abgesehen von der Beschränkung auf „vollkommene" Ringe — nur auf eine ganz besondere Art von Erweiterungen, auf solche nämlich, die sich idealtheoretisch durch Hauptideale beschreiben lassen. Durch diese absichtliche Beschränkung wird es möglich, die Struktur des Ringes weitgehend auf die des zugeordneten Körpers zurückzuführen. Ich mache in § 3, 1 einen Vorschlag, wie man durch Untersuchung eines anderen Idealtyps zur Erfassung der allgemeinen Erweiterung eines primären Ringes gelangen könnte. Ich zeige, wie eine beliebige Erweiterung sich immer in drei charakteristischen Stufen vornehmen läßt, die etwa den Begriffen Nullteiler, transzendent, algebraisch entsprechen. In § 3, 2 zeige ich kurz, wie im Fall rein tran-

[3]) Neuerdings ist Krull einen ähnlichen Weg gegangen, auch teilweise in der Theorie der Erweiterungen, aber immer unter Festhaltung an der Bedingung des endlichen Exponenten. Vgl. seine, im übrigen andere Zwecke verfolgende Note: Algebraische Erweiterungen kommutativer hyperkomplexer Systeme, die in Math. Annalen 97 (1927), Heft 3 erscheinen wird. Die hier gegebenen Entwicklungen sind unabhängig und zeitlich früher entstanden.

[4]) H. Grell, Beziehungen zwischen den Idealen verschiedener Ringe, die in Math. Annalen 97 (1927), Heft 3 erscheinen wird. Vgl. § 6 über den Quotientenring.

szendenter Erweiterungen sich die Begriffe der Körpertheorie direkt übertragen, insbesondere der Begriff des Transzendenzgrades, so daß gleiche Mächtigkeit des Transzendenzgrades die notwendige und hinreichende Bedingung für äquivalente Erweiterungen abgibt. In dem von Krull betrachteten Fall folgt dies direkt aus dessen allgemeinen Sätzen.

§ 1.
Definitionen und vorbereitende Begriffe.

Definition 1. Ein Ideal $\mathfrak{q}$ aus $\mathfrak{R}$ (kommutativer Ring) heißt *schwach primär*, wenn im Restklassensystem $\mathfrak{R}|\mathfrak{q}$ eine Potenz jedes Nullteilers verschwindet, *stark primär*, wenn in $\mathfrak{R}|\mathfrak{q}$ eine Potenz jedes Idealteilers der Null verschwindet.

In beiden Fällen heißt $\mathfrak{q}$ primär; die Gesamtheit $\mathfrak{p}$ der Elemente aus $\mathfrak{R}$, die Nullteiler in $\mathfrak{R}|\mathfrak{q}$ erzeugen, ist ein Primideal, das in $\mathfrak{q}$ aufgeht und das zugehörige Primideal heißt[5]).

Jedes starke Primärideal ist zugleich schwaches Primärideal. Im allgemeinen gilt aber nicht die Umkehrung, wie folgendes Beispiel zeigt: sei $\mathfrak{R}$ der Polynombereich von abzählbar vielen Unbestimmten x_i mit Koeffizienten aus einem Körper; sei ferner

$$\mathfrak{q} = (x_1^2, x_2^3, \ldots, x_\nu^{\nu+1}, \ldots, x_i x_k, \ldots) \qquad (i \neq k).$$

Nullteiler im Restklassenring sind alle und nur die durch $\mathfrak{p} = (x_1, x_2, \ldots, x_\nu \ldots)$ teilbarem Polynome, und es wird jeweils eine Potenz dieser Nullteiler durch $\mathfrak{q}$ teilbar; $\mathfrak{q}$ ist also schwaches Primärideal mit $\mathfrak{p}$ als zugehörigem Primideal. Dagegen ist $\mathfrak{q}$ nicht starkes Primärideal, wie man durch Betrachtung von $\mathfrak{a} = (x_1, x_3, x_5, \ldots, x_{2\nu+1}, \ldots)$ und $\mathfrak{b} = (x_2, x_4, x_6, \ldots, x_{2\nu}, \ldots)$ erkennt. Es ist $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \equiv 0(\mathfrak{q})$, aber $\mathfrak{a}^\varkappa \not\equiv 0(\mathfrak{q})$, $\mathfrak{b}^\varkappa \not\equiv 0(\mathfrak{q})$ für jedes $\varkappa$.

Ein schwaches Primärideal ist jedoch stets stark primär, wenn es endlichen Exponenten hat, d. h. eine Potenz des zugehörigen Primideals durch $\mathfrak{q}$ teilbar wird (was z. B. immer der Fall ist, wenn in $\mathfrak{R}$ der Teilerkettensatz gilt[6])).

Ein Element eines Ringes, das nicht Nullteiler ist, heißt regulär.

Definition 2. Ein Ring $\mathfrak{R}$ heiße *allgemeiner primärer Ring*, wenn sein Nullideal schwach primär ist und er mindestens ein reguläres Element besitzt; er heiße *spezieller primärer Ring*, wenn außerdem ein Einheitselement der Multiplikation existiert und jedes reguläre Element Einheit ist — d. h. Teiler des Einheitselementes.

---

[5]) Vgl. hierzu E. Noether, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Ann. **96** (1926), S. 26—61, § 5.

[6]) Vgl. etwa E. Noether, Idealtheorie in Ringbereichen, Math. Ann. **83** (1921), S. 24—66.

Das zum Nullideal gehörige Primideal eines primären Ringes $\mathfrak{R}$ sei stets mit $\mathfrak{p}^*$ bezeichnet; $\mathfrak{p}^*$ ist also das System aller Nullteiler von $\mathfrak{R}$. Man kann von einem allgemeinen primären Ring immer zu einem speziellen auf eindeutige Weise gelangen vermittelst einer gewissen Quotientenbildung. Ist allgemein $\mathfrak{R}$ ein beliebiger Ring, $\mathfrak{S}$ ein System von regulären Elementen aus $\mathfrak{R}$, so daß neben a und b auch $a \cdot b$ zu $\mathfrak{S}$ gehört, so versteht man unter dem durch $\mathfrak{S}$ erzeugten Quotientenring von $\mathfrak{R}$ denjenigen Erweiterungsring von $\mathfrak{R}$, der durch Bildung aller „Quotienten" $\frac{a}{b}$ — wo a beliebig, b aus $\mathfrak{S}$ — entsteht, indem man die Festsetzungen trifft: $\frac{a}{b}$ gleich $\frac{a'}{b'}$ dann und nur dann, wenn $a b' - a' b = 0$ und $\frac{a}{b} \pm \frac{a'}{b'} = \frac{a b' \pm a' b}{b b'}$, $\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{a a'}{b b'}$ [7]). Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal in $\mathfrak{R}$, so bildet offenbar die Gesamtheit der regulären Elemente $a \not\equiv 0(\mathfrak{a})$, für die kein reguläres Element $b \not\equiv 0(\mathfrak{a})$ existiert, so daß $a \cdot b \equiv 0(\mathfrak{a})$, ein System $\mathfrak{S}$; den hierdurch bestimmtan Quotientenrig $\mathfrak{R}_{\mathfrak{a}}$ wollen wir den Quotientenring von $\mathfrak{R}$ nach $\mathfrak{a}$ nennen. Ist $\mathfrak{a}$ insbesondere ein Primideal $\mathfrak{p}$, das alle Nullteiler enthält, so besteht $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}$ aus allen Quotienten $\frac{a}{b}$, wo a beliebig, $b \not\equiv 0(\mathfrak{p})$. Ist nun $\mathfrak{R}$ allgemein primär, so ist offenbar $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}^*}$ speziell primärer Ring; diese letzteren sind durch $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}^*} = \mathfrak{R}$ charakterisiert.

Sind $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ beliebige Ringe, so heißt $\mathfrak{R}$ *homomorph* zu $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R} \sim \mathfrak{R}'$, wenn jedem Element aus $\mathfrak{R}$ ein und nur ein Element aus $\mathfrak{R}'$ entspricht, so daß $\mathfrak{R}'$ dabei erschöpft wird und außerdem diese Zuordnung derart beschaffen ist, daß Differenz und Produkt sich entsprechen. Ist das Entsprechen der Elemente umkehrbar eindeutig, so heißen die Ringe *isomorph*, $\mathfrak{R} \simeq \mathfrak{R}'$. Ist $\mathfrak{R}$ homomorph zu $\mathfrak{R}'$, so entspricht jedem Ideal $\mathfrak{m}$ aus $\mathfrak{R}$ ein und nur ein Ideal $\mathfrak{m}'$ in $\mathfrak{R}'$, das entsteht, indem man jedes Element von $\mathfrak{m}$ durch das ihm in $\mathfrak{R}'$ entsprechende ersetzt; $\mathfrak{m}'$ heiße das zugehörige Ideal von $\mathfrak{m}$ oder das ihm in $\mathfrak{R}'$ zugeordnete. Ist umgekehrt $\mathfrak{m}'$ ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{R}'$, so gibt es im allgemeinen mehrere Ideale $\mathfrak{n}$ in $\mathfrak{R}$, für die $\mathfrak{n}' = \mathfrak{m}'$; wir nennen sie die zugehörigen von $\mathfrak{m}'$, ihren größten gemeinsamen Teiler das größte zugehörige Ideal von $\mathfrak{m}'$. Es gilt der für das Folgende wichtige

Isomorphiesatz. *Bedeutet* $\mathfrak{a}$ *das größte dem Nullideal von* $\mathfrak{R}'$ *zugeordnete Ideal von* $\mathfrak{R}$, *und ist* $\mathfrak{m}$ *irgendein Teiler von* $\mathfrak{a}$, *so ist* $\mathfrak{R} | \mathfrak{m} \simeq \mathfrak{R}' | \mathfrak{m}'$ [8]).

[7]) Der Begriff und die Konstruktion ist vollständig analog der Bildung des Quotientenkörpers bei Steinitz, Algebr. Theorie der Körper, Journ. f. Math. 137; vgl. auch Grell, a. a. O.

[8]) Vgl. E. Noether, Abstrakter Aufbau ..., § 4, 3, erster Isomorphiesatz.

Sind T_1 und T_2 zwei Erweiterungen eines Ringes $\mathfrak{R}$, so heißen sie bezüglich $\mathfrak{R}$ äquivalent, wenn sie so isomorph aufeinander bezogen werden können, daß dabei jedes Element von $\mathfrak{R}$ sich selbst entspricht.

Jedem speziell primären Ring $\mathfrak{R}$ ist eindeutig ein Körper zugeordnet zu dem er homomorph ist, nämlich das Restklassensystem $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{p}^*$. Im folgenden wird das einem Element a von $\mathfrak{R}$ zugeordnete Element von $\mathfrak{K}$, also die Klasse, die es repräsentiert, stets mit $\bar{a}$ bezeichnet, $a \sim \bar{a}$. Ist $\mathfrak{S}$ ein Erweiterungsring von $\mathfrak{R}$, der ebenfalls speziell primär ist, so enthält sein zugehöriger Körper $\mathfrak{L}$ einen zu $\mathfrak{K}$ isomorphen Teilkörper $\mathfrak{K}'$, der aus allen Restklassen von $\mathfrak{L}$ besteht, die durch Elemente von $\mathfrak{R}$ repräsentiert werden können; ersetzt man $\mathfrak{K}'$ in $\mathfrak{L}$ durch $\mathfrak{K}$ und definiert in naheliegender Weise die Verknüpfungen, so entsteht eindeutig ein Erweiterungskörper $\mathfrak{L}'$ von $\mathfrak{K}$, wobei $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{L}'$; wir dürfen deshalb der Einfachheit halber $\mathfrak{L}$ stets schon in unmißverständlicher Weise als Erweiterungskörper von $\mathfrak{K}$ annehmen. Bedeutet weiter $\mathfrak{R}_f$ den Polynombereich in beliebig viel Unbestimmten mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$, so ist er dem Polynombereich $\mathfrak{K}_f$ in der gleichen Anzahl von Unbestimmten mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$ homomorph, wobei die Homomorphie von $\mathfrak{R}$ zu $\mathfrak{K}$ umfaßt wird; man braucht offenbar nur jedem Polynom aus $\mathfrak{R}_f$ mit den Koeffizienten a_i dasjenige Polynom von $\mathfrak{K}_f$ zuzuordnen, welches die Koeffizienten $\bar{a}_i$ besitzt.

Sei $\mathfrak{R}$ ein allgemeiner primärer Ring, $\mathfrak{R}'$ der ihm, wie oben erklärt, durch Quotientenbildung zugeordnete speziell primäre und $\mathfrak{K}$ dessen zugehöriger Körper. Dann entsteht, wenn man jedes Element von $\mathfrak{R}$ durch das ihm vermöge $\mathfrak{R}' \sim \mathfrak{K}$ entsprechende in $\mathfrak{K}$ ersetzt, ein Unterring P von $\mathfrak{K}$, dessen Quotientenkörper $\mathfrak{K}$ ist; es ist $\mathfrak{R} \sim \mathsf{P}$. Ist ferner $\mathfrak{S}$ ein allgemein primärer Erweiterungsring von $\mathfrak{R}$, so ist, in analoger Bezeichnungsweise, $\mathfrak{S} \sim \Sigma$ und $\mathfrak{L}$ der Quotientenkörper von Σ. Schließlich ist auch hier $\mathfrak{R}_f \sim \mathsf{P}_f$.

Satz. *Ist $\mathfrak{R}$ primär, so ist auch der Polynomring $\mathfrak{R}_f$ primär, der aus $\mathfrak{R}$ durch Adjunktion einer Unbestimmtenmenge beliebiger Mächtigkeit hervorgeht*[9]).

Wir führen noch folgende Bezeichnungsweise ein: Das dem Element $f(x)$ von $\mathfrak{R}_f$ zugeordnete in P_f sei mit $\bar{f}(x)$ bezeichnet, das dem Ideal $\mathfrak{a}$ zugehörige mit $\bar{\mathfrak{a}}$, das $\bar{\mathfrak{a}}$ zugehörige größte Ideal in $\mathfrak{R}_f$ mit $\mathfrak{a}^*$; es ist $\mathfrak{a}^* = (\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_f^*)$. Schließlich nennen wir $\mathfrak{a}$ *regulär*, wenn $\bar{\mathfrak{a}}$ vom Nullideal verschieden,

[9]) E. Noether, Eliminationstheorie und allgemeine Idealtheorie, Math. Ann. 90 (1923), S. 229–261, Hilfssatz I, § 2. Daß dieser Hilfssatz tatsächlich mit dem obigen Satz identisch ist, wird im Fall des Primideals ausdrücklich gesagt und gilt wörtlich so bei Primäridealen. Daß damit auch der Fall einer Unbestimmtenmenge beliebiger Mächtigkeit erledigt ist, folgt direkt daraus, daß jedes einzelne Polynom nur endlich viele Unbestimmten enthält.

$\bar{\mathfrak{a}} \neq (\bar{0})$. $\mathfrak{a}$ heiße *voll-regulär*, wenn außerdem $\mathfrak{p}_f^* \equiv 0\,(\mathfrak{a})$. Die nicht-regulären Ideale heißen Nullteilerideale; diese brauchen nicht Idealteiler der Null zu sein, wie aus dem Beispiel in § 1 unmittelbar folgt. Jedoch muß von jedem Nullteilerideal mit endlicher Basis eine Potenz verschwinden. Es gilt: Aus $\mathfrak{a} \equiv 0\,(\mathfrak{b})$ folgt $\bar{\mathfrak{a}} \equiv 0\,(\bar{\mathfrak{b}})$, aber nicht umgekehrt; ebenso folgt aus $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ stets $\bar{\mathfrak{a}} \cdot \bar{\mathfrak{b}} = \bar{\mathfrak{c}}$. Jedem $\mathfrak{a}$ ist eindeutig ein vollreguläres zugeordnet, nämlich $\mathfrak{a}^*$; die Zuordnung zwischen den $\mathfrak{a}^*$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ ist umkehrbar eindeutig.

§ 2.

Idealtheorie im Polynombereich primärer Ringe.

1. Von jetzt ab sei $\mathfrak{R}$ ein *spezieller primärer Ring*, in dem also jedes reguläre Element Einheit ist, $\mathfrak{R}_f$ der Bereich aller Polynome in $x_1, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$.

Eine Funktion aus $\mathfrak{R}_f$ heißt regulär, wenn sie mindestens einen regulären Koeffizienten besitzt, sonst Nullteilerfunktion; die größte vorkommende Exponentensumme mit von Null verschiedenen Koeffizienten heißt die Ordnung der Funktion, die größte vorkommende Exponentensumme mit regulären Koeffizienten ihr Grad. Der Grad einer Funktion ist gleich dem Grad der zugeordneten Funktion in $\mathfrak{K}_f$; aus der Homomorphie zu $\mathfrak{K}_f$ folgt sofort, daß sich die Gradzahlen bei Multiplikation addieren, insbesondere also, daß die Funktionen positiven Grades keine Einheiten sein können.

I. *Die Einheiten von $\mathfrak{R}_f$ sind die regulären Funktionen vom Grade Null.*

Eine solche Funktion hat die Form $e(x_1, \ldots, x_n) = a + q(x_1, \ldots, x_n)$, wo a ein reguläres Element aus $\mathfrak{R}$, $q(x_1, \ldots, x_n)$ eine Nullteilerfunktion; $e(x_1, \ldots, x_n)$ ist zu dem Hauptideal $(q(x_1, \ldots, x_n))$ teilerfremd, also auch zu jeder Potenz von $(q(x_1, \ldots, x_n))$, mithin zu (0). Zusammen damit, daß Funktionen positiven Grades keine Einheiten sein können, drückt dies die Behauptung von I aus.

Die Gesamtheit der Nullteilerfunktionen von $\mathfrak{a}$ bildet ein Nullteilerideal $\mathfrak{u}$, das Vielfaches von $\mathfrak{a}$ ist. Ist $\mathfrak{b}$ echter Teiler von $\mathfrak{a}$ und bildet $\mathfrak{u}$ ebenfalls die Gesamtheit der Nullteiler von $\mathfrak{b}$, so muß offenbar $\bar{\mathfrak{b}}$ *echter* Teiler von $\bar{\mathfrak{a}}$ sein. Auf dieser Bemerkung beruht

II. *In $\mathfrak{R}_f$ gilt der Teilerkettensatz modulo $\mathfrak{p}_f^*$.* D. h. die Kette $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots$, wo $\mathfrak{a}_i$ echter Teiler von $\mathfrak{a}_{i-1}$ ist, bricht nach endlich viel Schritten ab, wenn dies für die Kette $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3, \ldots$ gilt.

Da nämlich in $\mathfrak{K}_f$ der Teilerkettensatz gilt, so muß die Kette $\bar{\mathfrak{a}}_1, \bar{\mathfrak{a}}_2, \bar{\mathfrak{a}}_3, \ldots$ im Endlichen abbrechen. Sei λ eine natürliche Zahl, so daß

$\bar{\mathfrak{a}}_\lambda = \bar{\mathfrak{a}}_{\lambda+1} = \ldots$ und $\mathfrak{u}_\lambda = \mathfrak{u}_{\lambda+1} = \ldots$; dann ist auch $\mathfrak{a}_\lambda = \mathfrak{a}_{\lambda+1} = \ldots$, wie unmittelbar aus der obigen Bemerkung folgt.

III. *Jedes Ideal in* $\mathfrak{R}_f$ *besitzt modulo* $\mathfrak{p}_f^*$ *eine endliche Basis*; d. h. es ist $\mathfrak{a} = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_r(x_1, \ldots, x_n), \mathfrak{u})$. III folgt aus II nach bekannten Schlüssen der Idealtheorie [10]).

Ein Ideal in $\mathfrak{K}_f$ heiße von der Dimension Null, wenn alle seine zugehörigen Primideale die Dimension Null haben [11]); $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{R}_f$ heiße von der Dimension Null, wenn $\bar{\mathfrak{a}}$ die Dimension Null hat. Ein Ideal der Dimension Null ist sicher regulär.

Satz 1. $\mathfrak{p}$ *ist dann und nur dann Primideal, wenn es vollregulär und* $\bar{\mathfrak{p}}$ *Primideal ist.*

Beweis. Daß $\mathfrak{p}$ voll-regulär ist, ist offenbar notwendig, da sonst ein Element $\not\equiv 0(\mathfrak{p})$ wäre, von dem eine Potenz teilbar wird. Ferner ist nach dem Isomorphiesatz $\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p} \simeq \mathfrak{K}_f\,|\,\bar{\mathfrak{p}}$, unter $\mathfrak{o}$ das Einheitsideal von $\mathfrak{R}_f$ verstanden. Enthält also $\mathfrak{K}_f\,|\,\bar{\mathfrak{p}}$ keine Nullteiler, so gilt das gleiche für $\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p}$ und umgekehrt, woraus Satz 1 folgt.

Satz 2. *Ein Ideal* $\mathfrak{q}$ *von der Dimension Null ist dann und nur dann Primärideal, wenn* $\bar{\mathfrak{q}}$ *primär ist.*

Beweis. Man erkennt dies zunächst für das zu $\mathfrak{q}$ gehörige vollreguläre Ideal $\mathfrak{q}^*$ wie eben aus der Beziehung $\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{q}^* \simeq \mathfrak{K}_f\,|\,\bar{\mathfrak{q}}$. Zu zeigen ist also: $\mathfrak{q}$ ist dann und nur dann primär, wenn $\mathfrak{q}^*$ es ist. Sei $\mathfrak{q}^*$ primär. Zunächst ist von jedem Element aus $\mathfrak{q}^*$ eine Potenz durch $\mathfrak{q}$ teilbar (was allgemein für $\mathfrak{a}^*$ und $\mathfrak{a}$ gilt). Ist nämlich α ein beliebiges Element aus $\mathfrak{q}^*$, so enthält $\mathfrak{q}$ ein Element α', für das $\alpha' \equiv \alpha(\mathfrak{p}_f^*)$, und es ist mithin für eine natürliche Zahl λ: $(\alpha - \alpha')^\lambda = 0$, $\alpha^\lambda \equiv 0(\mathfrak{q})$. Die Elemente des Primideals $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{q}^*$ erzeugen also Elemente von $\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{q}$, von denen eine Potenz verschwindet; somit genügt es zu zeigen, daß die Elemente $\not\equiv 0(\mathfrak{p})$ keine Nullteiler in $\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{q}$ ergeben.

Dazu bemerkt man, daß $\mathfrak{p}$ von der Dimension Null ist und die Primideale von der Dimension Null keinen echten Teiler $\neq \mathfrak{o}$ haben. Beides folgt aus der Homomorphie und Satz 1, wenn man beachtet, daß $\bar{\mathfrak{p}}$ das zugehörige Primideal von $\bar{\mathfrak{q}}$ ist. Sei nun $\alpha \not\equiv 0(\mathfrak{p})$, dann ist $(\alpha, \mathfrak{p}) = \mathfrak{o}$. Folglich gibt es ein Hauptideal $(\beta) \equiv 0(\mathfrak{p})$, so daß $(\alpha, \beta) = \mathfrak{o}$. Ist etwa $(\beta)^\sigma \equiv 0(\mathfrak{q})$, so folgt $(\alpha, \beta^\sigma) = \mathfrak{o}$, $(\alpha, \mathfrak{q}) = \mathfrak{o}$. Das bedeutet aber, daß α eine Einheit in $\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{q}$ erzeugt.

---

[10]) Vgl. E. Noether, Idealtheorie in Ringbereichen, § 1.

[11]) Zum Dimensionsbegriff der Primideale — Transzendenzgrad des Restklassenkörpers — vgl. E. Noether, Eliminationstheorie, § 4, Satz 5. Dimension Null heißt also, daß jedes Element des Restklassenkörpers algebraisch in bezug auf den Grundbereich ist.

Sei umgekehrt $\mathfrak{q}$ primär, $\mathfrak{p}$ das zugehörige Primideal. Die Homomorphie ergibt $\bar{\mathfrak{q}} \equiv 0(\bar{\mathfrak{p}})$. Weiter folgt aus der Homomorphie, daß für eine natürliche Zahl ϱ: $\bar{\mathfrak{p}}^{\varrho} \equiv 0(\bar{\mathfrak{q}})$ sein muß; ist nämlich $f_1, \ldots, f_r$ eine Basis von $\mathfrak{p}$ modulo $\mathfrak{p}_f^*$ und etwa $f_1^{\varrho_1} \equiv 0(\mathfrak{q}), \ldots, f_r^{\varrho_r} \equiv 0(\mathfrak{q})$, so braucht man nur $\varrho \geqq \sum \varrho_i$ zu wählen. Da $\bar{\mathfrak{q}}$ die Dimension Null hat, folgt aus $\bar{\mathfrak{p}}^{\varrho} \equiv 0(\bar{\mathfrak{q}})$ bekanntlich, daß $\bar{\mathfrak{q}}$ primär ist; also ist nach dem zu Anfang Bewiesenen auch $\mathfrak{q}^*$ primär.

Hilfssatz. *Aus* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{o}$ *folgt* $(\bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{b}}) = \bar{\mathfrak{o}}$ *und umgekehrt. Aus* $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k$ *voll-regulär und* $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k) = \mathfrak{o}$ $(i \neq k)$ folgt $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_k$ *voll-regulär.*

Beweis. Daß aus $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{o}$ folgt $(\bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{b}}) = \bar{\mathfrak{o}}$, ist evident. Ist umgekehrt $(\bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{b}}) = \bar{\mathfrak{o}}$, so sei etwa $\bar{f} + \bar{g} = \bar{e}$ ($\bar{e}$ Einheitselement von $\mathfrak{K}_f$, $\bar{f}$ bzw. $\bar{g}$ aus $\bar{\mathfrak{a}}$ bzw. $\bar{\mathfrak{b}}$); dann ist, wenn f, g irgendwelche Polynome aus $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ sind, die $\bar{f}, \bar{g}$ vermöge der Homomorphie entsprechen, $f + g = e'$, wo e' eine Einheitsfunktion bedeutet. Hieraus folgt aber $e'^{-1} \cdot f + e'^{-1} \cdot g = e$. Ist ferner $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k) = \mathfrak{o}$, so ist das Produkt gleich dem Durchschnitt, und da $\mathfrak{p}_f^*$ in allen $\mathfrak{a}_\lambda$ enthalten ist, so gilt dies auch für das Produkt.

Satz 3. *In* $\mathfrak{R}_f$ *läßt sich jedes Ideal von der Dimension Null eindeutig darstellen als Produkt paarweise teilerfremder Primärideale (von der Dimension Null).*

Beweis. Sei $\mathfrak{a}$ das vorgelegte Ideal und $\bar{\mathfrak{a}} = \bar{\mathfrak{q}}_1 \ldots \bar{\mathfrak{q}}_r$ die bekannte Zerlegung von $\bar{\mathfrak{a}}$ in $\mathfrak{K}_f$ als Produkt paarweise teilerfremder Primärideale.

Ist $\mathfrak{q}_i^*$ das zu $\bar{\mathfrak{q}}_i$ gehörige voll-reguläre Ideal, so ist $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{q}_1^* \ldots \mathfrak{q}_r^*$ die Zerlegung von $\mathfrak{a}^*$ nach Satz 3. Die Homomorphie ergibt nämlich $\mathfrak{q}_1^* \ldots \mathfrak{q}_r^* \equiv 0(\mathfrak{a}^*)$; außerdem folgt aus dem Hilfssatz, daß $\mathfrak{q}_1^* \ldots \mathfrak{q}_r^*$ voll-regulär ist, also $\mathfrak{a}^* \equiv 0(\mathfrak{q}_1^* \ldots \mathfrak{q}_r^*)$. Nach Satz 2 sind überdies die $\mathfrak{q}_i^*$ Primärideale von der Dimension Null.

Ist $\mathfrak{p}_i$ das zugehörige Primideal von $\mathfrak{q}_i^*$, so sei etwa

$$\mathfrak{p}_1 = (f_1, \ldots, f_k, \mathfrak{p}_f^*), \quad \ldots, \quad \mathfrak{p}_r = (h_1, \ldots, h_t, \mathfrak{p}_f^*);$$

wir betrachten $\mathfrak{r}_1 = (f_1, \ldots, f_k), \ldots, \mathfrak{r}_r = (h_1, \ldots, h_t)$. $\mathfrak{r}_i$ ist zu $\mathfrak{p}_i$ gehöriges Primärideal von der Dimension Null $(\bar{\mathfrak{r}}_i = \bar{\mathfrak{p}}_i)$. Die Homomorphie ergibt, daß ein Potenzprodukt der $\mathfrak{r}$ durch $\mathfrak{a}^*$ teilbar wird. Da, wie beim Beweise von Satz 2 gezeigt wurde, eine Potenz eines jeden Elementes von $\mathfrak{a}^*$ zu $\mathfrak{a}$ gehört, folgt hieraus, daß auch ein Potenzprodukt der $\mathfrak{r}$ durch $\mathfrak{a}$ teilbar ist: $\mathfrak{r}_1^{\lambda_1} \ldots \mathfrak{r}_r^{\lambda_r} \equiv 0(\mathfrak{a})$ (endliche Basis der $\mathfrak{r}_i$!). Sei gesetzt $\mathfrak{q}_i = (\mathfrak{a}, \mathfrak{r}_i^{\lambda_i})$. Da $\bar{\mathfrak{q}}_i$ ein Teiler von $\bar{\mathfrak{p}}_i^{\lambda_i}$, so ist $\bar{\mathfrak{q}}_i$ und somit auch $\mathfrak{q}_i$ Primärideal von der Dimension Null. Ferner folgt aus dem Hilfssatz $(\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_k) = \mathfrak{o}$. Es ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_r$ die behauptete Zerlegung von $\mathfrak{a}$. Nach

Definition von $\mathfrak{q}_i$ und wegen $(\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_k) = \mathfrak{o}$ ist nämlich $\mathfrak{a} \equiv 0(\mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_r)$. Andererseits ist $(\mathfrak{a}^r, \mathfrak{a}^{r-1}\mathfrak{r}_r^{\lambda_r}, \ldots, \mathfrak{r}_1^{\lambda_1} \ldots \mathfrak{r}_r^{\lambda_r}) \equiv 0(\mathfrak{a})$.

Hiermit ist die Existenz der Zerlegung bewiesen; die Eindeutigkeit folgt nach bekannten Rechenregeln für Teilerfremdheit [12]), aus denen sich wegen der Dimension Null zuerst das Übereinstimmen der Primideale und dann das der Primärkomponenten ergibt. Denn zu verschiedenen Primidealen gehörige Primärkomponenten sind nach dem Hilfssatz teilerfremd, da dies in $\mathfrak{K}_f$ wegen der Dimension Null erfüllt ist.

Um eine Folgerung aus Satz 3 zu ziehen, beschränken wir uns auf den Fall $n = 1$.

Im Polynombereich $\mathfrak{R}[x]$ einer Unbestimmten x heißen zwei Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ teilerfremd, wenn die aus ihnen abgeleiteten Hauptideale es sind. Der Hilfssatz ergibt, daß f_1 und f_2 dann und nur dann teilerfremd sind, wenn dies für $\bar{f}_1$ und $\bar{f}_2$ gilt. $\varphi(x)$ heiße Primfunktion (Primärfunktion), wenn $\bar{\varphi}$ prim (primär) ist. Man erkennt leicht, auf Grund des Hilfssatzes, daß eine Primfunktion dadurch charakterisiert ist, zu allen regulären Funktionen niedrigeren Grades teilerfremd zu sein; eine Primärfunktion ist, wie die Homomorphie zeigt, stets von der Form $h(x) = e(x)g(x)^\nu + q(x)$, wo $g(x)$ prim, $e(x)$ bzw. $q(x)$ eine Einheits- bzw. Nullteilerfunktion.

IV. *Jedes reguläre Ideal in* $\mathfrak{R}[x]$ *ist von der Form* $\mathfrak{a} = (f(x), \mathfrak{u})$, wo $\mathfrak{u}$ wieder das aus allen Nullteilern von $\mathfrak{a}$ bestehende Ideal bedeutet. In $\mathfrak{K}_f$ ist jedes Ideal Hauptideal und etwa $\bar{\mathfrak{a}} = (\bar{f})$. Wählt man $f(x) \equiv 0(\mathfrak{a})$ so, daß es bei der Homomorphie $\bar{f}$ entspricht, so ist $\mathfrak{a} = (f(x), \mathfrak{u})$. Für beliebiges $\alpha(x) \equiv 0(\mathfrak{a})$ hat man nämlich $\bar{\alpha} = \bar{\lambda}\bar{f}$, also, wenn λ ein beliebiges $\bar{\lambda}$ zugeordnetes Polynom bedeutet, $\alpha(x) - \lambda(x)f(x) = q(x)$, wo $q(x)$ eine Nullteilerfunktion; offenbar ist $q(x) \equiv 0(\mathfrak{u})$, womit IV bewiesen.

Satz 4. *Jede reguläre Funktion* $f(x)$ *in* $\mathfrak{R}[x]$ *läßt sich bis auf Einheitsfunktionen eindeutig in ein Produkt von teilerfremden Primärfunktionen zerlegen.*

Beweis. Man erkennt zunächst:

1. Ein reguläres Hauptideal $(f(x))$ besitzt kein echtes Vielfaches, das demselben Ideal in $\mathfrak{K}_f$ zugeordnet ist.

2. Zwei äquivalente reguläre Funktionen unterscheiden sich nur durch einen Einheitsfaktor.

Dabei sind unter äquivalenten Funktionen solche verstanden, die Basis desselben Hauptideals sein können.

---

[12]) Vgl. etwa E. Noether, Abstrakter-Aufbau ..., § 4, 4.

In der Tat, ist $\mathfrak{a}' = (f'(x), \mathfrak{u}')$ ein solches Vielfaches, so ist $f' = \lambda f$. Aus der Voraussetzung folgt, daß f und f' denselben Grad haben müssen; also ist λ Einheitsfunktion und $f = \lambda^{-1} f'$. Sind ferner f_1 und f_2 äquivalent, $f_1 = \lambda f_2$, so folgt aus demselben Grunde, daß λ Einheitsfunktion ist.

Ist nun $f(x)$ vorgelegt, so zerlege man $\mathfrak{a} = (f(x))$ nach Satz 3: $\mathfrak{a} = (h_1(x), \mathfrak{q}_1) \ldots (h_r(x), \mathfrak{q}_r)$. Wird $\mathfrak{a}' = (h_1(x)) \ldots (h_r(x))$ gesetzt, so ist $\mathfrak{a}'$ Vielfaches von $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}' = \bar{\mathfrak{a}}$, also nach 1. $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$. Aus $(f(x)) = (h_1(x) \ldots h_r(x))$ folgt aber nach 2.: $f(x) = e(x) \cdot h_1(x) \ldots h_r(x)$, wo $e(x)$ Einheitsfunktion. Da ferner nach Voraussetzung $\bar{h}_i(x)$ und damit $h_i(x)$ primär und mit $\bar{h}_i$, $\bar{h}_k$ auch $h_i(x)$, $h_k(x)$ teilerfremd, ist die Existenz der Zerlegung bewiesen. Die Eindeutigkeit (bis auf Einheitsfunktionen) folgt, wie man leicht mit Hilfe von 2. sieht, ebenfalls aus Sats 3.

2. Läßt man die Voraussetzung fallen, daß in $\mathfrak{R}$ jedes reguläre Element Einheit ist — setzt man also $\mathfrak{R}$ als *allgemeinen primären Ring* voraus — so bleibt nur ein geringer Teil der Resultate von 1. gültig.

Wir können hier eine entsprechende Zerlegung nicht mehr bei einem beliebigen Ideal der Dimension Null vornehmen, sondern nur noch bei gewissen „ausgezeichneten" Idealen. Um diese zu definieren, sei mit $\mathfrak{R}'$ der eindeutig bestimmte speziell primäre Erweiterungsring von $\mathfrak{R}$ bezeichnet, der, wie in § 1 erklärt, durch Quotientenbildung entsteht. Dann haben wir in $\mathfrak{R}_f'$ einen Erweiterungsring von $\mathfrak{R}_f$ vor uns, dessen Idealtheorie wir nach 1. kennen. Wir nennen ein Ideal $\mathfrak{m}$ aus $\mathfrak{R}_f$ *ausgezeichnet,* wenn es in $\mathfrak{R}_f'$ ein Ideal $\mathfrak{n}$ gibt, so daß $\mathfrak{m}$ gleich dem (mengentheoretischen) Durchschnitt von $\mathfrak{R}_f$ mit $\mathfrak{n}$ ist, in Zeichen: $\mathfrak{m} = [\mathfrak{R}_f, \mathfrak{n}]$. Unter dem aus dem Ideal $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{R}_f$ abgeleiteten Ideal $\mathfrak{m}'$ in $\mathfrak{R}_f'$ versteht man den Durchschnitt aller Ideale in $\mathfrak{R}_f'$, die alle Elemente von $\mathfrak{m}$ enthalten; ist $\mathfrak{m}$ ausgezeichnet, so ist offenbar $\mathfrak{m} = [\mathfrak{R}_f, \mathfrak{m}']$. Wir legen ferner dem ausgezeichneten Ideal $\mathfrak{m}$ die *Dimension Null* bei, wenn $\mathfrak{m}'$ die Dimension Null hat; da schließlich, wie weiter unten gezeigt wird, für jedes ausgezeichnete Ideal $\mathfrak{m}$ gilt: $\mathfrak{R}_f \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$, so darf man zwei ausgezeichnete Ideale $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ *innerhalb des Systems aller ausgezeichneten Ideale teilerfremd* nennen, falls $(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2) = \mathfrak{R}_f$. Es gilt nun

Satz 5. *In $\mathfrak{R}_f$ läßt sich jedes ausgezeichnete Ideal der Dimension Null eindeutig darstellen als Produkt von ausgezeichneten Primäridealen der Dimension Null; die Komponenten sind paarweise teilerfremd innerhalb des Systems aller ausgezeichneten Ideale.*

Dieser Satz, der sich auch (wenigstens zum größten Teil) direkt mit unseren Hilfsmitteln beweisen läßt, folgt, wie mir H. Grell später mitteilte, unmittelbar aus einem allgemeinen Satz seiner Theorie der Idealkörper[13]). Ist P ein beliebiger kommutativer Ring, Σ ein Quotientenring von P (gemäß der Definition in § 1), und definiert man ausgezeichnete Ideale von P wie oben, so lautet der betreffende Satz:

Das System der ausgezeichneten Ideale von P *und das System aller Ideale in* Σ *sind vollständige und isomorphe Idealkörper.* Unter einem vollständigen Idealkörper ist dabei ein System von Idealen eines kommutativen Ringes verstanden, das neben zwei Idealen auch deren Produkt und Quotient, neben beliebig vielen Idealen auch deren größten gemeinsamen Teiler und kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches enthält; isomorph heißen zwei solche Idealkörper natürlich, wenn sie derart eineindeutig aufeinander bezogen werden können, daß dabei die eben genannten vier Verknüpfungen erhalten bleiben. Die Zuordnung des Satzes ist dabei so, daß dem ausgezeichneten Ideal $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{R}_f$ sein abgeleitetes Ideal $\mathfrak{m}'$ in $\mathfrak{R}_f'$ entspricht.

Nun ist klar, daß hieraus Satz 5 unmittelbar folgt. In der Tat ist $\mathfrak{R}_f'$ ein Quotientenring von $\mathfrak{R}_f$; nämlich der durch das System aller regulären Elemente von $\mathfrak{R}$ erzeugte. Sei $\mathfrak{m}$ ein beliebiges ausgezeichnetes Ideal der Dimension Null von $\mathfrak{R}_f$, dann gibt es nach Satz 3 in $\mathfrak{R}_f'$ eine Zerlegung: $\mathfrak{m}' = \mathfrak{q}_1' \ldots \mathfrak{q}_r'$. Sind $\mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_r$ die ausgezeichneten Ideale, die den $\mathfrak{q}_i'$ vermöge der Isomorphie entsprechen, so ist also $\mathfrak{m} = \mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_r$. Die $\mathfrak{q}_i$ sind Ideale der Dimension Null und außerdem primär; wegen $\mathfrak{q}_i = [\mathfrak{R}_f, \mathfrak{q}_i']$ ist nämlich, wie man sich leicht überzeugt, $\mathfrak{R}_f | \mathfrak{q}_i$ einem Unterring von $\mathfrak{R}_f' | \mathfrak{q}_i'$ isomorph. Ferner kann es keine andere solche Darstellung von $\mathfrak{m}$ geben, da man sonst vermöge der Isomorphie einen Widerspruch gegen die Eindeutigkeit der Darstellung in $\mathfrak{R}_f'$ bekäme.

Offenbar ist $\mathfrak{R}_f$ selbst ausgezeichnetes Ideal und $\mathfrak{R}_f'$ sein zugehöriges; da $\mathfrak{R}_f'$ ein Einheitselement enthält, ist $\mathfrak{R}_f' \cdot \mathfrak{m}' = \mathfrak{m}'$ für jedes Ideal $\mathfrak{m}'$ in $\mathfrak{R}_f'$ und die Isomorphie ergibt daher: $\mathfrak{R}_f \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ für jedes ausgezeichnete Ideal $\mathfrak{m}$ aus $\mathfrak{R}_f$. Wir können also von Teilerfremdheit im System aller ausgezeichneten Ideale von $\mathfrak{R}_f$ reden, und aus $(\mathfrak{q}_i', \mathfrak{q}_k') = \mathfrak{R}_f'$ für $i \neq k$ folgt $(\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_k) = \mathfrak{R}_f$. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Nennt man, im Falle $n = 1$, zwei Primfunktionen wesentlich verschieden, wenn sie sich nicht nur durch eine Einheit aus $\mathfrak{R}'$ unterscheiden, so bleibt von Satz 4:

Zu jeder regulären Funktion $f(x)$ *in* $\mathfrak{R}_f$ *gibt es ein reguläres Element* $\varkappa$ *aus* $\mathfrak{R}$, *derart, daß* $\varkappa \cdot f(x)$ *als Produkt von Primärfunktionen darstellbar ist, die zu wesentlich verschiedenen Primfunktionen gehören.*

Ist nämlich $f(x) = h_1(x) \ldots h_r(x)$ in $\mathfrak{R}_f'$, so gibt es reguläre Elemente $\varkappa_i$ aus $\mathfrak{R}$, derart, daß $\varkappa_i \cdot h_i(x)$ zu $\mathfrak{R}_f$ gehört (z. B. das Produkt

[13]) H. Grell, a. a. O. § 6.

der Nenner der Koeffizienten von $h_i(x)$); offenbar genügt es, $\varkappa = \Pi \varkappa_i$ zu wählen.

3. Es entsteht die Frage, ob die Resultate von 1. sich auf den Fall höherer Dimension ausdehnen lassen. Daß dies unmöglich ist, zeigen die folgenden mir von W. Krull mitgeteilten Beispiele: Sei $\mathfrak{K}$ Körper, $\mathfrak{R} = \mathfrak{K}(\alpha)$ mit $\alpha^2 = 0$, $\mathfrak{R}_f = \mathfrak{R}[x, y]$, $\mathfrak{K}_f = \mathfrak{K}[\bar{x}, \bar{y}]$, $\mathfrak{a}$ Ideal in $\mathfrak{R}_f$, $\bar{\mathfrak{a}}$ zugehöriges Ideal aus $\mathfrak{K}_f$.

1. $\mathfrak{a} = (x, \alpha y)$ ist nicht primär, da keine Potenz von y durch $\mathfrak{a}$ teilbar wird; $\bar{\mathfrak{a}} = (\bar{x})$ ist jedoch primär.

2. $\mathfrak{a} = (x^2, xy + \alpha, \alpha x)$[14]) ist primär, dagegen $\bar{\mathfrak{a}} = (\bar{x}^2, \bar{x}\bar{y})$ nicht.

§ 3.

Erweiterungen primärer Ringe.

1. Unter einem *Oberring* $\mathfrak{S}$ eines primären Ringes $\mathfrak{R}$ sei ein Erweiterungsring verstanden, der ebenfalls primär ist. Ist S ein System von Elementen aus $\mathfrak{S}$, so verstehen wir unter dem durch Adjunktion von S zu $\mathfrak{R}$ entstandenen Ring $\mathfrak{R}(S)$ den Durchschnitt aller in $\mathfrak{S}$ gelegenen Oberringe von $\mathfrak{R}$, die alle Elemente von S enthalten.

Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal im Polynombereich $\mathfrak{R}_f$ von n Unbestimmten, so versteht man unter einer *Nullstelle von* $\mathfrak{a}$ ein System S von n Elementen aus einem Oberring $\mathfrak{S}$ derart, daß alle zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Polynome für S verschwinden. Ist umgekehrt S ein System von Elementen aus $\mathfrak{S}$, so bildet die Gesamtheit der Polynome in $\mathfrak{R}_f$, die für S verschwinden, ein Ideal, das *Nullstellenideal* $\mathfrak{a}_S$ *von* S. Es ist stets: $\mathfrak{R}(S) \simeq \mathfrak{R}_f | \mathfrak{a}_S$.

Damit ein Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}_f$ Nullstellenideal sei (d. h. damit ein Oberring von $\mathfrak{R}$ existiert, der durch Adjunktion einer Nullstelle von $\mathfrak{a}$ entsteht), ist offenbar notwendig und hinreichend, daß es primär ist und kein Element aus $\mathfrak{R}$ enthält; denn dann ist $\mathfrak{R}_f | \mathfrak{a}$ ein solcher Oberring.

Wir nennen ein Nullstellenideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}_f$ von der Dimension Null, wenn das aus ihm abgeleitete Ideal $\bar{\mathfrak{a}}$ im Polynombereich mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$ die Dimension Null hat; es ist dies identisch damit, daß jede Nullstelle von $\bar{\mathfrak{a}}$ aus lauter in bezug auf $\mathfrak{K}$ algebraischen Elementen besteht (vgl. Anmerkung [11])).

Ein reguläres Nullstellenideal der Dimension Null $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}_f$ heiße *Ideal erster Art,* wenn jedes Element seines zugehörigen Primideals $\mathfrak{p}$ modulo $\mathfrak{a}$ einem Element aus $\mathfrak{R}$ kongruent ist. Es folgt dann, daß jedes Element von $\mathfrak{p}$ modulo $\mathfrak{a}$ einem Nullteiler aus $\mathfrak{R}$ kongruent ist, da sonst eine Potenz

[14]) Man bestätigt dies etwa daraus, daß jedes Element aus $\mathfrak{R}_f$ modulo $\mathfrak{a}$ eine Darstellung zuläßt: $f(y) + \alpha g(y) + cx$, wo f und g Polynome, c ein Element aus $\mathfrak{K}$.

eines regulären Elementes, die also von Null verschieden ist, im Nullstellenideal $\mathfrak{a}$ liegen würde; ferner wird $\bar{\mathfrak{p}}$ gleich $\bar{\mathfrak{a}}$, wenn $\bar{\mathfrak{p}}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ die zugehörigen Ideale in P_f sind (§ 1). Ein nichtreguläres Nullstellenideal $\mathfrak{u}$ aus $\mathfrak{R}_f$ heiße *Ideal erster Art*, wenn jedes Element seines zugehörigen Primideals $\mathfrak{p}_f^*$ modulo $\mathfrak{u}$ einem Element aus $\mathfrak{R}$ kongruent ist.

Schließlich verstehen wir unter einem *Ideal zweiter Art* $\mathfrak{u}$ ein Nullstellenideal, das alle Potenzprodukte der x_i von einer gewissen Dimension an enthält. $\mathfrak{R}_f | \mathfrak{u}$ entsteht durch Adjunktion von Nullteilern, und umgekehrt ist das Nullstellenideal eines Systems von Nullteilern stets ein Ideal dieser Art.

Definition 1. Ein Element a von $\mathfrak{S}$ heißt *algebraisch* in bezug auf $\mathfrak{R}$, wenn $\mathfrak{a}_a$ regulär ist, sonst *transzendent*.

$\mathfrak{S}$ heißt algebraisch in bezug auf $\mathfrak{R}$, wenn alle Elemente es sind, sonst transzendent.

P sei der in § 1 erklärte, $\mathfrak{R}$ zugeordnete Ring, ebenso $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{S}$, Σ, $a \sim \bar{a}$ die dort erklärten Bezeichnungen.

I. *a aus $\mathfrak{S}$ ist dann und nur dann algebraisch in bezug auf $\mathfrak{R}$, wenn $\bar{a}$ algebraisch in bezug auf $\mathfrak{K}$ ist.*

Die Notwendigkeit ist evident. Ist umgekehrt $\bar{a}$ algebraisch in bezug auf $\mathfrak{K}$, so genügt es einem Polynom $\overline{f(x)}$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$. Offenbar gibt es in $\mathfrak{K}$ ein Element $\bar{z} \neq 0$, so daß $\bar{z} \cdot \overline{f(x)} = \overline{g(x)}$ zu Σ gehört. Ist $g(x)$ ein Polynom aus $\mathfrak{R}_f$, das $\overline{g(x)}$ zugeordnet ist, so ist $g(a) = q$ ein Nullteiler aus $\mathfrak{S}$. Verschwindet von diesem etwa die ϱ-te Potenz, so enthält $\mathfrak{a}_a$ die reguläre Funktion $(g(x))^\varrho$.

Definition 2. a aus $\mathfrak{S}$ heißt *regulär algebraisch* in bezug auf $\mathfrak{R}$, wenn $\mathfrak{a}_a$ reguläres Ideal erster Art ist.

Einen Oberring $\mathfrak{S}$ nennen wir *regulär algebraische Erweiterung von* $\mathfrak{R}$, wenn es ein wohlgeordnetes System von Ringen gibt: $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_\sigma, \ldots, \mathfrak{S}$ derart, daß jeder Ring durch Adjunktion eines regulär algebraischen Elementes aus dem vorangehenden hervorgeht oder (falls ein unmittelbar vorangehender nicht existiert) die Vereinigungsmenge der vorangehenden Ringe ist.

II. *Der Oberring $\mathfrak{S}$ ist dann und nur dann regulär algebraische Erweiterung von $\mathfrak{R}$, wenn er algebraisch ist und keine neuen Nullteiler enthält,* d. h. alle seine Nullteiler schon in $\mathfrak{R}$ liegen.

Ist zunächst a regulär algebraisch in bezug auf $\mathfrak{R}$, so ist $\mathfrak{R}(a) \simeq \mathfrak{R}_f | \mathfrak{a}_a$ und die Nullteiler von $\mathfrak{R}(a)$ sind diejenigen Elemente, die den aus dem zugehörigen Primideal $\mathfrak{p}_a$ hervorgehenden Restklassen entsprechen; diese können aber, da $\mathfrak{a}_a$ Ideal erster Art ist, durch Elemente aus $\mathfrak{R}$ repräsentiert werden, so daß also $\mathfrak{R}(a)$ keine neuen Nullteiler enthält. Ist $\mathfrak{S}$ eine beliebige regulär algebraische Erweiterung von $\mathfrak{R}$, so ergibt sich diese Tatsache leicht durch transfinite Induktion.

Ist umgekehrt $\mathfrak{S}$ eine algebraische Erweiterung von $\mathfrak{R}$, die keine neuen Nullteiler enthält, so sei a ein Element aus $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ ein beliebiger Zwischenring zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$. Dann ist a regulär algebraisch in bezug auf $\mathfrak{S}'$; denn da alle Nullteiler von $\mathfrak{S}'(a)$ bereits in $\mathfrak{R}$ liegen, so müssen die Restklassen, in die das zum Nullstellenideal gehörige Primideal zerfällt, durch Elemente aus $\mathfrak{R}$ repräsentierbar sein. Hiernach kann man mit Hilfe des Wohlordnungssatzes eine verlangte Kette von Ringen leicht konstruieren.

Jede algebraische Erweiterung $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$ zerfällt eindeutig in eine Nullteilererweiterung (durch Adjunktion von Nullteilern entstehende) und eine darauf folgende regulär algebraische Erweiterung. In der Tat braucht man offenbar nur alle Nullteiler von $\mathfrak{S}$ zu $\mathfrak{R}$ zu adjungieren, um eine solche Zerlegung zu erhalten; daß es keine andere derartige Zerlegung gibt, ist ebenfalls evident.

Definition 3. Ein transzendentes Element a aus $\mathfrak{S}$ heiße *regulär transzendent* in bezug auf $\mathfrak{R}$, wenn $\mathfrak{a}_a$ Ideal erster Art ist.

Entsprechend heiße ein Oberring $\mathfrak{S}$ regulär transzendente Erweiterung von $\mathfrak{R}$, wenn es ein wohlgeordnetes System von Ringen gibt: $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_\sigma, \ldots, \mathfrak{S}$ derart, daß jeder Ring durch Adjunktion eines regulär transzendenten Elementes aus dem vorangehenden hervorgeht oder (falls ein unmittelbar vorangehender nicht existiert) die Vereinigungsmenge der vorangehenden Ringe ist.

III. *Der Oberring $\mathfrak{S}$ ist dann und nur dann regulär transzendente Erweiterung von $\mathfrak{R}$, wenn er transzendent ist und keine neuen Nullteiler enthält.*

Die Richtigkeit ergibt sich genau wie bei II. Ebenso zerfällt, wenn $\mathfrak{L}$ rein transzendente Erweiterung von $\mathfrak{K}$ ist, $\mathfrak{S}$ eindeutig in eine Nullteilererweiterung und eine darauf folgende regulär transzendente.

Ein beliebiger Oberring $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$ zerfällt der Reihe nach in 1. eine Nullteilererweiterung, 2. eine darauf folgende regulär transzendente, 3. eine darauf folgende regulär algebraische Erweiterung. Man braucht eben nur alle Nullteiler von $\mathfrak{S}$ zu $\mathfrak{R}$ zu adjungieren und dann I zu benutzen, indem man beachtet, daß jede Erweiterung eines Körpers in eine rein transzendente und eine darauf folgende algebraische zerfällt. Lassen sich diese drei Stufen jeweils durch Adjunktion endlich vieler Elemente erreichen, so wollen wir $\mathfrak{S}$ einen endlichen Oberring nennen. Dann gilt nach dem Vorangegangenen:

Ein beliebiger endlicher Oberring $\mathfrak{S}$ des primären Ringes $\mathfrak{R}$ entsteht, indem man 1. in $\mathfrak{R}_f$ ein Ideal $\mathfrak{q}_1$ zweiter Art Null setzt, $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}_f | \mathfrak{q}_1$; 2. in $\mathfrak{R}_f'$ ein nicht reguläres Ideal erster Art $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{R}'' = \mathfrak{R}_f' | \mathfrak{q}_2$; 3. in $\mathfrak{R}_f''$ ein reguläres Ideal erster Art $\mathfrak{q}_3$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_f'' | \mathfrak{q}_3$.

Da man jeden beliebigen Oberring von $\mathfrak{R}$ aus endlichen Oberringen aufbauen kann, so reichen also die beiden angegebenen Typen von Idealen zur Beschreibung dieser allgemeinsten Erweiterung aus. Hiermit ist die wesentliche Frage aufgeworfen, wann zwei reguläre Erweiterungen bezüglich $\mathfrak{R}$ äquivalent sind, d. h. wie weit man aus der Definition der Ideale erster Art auf Isomorphie ihrer Restklassenringe schließen kann.

Diese Betrachtungen bleiben gültig, wenn man als Grundbereich $\mathfrak{R}$ einen speziellen primären Ring wählt. Unter einem Oberring $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$ verstehen wir dann einen solchen Erweiterungsring von $\mathfrak{R}$, der ebenfalls speziell primär ist. Ist S ein System von Elementen aus $\mathfrak{S}$, so bedeutet $\mathfrak{R}(S)$ den Durchschnitt aller in $\mathfrak{S}$ gelegenen Oberringe von $\mathfrak{R}$, die alle Elemente von S enthalten; $\mathfrak{R}(S)$ ist wieder Oberring. Ein reguläres Ideal $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{R}_f$ ist dann und nur dann Nullstellenideal, wenn es primär ist, kein Element aus $\mathfrak{R}$ enthält und die Dimension Null hat; denn dann hat das zugehörige Primideal keinen von $\mathfrak{o}$ verschiedenen echten Teiler und im Restklassenring nach $\mathfrak{a}$ werden alle regulären Elemente Einheiten. Definition 1 und 2, sowie I und II und die Zerfällung der algebraischen Erweiterungen gelten auch hier. Die Definition der regulär transzendenten Erweiterungen gestaltet sich etwas anders. Man betrachtet hier zweckmäßig nicht Nullstellenideale in $\mathfrak{R}_f$, sondern Nullteilerideale $\mathfrak{u}$ im Quotientenring $\mathfrak{R}_f^*$ von $\mathfrak{R}_f$ nach $\mathfrak{p}_f^*$; $\mathfrak{u}$ heiße dann ganz analog Ideal erster Art, wenn jeder Nullteiler von $\mathfrak{R}_f^*$ modulo $\mathfrak{u}$ einem Element aus $\mathfrak{R}$ kongruent ist. Modifiziert man Definition 3 in diesem Sinne, so bleibt III und das obige Schlußresultat bestehen.

2. Ich zeige noch kurz, wie sich im Falle rein transzendenter Erweiterungen die Begriffe der Körpertheorie direkt übertragen.

a aus $\mathfrak{S}$ heiße *total transzendent*, wenn $\mathfrak{a}_a = (0)$; $\mathfrak{S}$ heiße *rein transzendente Erweiterung* von $\mathfrak{R}$, wenn es ein wohlgeordnetes System von Oberringen gibt: $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_\sigma, \ldots, \mathfrak{S}$, derart, daß jeder Ring durch Adjunktion eines total transzendenten Elementes aus dem vorangehenden hervorgeht oder (falls ein unmittelbar vorangehender nicht existiert) die Vereinigungsmenge der vorangehenden Ringe ist. Analog der Körpertheorie gilt:

IV. *Ist $\mathfrak{S}$ rein transzendente Erweiterung von $\mathfrak{R}$, so ist jedes Element von $\mathfrak{S}$ total transzendent*; ausgenommen sind nur die Nullteiler und diejenigen Elemente, die sich als Summe eines regulären Elementes aus $\mathfrak{R}$ und eines Nullteilers darstellen lassen.

Daß diese letzteren Elemente ausgeschlossen sind, ist natürlich klar, denn sie genügen Gleichungen der Form $x^{\varrho} = 0$ bzw. $(x - a)^{\varrho} = 0$. Ist $\mathfrak{a}$ ein von diesen verschiedenes Element und $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_\sigma, \ldots, \mathfrak{S}$ ein System von Ringen nach Definition, ferner $\mathfrak{R}_\tau$ der erste Ring, in dem a vorkommt, so existiert offenbar ein vorangehender Ring $\mathfrak{R}_{\tau-1}$. Für durch Adjunktion *eines* total transzendenten Elementes entstehende Erweiterungen, d. h. für den Polynombereich einer Unbestimmten, ergibt sich die Behauptung aber wie folgt. Ist $f(x)$ eine Funktion positiven Grades, so sei etwa $a_0 + a_1 f(x) + \ldots + a_n (f(x))^n = 0$ eine Gleichung niedrigsten Grades, der $f(x)$ genügt (a_i aus $\mathfrak{R}$, $a_0 \neq 0$); hieraus würde folgen: $f(x)(a_1 + a_2 f(x) + \ldots + a_n (f(x))^{n-1} = a_o$. Da $f(x)$ in einem geeigneten Erweiterungsring eine Nullstelle besitzt (man braucht nur zum Restklassenring nach dem Hauptideal $(f(x))$ überzugehen), ist diese Beziehung unmöglich.

V. *Ist $\{\ldots a_\sigma \ldots\}$ ein wohlgeordnetes System von Elementen aus einem Oberring $\mathfrak{S}$, und a_σ total transzendent in bezug auf den durch Adjunktion seines Abschnittes zu $\mathfrak{R}$ hervorgehenden Ring, so ist a_σ auch total transzendent in bezug auf den Ring, der aus $\mathfrak{R}$ durch Adjunktion aller übrigen a_τ entsteht.* Der Beweis kann wörtlich wie in der Körpertheorie geführt werden[15]).

Ein System S von Elementen aus $\mathfrak{S}$ heiße irreduzibel, wenn jedes seiner Elemente total transzendent ist in bezug auf den durch Adjunktion der übrigen Elemente entstehenden Ring. Wegen V ist ein Oberring dann und nur dann rein transzendent, wenn er durch Adjunktion eines irreduziblen Systems erhalten werden kann. Ist nämlich $\mathfrak{S}$ rein transzendent und $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_\sigma, \ldots, \mathfrak{S}$ ein System von Ringen nach Definition, bedeutet ferner S das System der primitiven Elemente derjenigen Ringe $\mathfrak{R}_\sigma$, die unmittelbar vorangehende besitzen, so ist $\mathfrak{R}(S) = \mathfrak{S}$ und S nach V irreduzibel; ist umgekehrt S irreduzibel, so kann man vermittelst des Wohlordnungssatzes leicht ein definitionsgemäßes System von Ringen für $\mathfrak{R}(S)$ aufstellen.

Zwei verschiedene Elemente des irreduziblen Systems S können offenbar nicht nach dem Ideal aller Nullteiler von $\mathfrak{S}$ kongruent sein; daher haben S nnd $\overline{S}$ stets gleiche Mächtigkeit, wenn $\overline{S}$ das homomorphe System in Σ bedeutet. Ist ferner S irreduzibel in bezug auf $\mathfrak{R}$, so ist, wie man sich leicht überzeugt, $\overline{S}$ irreduzibel in bezug auf $\mathfrak{K}$, und ist S erzeugendes irreduzibles System von $\mathfrak{S}$, d. h. $\mathfrak{R}(S) = \mathfrak{S}$, so ist auch $\mathfrak{K}(\overline{S}) = \mathfrak{L}$. Bei Körpererweiterungen haben nach Steinitz alle erzeugenden irreduziblen Systeme gleiche Mächtigkeit; aus dem eben Bemerkten folgt, daß sich dies

[15]) Vgl. etwa Steinitz.

vermittelst der Homomorphie ohne weiteres auf primäre Ringe überträgt. Wir können also auch hier einen „Transzendenzgrad" als die gemeinsame Mächtigkeit aller erzeugenden irreduziblen Systeme definieren; der Transzendenzgrad von $\mathfrak{S}$ in bezug auf $\mathfrak{R}$ ist gleich dem von $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}$.

Haben $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ gleichen Transzendenzgrad τ, so sind sie bezüglich $\mathfrak{R}$ äquivalent; für $\tau = 1$ ist dies unmittelbar klar, allgemein folgt es durch transfinite Induktion. Sind umgekehrt $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ mit den Transzendenzgraden τ_1 und τ_2 äquivalent bezüglich $\mathfrak{R}$, so sind offenbar Σ_1 und Σ_2 bezüglich P äquivalent, also auch $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ äquivalent bezüglich $\mathfrak{K}$ und die Körpertheorie ergibt $\tau_1 = \tau_2$. Also:

Zwei rein transzendente Erweiterungen von $\mathfrak{R}$ sind dann und nur dann bezüglich $\mathfrak{R}$ äquivalent, wenn sie gleichen Transzendenzgrad haben.

Auch diese Entwicklungen bleiben unter Voraussetzung eines speziell primären Grundbereiches bestehen. Die Begriffe Oberring und Adjunktion sind so zu verstehen, wie in 1. definiert; dann kann die Definition des total transzendenten Elementes ungeändert bleiben und IV, V, sowie das Schlußergebnis über die Äquivalenz gelten auch hier, wie man sich leicht überzeugt, wenn man beachtet, daß man die jeweiligen Oberringe bekommt, wenn man zunächst im Sinne der allgemein primären Ringe erweitert und dann zum Quotientenring übergeht.

(Eingegangen am 15. 5. 1926.)

Berichtigung

zu dem Aufsatze von P. E. Böhmer „Über die Transzendenz gewisser dyadischer Brüche", Math. Annalen **96**, S. 367–377.

S. 371 Z. 12 v. o. lies:

$$\frac{(1-z)^2}{z} \sum_{q=1}^{\infty} \varphi(q) \frac{z^q}{1-z^q} = 1.$$